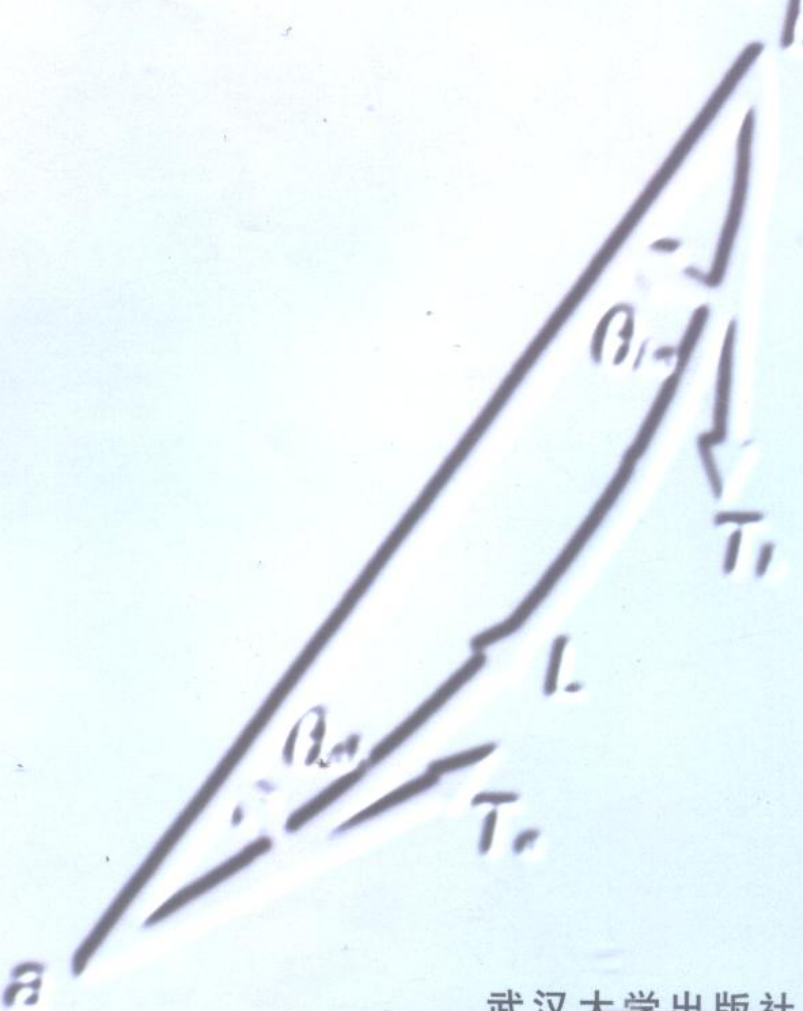
解析函数和奇异积分方程论文选集

路见可 著



武汉大学出版社

解析函数和奇异积分方程论文选集

路见可

武汉大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

解析函数和奇异积分方程论文选集/路见可著. —武汉：武汉大学出版社，1998. 12

ISBN 7-307-02608-2

Ⅰ　解…

Ⅱ　路…

Ⅲ　①解析函数—文集　②奇异积分方程—文集

Ⅳ　O174. 55-53　O175. 5-53

武汉大学出版社出版发行

（430072　武昌　珞珈山）

湖北省荆州市今印集团有限责任公司印刷

（434000　湖北省荆州市沙市区红门路桥）

1998 年 12 月第 1 版　　1998 年 12 月第 1 次印刷

开本：787×1092　1/16　印张：20. 5

字数：496 千字　印数：1—2000

ISBN 7-307-02608-2/O・194　定价：21. 00 元

几点说明

1. 本集只选入作者在解析函数边值问题和奇异积分方程及其应用这一领域中的论文(到1996年上半年为止),其他方面的论文概不选入;虽属上述领域中的论文,但属综述性的,也不选入。

