离散数学

王元元
李尚奋 编著

科学出版社

吴南生题

离散数学

王元元　李尚奋 编著

科学出版社

1994

（京）新登字092号

内 容 简 介

本书包括离散数学四大分支的基础理论：数理逻辑、图论、集合论、抽象代数学．

本书作为计算机专业本科生的教材，具有结构合理，内容全面、新颖等特点．由于作者对材料作了很好的取舍安排，如果删去带"*"标记的章、节及习题，即可作为计算机专业大专生教材．本书每章均附有习题．

本书内容是按国家教委离散数学教学大纲要求编排的，适合计算机专业本科生、大专生及教师使用．

离 散 数 学
王元元　李尚奋 编著
责任编辑　刘晓融　何舒民
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
北京市怀柔黄坎印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1994年6月第一版　开本：850×1168　1/32
1994年6月第一次印刷　印张：14 1/4
印数：1—2 100　字数：373 000
ISBN 7-03-003993-9/O·704
定价：16.50元

前　言

“离散”与“连续”是数量关系中一对极为深刻的矛盾，它们之间的对立与统一是数学发展的重要动力之一．“离散”是“连续”的否定，即“不连续”；“连续”则是指事物、数量的一种属性，这种属性使它们容易被分割或结合，并且不会因此而丧失它们原有的本性．例如，实数是连续的，整数则是离散的；马铃薯是离散的，而马铃薯羹则是连续的．

古代数学主要讨论整数、整数的比（有理数），它甚至（德莫克利特）把几何图形也看作是由很多孤立的“原子”组成的．因而，那时数学被看作是研究离散的或离散化了的数量关系的科学．

随着数学理论的不断发展（不可通约线段的发现、对无限概念的深入探讨），同时由于处理离散数量关系的数学工具在刻划物体运动方面无能为力，近代出现了连续的数量概念——实数，出现了处理连续数量关系的数学工具——微积分．因此，近代数学主要研究连续数量关系及其数学结构、数学模型，并且取得了极其辉煌的成果．近代数学的这一特征，一直延续至今，仍在现代数学中占据支配地位．

然而，近30年来，数字电子计算机的广泛应用与飞速发展，极大地冲击了现代数学．由于数字电子计算机是一个离散结构，它只能处理离散的或离散化了的数量关系，因此，无论计算机科学本身，还是与计算机科学或其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临这样一些问题：如何高速、有效地处理离散的对象和离散的数量关系，如何对离散结构建立离散数学模型，又如何将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可由计算机加以处理．于是，人们开始重新认识离散数量关系的研究意义，重新

重视讨论离散数量关系的数学分支，并取得新的发展．离散数学学科的出现和发展是上述事实的逻辑结果．

“离散数学”是研究离散数量关系和离散结构数学模型的数学分支的统称，“离散数学课程”是介绍这些分支的基本概念、基本理论和基本研究方法、研究工具的基础课程，并业已成为计算机科学与工程各专业的核心基础课程．它所涉及的概念、方法和理论，大量地出现在“编译原理”、“数据结构”、“操作系统”、“数据库系统”、“算法的分析与设计”等专业课程中；它所提供的训练，十分有益于学生概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高，十分有益于学生严谨、完整、规范的科学态度的培养．这些能力与态度是一切软、硬件计算机科学工作者所不可缺少的，它所传授的思想，广泛地体现在计算机科学与技术诸领域，例如：理论的和现实的可计算性研究，新的软件理论的发现和新的程序设计语言的提出，人工智能系统的研制与新一代计算机的探索等．

本书包括离散数学四大分支的基础理论，它们是数理逻辑、集合论、图论和抽象代数学．考虑到组合论、可计算性理论常被独立选作计算机科学与工程专业的专业基础课，本书没有涉及．本书对数理逻辑理论、函数概念及代数结构介绍的强化、系统化，是区别于其它同类书籍的鲜明特点，从而在内容上具有先进性．

本书作为教材，主要适用于计算机科学与工程各专业的本科生，也适用于其它专业和其它层次的学生，因为本书对内容作了很好的取舍编排，所以可适用于不同情况．全书包含了大约可在120个学时内讲授的内容；如果删除标记“*”的章、节和小节，那么可以在90—100小时内完成教学计划；如果全部或部分地删除标记“*”和“Δ”的章、节和小节，那么可以在60—80小时内讲授完毕．每节末编排了丰富的习题，难度有一定的层次，并按其涉及的主题对应地标记了“*”或“Δ”．这是为了适应目前高校普遍兼有“培训”、“大专”、“本科”多层次教学目标的状况，以及各校离散数学课程教学时数高低悬殊的现状．它亦成为本书的又一显著特点．

本书由南京通信工程学院王元元与汕头大学李尚奋共同编著，两位编者感谢汕头大学对本书的编写与出版所提供的大力支持，更感谢广东省政协主席、著名书画家吴南生先生为本书题写书名。

限于编者水平，书中错误之处在所难免，敬请读者指正.