2. 作者与他人合作的论文均不选入。

3. 同一论文用中、英文同时发表或先后转载的,只选用一种,其他的则加以注明。

4. 用英文发表的论文,多数以汉语拼音 Lu Jianke 署名,一些以英文名字 Chien-ke Lu 署名的则另加说明。

5. 本选集分三大部分:(一)解析函数边值问题;(二)奇异积分和奇异积分方程;(三)在弹性和断裂力学中的应用。每部分的论文以最初发表时间先后为序。同一论文兼及两部分内容的,则从前不从后。

6. 各论文中已发现的疏漏或误排已予改正。

7. 主题相近的论文只选刊一篇,其余的置于相应部分后的"附录论文"中仅提供篇名和出处。

目　　录

(一)解析函数边值问题 ······ 1

复合边值问题 ······ 1

周期 Riemann 边值问题及其在弹性力学中的应用 ······ 11

开口弧段的双周期 Riemann 边值问题 ······ 55

双准周期 Riemann 边值问题 ······ 65

关于双准周期解析函数的 DIRICHLET 问题 ······ 79

THE HILBERT BOUNDARY PROBLEM OF DOUBLY PERIODIC ANALYTIC FUNCTIONS ······ 84

Some Classes of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with a Transformation ······ 95

附录论文 ······ 102

(二)奇异积分和奇异积分方程 ······ 103

沿曲线的积分方程,其解具一阶奇异性 ······ 103

关于 Hilbert 核奇异积分方程 ······ 114

推广的留数定理及其应用 ······ 121

ON SINGULAR INTEGRALS WITH SINGULARITIES OF HIGH FRACTIONAL ORDER AND THEIR APPLICATIONS ······ 128

The Approximation of Cauchy-Type Integrals by Some Kinds of Interpolatory Splines ······ 142

A Class of Quadrature Formulas of Chebyshev Type for Singular Integrals ······ 154

有关高阶奇异积分的 Bertrand-Poincaré 型换序公式 ······ 168

ON METHODS OF SOLUTION FOR SOME KINDS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH CONVOLUTION ······ 173

带复平移的奇异积分方程组 ······ 185

CONVOLUTION EQUATIONS WITH REFLECTION AND TRANSLATION SHIFT ······ 192

Peano Derivatives and Singular Integrals of Arbitrary Order ······ 197

附录论文 ······ 205

(三)在弹性和断裂力学中的应用 …… 206
关于不同弹性材料的平面焊接问题 …… 206
关于循环对称弹性平面中的数学问题 …… 222
关于周期应力平面弹性基本问题 …… 234
不同材料拼接平面裂纹中的数学问题 …… 245
平面弹性第二基本问题的新提法 …… 254
双周期平面弹性理论中的复 Airy 函数 …… 262
THE MATHEMATICAL PROBLEMS OF COMPOUND MATERIALS WITH CRACKS IN PLANE ELASTICITY …… 272
具裂纹的复合材料拼接半平面的第二基本问题 …… 284
A CLASS OF MIXED-TYPE FUNDAMENTAL PROBLEMS ON ELASTIC HALF-PLANE …… 294
PLANE ELASTIC PROBLEMS OF DIFFERENT MEDIA WITH CRACKS ON THE INTERFACE …… 302
A GENERAL METHOD FOR SOLVING PLANE CRACK PROBLEMS …… 311
附录论文 …… 323

(一)解析函数边值问题

复合边值问题

摘　要

本文解决了把 Riemann 边值问题和 Hilbert 边值问题结合在一起的所谓复合边值问题. 对一个未知函数以及多个未知函数的情况都作了讨论. 所用方法是“消去法”，即先消去 Riemann 边值问题中的跳跃，于是就把问题化为 Hilbert 边值问题.

在[1]中，我们曾简要地介绍了所谓复合边值问题，并叙述了用消去法求解的过程. 本文将较详细地论述这方面的一些结果. 我们仍沿用[2]中的记号，而把 Riemann 问题和 Hilbert问题分别简称为 R 问题和 H 问题，复合边值问题则简称为 RH 问题.

§1　单连域的 RH 问题

设一封闭的 Ляпунов 曲线 L（即其切线倾角作为弧长的函数时，该函数满足 Hölder 条件）围成一域 D，而在 D 内又有一组互相外离的封闭光滑 Jordan 曲线 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$，并记 $\Gamma=\Gamma_1+\cdots+\Gamma_n$；取 L 的逆时针方向作为正向，Γ_j 的顺时针方向作为正向；记 Γ_j 所围内域为 D_j^-，而 L 与诸 Γ_j 间所围域为 D_0^+.

D 上的 RH 问题（复合边值问题）可表述为：求 D 上分片全纯函数 $\Phi(z)$（即在 D 上除 Γ 上各点外处处正则，且分侧连续到 Γ 上），使它在 Γ 附近，满足边值条件：

$$\Phi^+(\tau)=G(\tau)\,\Phi^-(\tau)+g(\tau),\quad \tau\in\Gamma,\tag{1.1}$$

其中 $G(\tau),g(\tau)$ 已给在 Γ 上，适合 Hölder 条件，且 $G(\tau)\neq 0$；同时又要求 $\Phi(z)$ 从 D 的内部连续到 L 上，且满足边值条件：

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}\Phi(t)]=c(t),\quad t\in L,\tag{1.2}$$

其中 $\lambda(t),c(t)$ 已给在 L 上，也适合 Hölder 条件，且 $\lambda(t)\neq 0$（$c(t)$ 当然是实函数）. 记

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_j}G(\tau)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(\tau)]_{\Gamma_j}=\kappa_j,\quad \mathrm{Ind}_{\Gamma}G(\tau)=\kappa=\sum_{j=1}^{n}\kappa_j,\quad \mathrm{Ind}_L\lambda(t)=k.$$

称 $K=\kappa+k$ 为所提出的 RH 问题的指标.

在每一 D_j^- 中任意取定一点 z_j，并记

$$\Pi(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{\kappa_j}.$$

先求 D 上分片全纯且连续到 L 上的函数 $\Phi_1(z)$，使它满足条件(1.1)，而条件(1.2) 暂置不顾. 这问题(称作原问题的相应 R 问题) 的一般解是

$$\Phi_1(z)=X(z)[\Psi(z)+F(z)], \tag{1.3}$$

其中 $X(z)$ 为问题的典则函数：

$$X(z)=\begin{cases}X^+(z)=\Pi(z)^{-1}e^{\Gamma^+(z)}, & \text{当 } z\in D_j^+,\\ X^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}, & \text{当 } z\in \bigcup_j D_j^-,\end{cases}$$

这里 $\Gamma(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\log G(\tau)\,\Pi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ (对数可任意取定一支)；$\Psi(z)$ 可取为

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z},$$

而 $F(z)$ 为在 D 上全纯、在 $\overline{D}$ 上连续的任意函数. 由于原RH 问题只考虑 $\overline{D}$ 上的问题，故与这相应的R 问题一定可解，且出现了上述任意函数 $F(z)$ 用以代替通常全平面上 R 问题的多项式.

注意当 $g(\tau)=0$ 时 $X(z)$ 本身也是问题(1.1) 的解：

$$X^+(\tau)=G(\tau)X^-(\tau),\quad \tau\in\Gamma. \tag{1.4}$$

用下式把所求未知函数 $\Phi(z)$ 变换为另一个未知函数 $\Phi_0(z)$，使满足

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+X(z)\Phi_0(z), \tag{1.5}$$

则显然 $\Phi_0(z)$ 仍在 D 上分片全纯，且连续到 L 上. 此外，当 $\tau\in\Gamma$ 时，注意 $\Phi_1(z)$ 满足(1.1)，并由(1.4) 式，得知

$$\begin{aligned}\Phi^+(\tau)&=\Phi_1^+(\tau)+X^+(\tau)\Phi_0^+(\tau)\\&=G(\tau)\Phi_1^-(\tau)+g(\tau)+G(\tau)X^-(\tau)\Phi_0^+(\tau)\\&=G(\tau)[\Phi_1^-(\tau)+X^-(\tau)\Phi_0^+(\tau)]+g(\tau).\end{aligned}$$