编者

1993年3月

目　录

第一篇　数理逻辑

第二篇 集合论

第三篇 图论

第四篇　抽象代数

第一篇 数理逻辑

第一章 命题演算及其形式系统

逻辑是研究人类推理过程的科学，而数理逻辑（mathematical logic，又称符号逻辑、现代逻辑）则是用数学的方法来进行这一研究的，其显著特征是符号化和形式化，即把逻辑所涉及的“概念、判断、推理”用符号来表示，用公理体系及形式推演刻划推理过程的一般规律.

在传统的形式逻辑中，先讨论概念，后讨论判断（即命题），再讨论推理，这是因为概念组成判断，判断又组成推理. 但是，这未必是一种好的次序安排. 事实上，当我们把推理作为研究的根本目标时，先忽略判断的细节——概念，把判断看作不可分的整体——命题来讨论，更便于对推理规律进行分析；在此基础上，再引入概念的形式表示——谓词，把推理的研究引向更加深刻的层次，会显得格外顺理成章. 本章的阐述将遵循这一次序，先讨论命题、命题演算及其形式系统.

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题

我们把对确定的事物作出判断的陈述句称作命题（proposition），当判断合理或符合客观实际时，称该命题真(true)，否则称该命题假(false).真、假常被称为命题的真值. 古典逻

辑认为，命题或真或假，但不兼而有之（我们也作此约定），这就是逻辑学的一个基本假设——排中律．非经典逻辑，如直觉主义逻辑、多值逻辑不接受排中律，我们不作讨论．

例 1.1 考虑下列语句：

（1） 雪是白的．

（2） $2+2=4$

（3） $2+2=5$

（4） 2 是偶数且 3 也是偶数．

（5） 陈胜起义那天杭州下雨．

（6） 大于 2 的偶数均可分解为两个质数的和（哥德巴赫猜想）．

（7） 真舒服啊!

（8） 您去学校吗?

（9） $x+y<0$

（10） 我说的这句话（例 1.1 之(10)）假．

显然（1），（2），（3），（4）都是命题，（1），（2）为真命题，（3），（4）为假命题．事实上（5），(6）也是命题，虽然它们的真值未必在现在或将来可以得知，但它们所作判断是否符合客观实际这一点是确定的．

（7），（8）不是陈述句，因此它们都不是命题．(9)也不是命题，因为通常 x，y 表示变元，它们不是确定的对象，从而（9）没有确定的真值．只有当 x，y 取得确定的值时，（9）才成为命题，才有相应的真值．

（10）不是命题，因为它是一个悖论，即一种病态的语句，我们不承认此类语句为陈述句．由于（10）对本身的真假作了否定的判断，从而使对(10)真值的判定变得没有意义了．当判定(10)真时，（10）对本身的判断成立，即(10）假；当判定（10)假时，（10）对本身的判断则不成立，即（10）真．

我们注意到，命题（1）—（6）中的（4）与其它命题不同，（4）实际上是由两个命题与一个联结词“且”所组成的．命题(4)

的真值不仅依赖于这两个组成它的命题，而且还依赖于这个联结词的意义．像这样的联结词称为逻辑联结词（logical connectives）．通常把不含有逻辑联结词的命题称为原子命题或原子（atom），其余称为复合命题（compositive proposition）．

例 1.2 下列命题都是复合命题，其中楷体字为逻辑联结词：

（1）雪不是白的（并非雪是白的）．

（2）今晚我看书或者去看电影．

（3）你去了学校，我去了工厂（省略了逻辑联结词"且"）．

（4）如果天气好，那么我去接你．

（5）偶数 a 是质数，当且仅当 $a=2$（a 是常数）．

在形式化表示中，原子命题通常记为 p，q，r，s 等小写拉丁字母．f 表示恒假命题，t 表示恒真命题．

1.1.2 联结词

今后"联结词"一词均指逻辑联结词及其符号表示．重要的联结词有 5 个，它们已在例 1.2 中出现．

否定词"并非"（not），用符号 $\neg$ 表示．设 p 表示一命题，那么 $\neg p$ 表示命题 p 的否定．p 真时 $\neg p$ 假，而 p 假时 $\neg p$ 真．$\neg p$ 读作"并非 p"或"非 p"．今后我们用 1 表示真值"真"，用 0 表示真值"假"，用类似表 1.1 的所谓真值表来规定联结值的意义，描述复合命题的真值状况．表 1.1 规定了否定词 $\neg$ 的意义，表示 $\neg p$ 的真值状况．