如果 $\Phi(z)$ 是所求解，则它也应满足(1.1)，即

$$\Phi^+(\tau)=G(\tau)\Phi^-(\tau)+g(\tau)=G(\tau)[\Phi_1^-(\tau)+X^-(\tau)\Phi_0^-(\tau)]+g(\tau).$$

比较这两式，并注意 $X^-(\tau)\neq 0$，立刻知道

$$\Phi_0^+(\tau)=\Phi_0^-(\tau),\quad \tau\in\Gamma,$$

从而 $\Phi_0(z)$ 在 D 上全纯、在 $\overline{D}$ 上连续.

反之，若 $\Phi_0(z)$ 在 D 上全纯、在 $\overline{D}$ 上连续，则也容易证明由(1.5) 所确定的分片全纯函数 $\Phi(z)$ 必满足(1.1)，且连续到 L 上.

由此可见，提出的RH 问题就转化为求在 D 上全纯、在 $\overline{D}$ 上连续的函数 $\Phi_0(z)$，使它满足由(1.2) 转化的相应条件. 将(1.5) 代入(1.2)，便立刻得到这个条件：

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}X(t)\Phi_0(t)]=c^*(t),\quad t\in L, \tag{1.6}$$

其中

$$c^*(t)=c(t)-\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}\Phi_1(t)]. \tag{1.7}$$

这样，原问题便化为了 D 上的 H 问题(1.6)，而消去了条件(1.1) 以及诸 Γ_j. 这也就是

我们称这种方法为消去法的理由.

至于(1.3)中任意函数 $F(z)$ 的选法关系不大. 因为，如果 $F(z)$ 加上一函数 $f(z)$ 时，$\Phi_1(z)$ 就增加一项 $X(z)f(z)$，而由(1.5)，只要在所求函数 $\Phi_0(z)$ 中减去 $f(z)$，就能使 $\Phi(z)$ 不变；这等于在(1.6)式左右两边各减去一项 $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}Xf)$，因而 $\Phi_0(z)$ 也没有改变. 所以，在(1.3)中不妨取 $F(z)\equiv 0$.

对于 $\Phi_0(z)$ 所满足的 H 问题(1.6)，其指标为

$$\mathrm{Ind}_L[\lambda(t)\,\overline{X(t)}] = \kappa - \mathrm{Ind}_L X(t). \tag{1.8}$$

注意当 $t\in L$ 时，$X(t) = X^+(t) = \prod_{j=1}^{n}(t-z_j)^{-\kappa_j}e^{\Gamma^+(t)}$，故

$$\mathrm{Ind}_L X(t) = -\kappa + \mathrm{Ind}_L e^{\Gamma^+(t)}. \tag{1.9}$$

因为$\Gamma^+(t)$ 在 L 上单值连续，故

$$\mathrm{Ind}_L e^{\Gamma^+(t)} = \frac{1}{2\pi i}[\log e^{\Gamma^+(t)}]_L = \frac{1}{2\pi i}[\Gamma^+(t)]_L = 0,$$

代入(1.8)和(1.9)，最后得知

$$\mathrm{Ind}_L[\lambda(t)\,\overline{X(t)}] = k + \kappa = K. \tag{1.10}$$

这就是说，转化后的 H 问题的指标就是原来 RH 问题的指标.

于是，运用通常对 H 问题的解的个数或可解性的理论，就完全可以对 RH 问题作类似的讨论：

1) 设 $g\equiv 0$，$c\equiv 0$（齐次问题）. 当 $K\geqslant 0$ 时，原问题有 $2K+1$ 个（对实系数而言）线性无关的解：

$$\Phi(z) = X(z)\sum_{s=1}^{2K+1} c_s\Phi_{0s}(z), \tag{1.11}$$

其中 $\Phi_{0s}(z)$ $(s=1,\cdots,2K+1)$ 为相应齐次 H 问题(1.6)（这时 $c^*\equiv 0$）的完全解系，而 c_s 为任意实常数（注意这时 $\Psi(z)\equiv 0$）.

当 $K<0$ 时，相应 H 问题只有零解 $\Phi_0(z)\equiv 0$，从而原问题也只有零解.

2) 设 $g\equiv 0$，$c\not\equiv 0$. 由于这时可以取 $\Phi_1(z)\equiv 0$，故 $\Phi(z) = X(z)\Phi_0(z)$，而 $\Phi_0(z)$ 为 D 上非齐次 H 问题

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}X(t)\Phi_0(t)] = c(t),\quad t\in L$$

的解.

这里，当 $K\geqslant 0$ 时，问题必有解；设 $\Phi_{00}(z)$ 为一特解，则原问题的一般解为

$$\Phi(z) = X(z)[\Phi_{00}(z) + \sum_{s=1}^{2K+1} c_s\Phi_{0s}(z)]. \tag{1.12}$$

当 $K<0$ 时，如果 $c(t)$ 满足 $-2K-1$ 个条件，则问题有且才有解，且解唯一.

3) 设 $g\not\equiv 0$，于是 $\Phi_1(z)\not\equiv 0$. 注意在 L 上，$c^*(t)$ 仍满足 Hölder 条件，故为经典的 H 问题. 这时又可分为两种情况：

① 如果 $c^*(t)\not\equiv 0$ 即 $c(t)\not\equiv \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}\Phi_1(t)]$，则与前述情况 2) 相同. 当 $K\geqslant 0$ 时，一般解(1.12)右边还要添加一项 $\Phi_1(z)$；当 $K<0$ 时，当且仅当 c,λ,G,g 间满足 $-2K-1$ 个条件时才有唯一解.

② 如果 $c^*(t)\equiv 0$ 即 $c(t)\equiv \mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}\Phi_1(t)]$，则问题仍转化为齐次 H 问题. 当 $K\geqslant 0$ 时，

问题一般解与(1.11)相同，但右端要添加一项 $\Phi_1(z)$；当 $K<0$ 时，H 问题只有零解 $\Phi_0(z)\equiv 0$，故原问题有唯一非零解 $\Phi(z)=\Phi_1(z)$.

我们把这最后一情况称为准齐次 RH 问题，而把 2) 和 3)① 统称为真非齐次问题.

准齐次问题的条件为 $\varepsilon(t)=\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}\Phi_1(t)]$，其中 $\Phi_1(t)=X(t)\Psi(t)$. 如果一开始就把相应 R 问题的特解取作(1.3)，其中 $F(z)$ 为在 D 上全纯、在 $\overline{D}$ 上连续的某一函数(且设在 L 上满足 Hölder 条件)，则准齐次 RH 问题就可转化为 $\Phi_0(z)$ 的非齐次 H 问题：

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}X(t)\Phi_0(t)]=-\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}X(t)F(t)].$$

当 $K\geqslant 0$ 时，问题的一般解为

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+X(z)[\Phi_{00}(z)+\sum_{s=1}^{2K+1}c_s\Phi_{0s}(z)],$$

其中 $\Phi_{00}(z)$ 为这个 H 问题的一特解. 当 $K<0$ 时，H 问题至多只可能有一个解，但 $\Phi_0(z)=-F(z)$ 显然是它的解，故 $\Phi(z)=\Phi_1(z)-F(z)=\Phi^*(z)$ 是原问题的唯一非零解. 结果与前相同.