表 1.1

p	$\neg p$
0	1
1	0

例 1.3 如果 p 表示命题"雪是白的"，那么"并非雪是白的"、"雪不是白的"应表示为 $\neg p$，此时 $\neg p$ 为假，因为 p 为真．

当用否定词"并非"代替自然语言中的"不"时（或者反过

来)，应注意保持原语句的意义．例如 p 表示“我们都是好学生”时，$\neg p$ 表示“并非我们都是好学生”或“我们不都是好学生”，而不是“我们都不是好学生”．

合取词“并且”（and），用符号 $\wedge$ 表示．设 p，q 表示两命题，那么 $p\wedge q$ 表示合取 p 和 q 所得的命题，即 p 和 q 同时为真时 $p\wedge q$ 真，否则 $p\wedge q$ 为假．$p\wedge q$ 读作“p 并且 q”或“p 且 q”．

合取词 $\wedge$ 的意义和命题 $p\wedge q$ 的真值状况可由表 1.2 来刻划．

表 1.2

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.4 如果 p 表示命题“你去了学校”，q 表示命题“我去了工厂”，那么 $p\wedge q$ 表示命题“你去了学校并且我去了工厂”．$p\wedge q$ 为真，当且仅当你、我分别去了学校和工厂．

析取词“或”（or），用符号 $\vee$ 表示．设 p，q 表示两命题，那么 $p\vee q$ 表示 p 和 q 的析取，即当 p 和 q 有一为真时，$p\vee q$ 为真，只有当 p 和 q 均假时 $p\vee q$ 为假．$p\vee q$ 读作“p 或者 q”、“p 或 q”．

析取词 $\vee$ 的意义及复合命题 $p\vee q$ 的真值状况由表 1.3 描述．

表 1.3

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 1.5 如果 p,q 分别表示“今晚我看书”和“今晚我去看电影”，那么 $p \vee q$ 表示“今晚我看书或者去看电影”. 当我于当晚看了书，或者看了电影，或者既看了书又看了电影时，$p \vee q$ 为真，只是在我既不看书也不看电影时 $p \vee q$ 为假.

值得注意的是，这里的“或”是所谓可兼的，即当 p 和 q 均真时，确认 $p \vee q$ 为真. 在日常生活中，“或”在有的场合下不同于上述意义. 例如“人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛”. 其中的“或”是不可兼的，即当发现有人的死既重于泰山又轻于鸿毛时，上述论断被认为假. 看来这里的“或”用 $\vee$ 表示不合适，可用表 1.4 规定的新联结词“不可兼或”$\overline{\vee}$ 表示之. 但是，像上述场合一样的许多场合下，两个析取命题事实上不可能同时为真，即表 1.4 的末行根本无需定义，这时用 $\vee$ 代替 $\overline{\vee}$ 就没有问题，并且能使语句的表示简化. 例如“$a>0$ 或 $a=0$ 或 $a<0$”可表示为“$a>0 \vee a=0 \vee a<0$”，而不必多此一举地表示为“$a>0 \,\overline{\vee}\, a=0 \,\overline{\vee}\, a<0$”.

表 1.4

p	q	$p \overline{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

蕴涵词“如果……，那么……”(if…then…)，用符号→表示. 设 p,q 表示两命题，那么 $p \to q$ 表示命题“如果 p，那么 q”. 当 p 真而 q 假时，命题 $p \to q$ 为假，否则均认为 $p \to q$ 为真. $p \to q$ 中的 p 称为蕴涵前件，q 称为蕴涵后件. $p \to q$ 的读法较多，可读作“如果 p 则 q”，“p 蕴涵 q”，“p 是 q 的充分条件”，“q 是 p 的必要条件”，“q 当 p”，“p 仅当 q”等等. 数学中还常把 $q \to p$，$\neg p \to \neg q$，$\neg q \to \neg p$ 分别叫做 $p \to q$ 的逆命题，否命题，逆否命题.

蕴涵词→的意义及复合命题 $p \to q$ 的真值状况规定见表 1.5.