所以，RH 问题是准齐次问题的一般条件是（除 $g\not\equiv 0$ 外）：有满足条件(1.1)的在 D 上分片全纯、连续到 L 上的函数 $\Phi_1(z)$ 存在（以(1.3)表出），使

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}\Phi_1(t)]=c(t),\quad t\in L. \tag{1.13}$$

以上的讨论，可归纳为

定理 1 *对单连域的 RH 问题，当其指标 $K=\kappa+k\geqslant 0$ 时，问题的一般解中含有 $2K+1$ 个任意实常数；当 $K<0$ 时，1) 对齐次问题 ($c\equiv 0$，$g\equiv 0$)，只有零解，2) 对准齐次问题，有唯一非零解，3) 对真非齐次问题，当且仅当问题中各系数满足 $-2K-1$ 个条件时，才有唯一解.*

当 $K<0$ 时，齐次或准齐次问题也可统一说成问题有唯一解（包括零解).

准齐次问题也可看作真非齐次问题的一特例. 当 $K\geqslant 0$ 时，已由定理 1 的前一结论看出；现设 $K<0$，由于准齐次问题有唯一解，故诸系数间也必满足非齐次情况下的 $-2K-1$ 个条件. 或者，也可这样看：我们知道（参看 [2]，§28，§29)，如果设 $p(s)$ 为 $\lambda(s)$ 的正则化因子，而令

$$\mathrm{e}^{-\omega_1(s)}=p(s)|\lambda(s)|,$$

则这 $-2K-1$ 个条件可写为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\omega_1(s)}c^*(s)\mathrm{e}^{-ihs}\mathrm{d}s=0\quad(h=1,\cdots,-2K-1),$$

而在准齐次情况下，可适当选择 $\Phi_1(z)$，使它满足(1.13)，从(1.7)可知，$c^*(s)\equiv 0$，因此这些条件当然满足.

如一开始讨论的是 L 所围外域的问题(Γ_j 也在外域中)，而附带要求 $\Phi(\infty)$ 有界，则显然可得类似于定理 1 的结果. 或者，用反演法，也可变成内域问题来处理. 因而这里不再多述.

在[1]中我们曾经指出，单连域上的 RH 问题也可用 Н. И. Мусхелишвили 的方法（[3]，§42）解决，但这一方法不能应用于下一节中所述的多连域情形.

§2 多连域的 RH 问题

今设 D 为由一组封闭 Ляпунов 曲线 $L_0,L_1,\cdots,L_m$ 所围的多连域，而 L_0 围住其余各曲线

(L_0 也可不存在)，并记 $L=\sum_{p=0}^{m} L_p$[①]. 在 D 内仍有一组曲线 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$，情况如前所述，但注意，某些 Γ_j 可能围住某些 L_p. 仍取 L_0 的逆时针方向为正向，而其余各曲线均取顺时针方向为正向.

这时，D 上的 RH 问题为：求在 D 上分片全纯、连续到 L 上的函数 $\Phi(z)$，使它仍满足条件(1.1)和(1.2)，已给诸系数假设条件如前. 如没有 L_0，则还要求 $\Phi(\infty)$ 有界.

κ 和 k 定义如前，但这里

$$k=\sum_{p=0}^{m} k_p,\quad k_p=\mathrm{Ind}_{L_p}\lambda(t),$$

仍称 $K=\kappa+k$ 为 RH 问题的指标.

问题的解法仍与单连域时一样. 在 Γ_j 的内部任取 z_j，当 Γ_j 围住某些 L_p 时，z_j 取在 L_p 之内、外或其上均可. 先求得满足问题的 R 部分的解 (1.3)，也不妨取 $F(z)\equiv 0$，再通过 (1.5)，把未知函数化为 $\Phi_0(z)$，而归结为解 D 上的 H 问题(1.6). 这一问题的指标是

$$\mathrm{Ind}_L[\lambda(t)\overline{X(t)}]=\mathrm{Ind}_L\lambda(t)-\mathrm{Ind}_L X(t)=k-\sum_{p=0}^{m}\mathrm{Ind}_{L_p}X(t).$$

对于 L_0，

$$\mathrm{Ind}_{L_0}X(t)=\mathrm{Ind}_{L_0}X^+(t)=-\kappa,$$

仍如前. 对于 $L_p(p\geqslant 1)$，如没有任何 Γ_j 围住它，则有

$$\mathrm{Ind}_{L_p}X(t)=\mathrm{Ind}_{L_p}X^+(t)=\mathrm{Ind}_{L_p}[\Pi(t)\mathrm{e}^{\Gamma^+(t)}]=0,$$

因为所有 z_j 在 L_p 之外，故 $\mathrm{Ind}_{L_p}\Pi(t)=0$，又已见 $\mathrm{Ind}_{L_p}\mathrm{e}^{\Gamma^+(t)}=0$. 如 L_p 被某一 Γ_j 围住，则

$$\mathrm{Ind}_{L_p}X(t)=\mathrm{Ind}_{L_p}X^-(t)=\mathrm{Ind}_{L_p}\mathrm{e}^{\Gamma^-(t)}=0.$$

所以，不论如何，转化后的 H 问题的指标仍为 $K=\kappa+k$.

这样，运用多连域上 H 问题的已知结果，立刻可得：

定理 2 对 $m+1$ 连域上的 RH 问题，当其指标 $K>m-1$ 时，问题恒可解，且一般解中含有 $2K-m+1$ 个独立常数；当指标 $K<0$ 时，齐次问题只有零解，准齐次问题有唯一(非零)解，而真非齐次问题当且仅当已给系数满足 $-2K+m-1$ 个条件时有唯一解.

这里所谓准齐次问题，仍指满足条件(1.13).

对于奇异情况 $0\leqslant K\leqslant m-1$，则可有类似于 Ф. Д. Гахов [4] 和 Б. В. Боярский [5] 的结果，这里从略.

§ 3 开口弧段上的 RH 问题

设 D 如前（单连或多连），而设 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$ 为一些开口的光滑 Jordan 弧段：$\Gamma_j=\widehat{a_jb_j}$ $(j=1,\cdots,n)$，并取自 a_j 至 b_j 的方向作为 Γ_j 的正向[②]. 这时 RH 问题提法仍如前，(1.1) 和 (1.2) 中诸系数的条件也同前，但在各 Γ_j 的端点附近，可分别要求 $\Phi(z)$有界或无界可积.

---

① 当 L_0 不存在时，p 自 1 加起，下同.

② 若某些 Γ_j 为封闭的，某些为开口的，可同样地讨论.

在某些端点附近，将会看到，只能要求$\Phi(z)$几乎有界（即对于任何$\varepsilon>0$，$|z-c|^{\varepsilon}\Phi(z)\to 0$，当$z\to c$时），它们称作RH问题的特异端点．下面将要证明，它们就是相应的R问题(1.1)的特异端点$c_{r+1},\cdots,c_{2n}$（意义见[2]，§42等）．在其余非特异端点处，例如，可要求$\Phi(z)$在$c_1,\cdots,c_q$附近有界，而在$c_{q+1},\cdots,c_r$附近，要求$\Phi(z)$至少无界可积．采用[3]中记号，把这种解$\Phi(z)$记作属于$h(c_1,\cdots,c_q)$类.

这时前述消去法仍有效．说明如下.

在各Γ_j上取$\log G(\tau)$的一确定支，使

$$\alpha_j=\operatorname{Re}\gamma_j=\operatorname{Re}\left(-\frac{\log G(a_j)}{2\pi\mathrm{i}}\right)$$

满足条件

$$\begin{cases}0\leqslant\alpha_j<1, & \text{当 } a_j\in\{c_1,\cdots,c_q,c_{r+1},\cdots,c_{2n}\},\\ -1<\alpha_j<0, & \text{当 } a_j\in\{c_{q+1},\cdots,c_r\};\end{cases}$$

当$a_j\in\{c_{r+1},\cdots,c_{2n}\}$时，当然$\alpha_j=0$．又设

$$\alpha_j'=\operatorname{Re}\gamma_j'=\operatorname{Re}\frac{\log G(b_j)}{2\pi\mathrm{i}},$$

并选取整数κ_j，使得

$$\begin{cases}0\leqslant\alpha_j'-\kappa_j<1, & \text{当 } b_j\in\{c_1,\cdots,c_q,c_{r+1},\cdots,c_{2n}\},\\ -1<\alpha_j'-\kappa_j<0, & \text{当 } b_j\in\{c_{q+1},\cdots,c_r\};\end{cases}$$

当$b_j\in\{c_{r+1},\cdots,c_{2n}\}$时，当然$\alpha_j'-\kappa_j=0$，于是

$$\kappa=\sum_{j=1}^{n}\kappa_j$$

为相应的R问题属于$h(c_1,\cdots,c_q)$类的指标．仍记$k=\operatorname{Ind}_L\lambda(t)$，则仍称$K=\kappa+k$为RH问题属于$h(c_1,\cdots,c_q)$类的指标.

相应R问题的典则函数为

$$X(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-b_j)^{-\kappa_j}\mathrm{e}^{\Gamma(z)},\tag{3.1}$$

其中

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\log G(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau.\tag{3.2}$$

先解D上相应的R问题，求出其一特解（任意函数$F(z)$不妨取作$\equiv 0$）：

$$\Phi_1(z)=\frac{X(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-z}.\tag{3.3}$$

利用消去法换元，令

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+X(z)\Phi_0(z),\tag{3.4}$$

其中$\Phi_0(z)$为新的未知函数.

和§1中一样，易证在各Γ_j弧上的内点τ处，$\Phi_0^{+}(\tau)=\Phi_0^{-}(\tau)$，故$\Phi(z)$在$D$上单值解析，只是各端点$a_j,b_j$处可能除外．我们来研究$\Phi_0(z)$在各端点附近的性质.

首先回顾一下$X(z)$的性质．由(3.2)知，

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\gamma_j\log(z-a_j)+\Gamma_j(z), & \text{当 } z \text{ 在 } a_j \text{ 附近},\\ \gamma_j'\log(z-b_j)+\Gamma_j'(z), & \text{当 } z \text{ 在 } b_j \text{ 附近},\end{cases}$$

其中 $\Gamma_j(z),\Gamma_j'(z)$ 分别在 a_j,b_j 附近有界[①]. 因之,

$$e^{\Gamma(z)}=\begin{cases}(z-a_j)^{\gamma_j}e^{\Gamma_j(z)}, & \text{当 } z \text{ 在 } a_j \text{ 附近},\\ (z-b_j)^{\gamma_j'}e^{\Gamma_j'(z)}, & \text{当 } z \text{ 在 } b_j \text{ 附近}.\end{cases}$$

于是知道,

$$X(z)=\begin{cases}(z-a_j)^{\gamma_j}e^{\Gamma_j^*(z)}, & \text{当 } z \text{ 在 } a_j \text{ 附近},\\ (z-b_j)^{\gamma_j'-\kappa_j}e^{\Gamma_j^{*\prime}(z)}, & \text{当 } z \text{ 在 } b_j \text{ 附近};\end{cases}$$

或者写作，在任何端点 $z=c$ 附近有:

$$X(z)=(z-c)^{\gamma_c}e^{\Gamma_c(z)}, \tag{3.5}$$

其中 $\Gamma_c(z)$ 在 c 附近有界，而

当 $c\in\{c_1,\cdots,c_q,c_{r+1},\cdots,c_{2n}\}$ 时，$0\leqslant \operatorname{Re}\gamma_c<1$,

当 $c\in\{c_{q+1},\cdots,c_r\}$ 时，$-1<\operatorname{Re}\gamma_c<0$,

且当 c 为特异端点时，$\operatorname{Re}\gamma_c=0$.

根据 Cauchy 型积分的熟知性质，由(3.2)知，R 问题的特解 $\Phi_1(z)$ 已属于 $h(c_1,\cdots,c_q)$ 类. 根据对未知函数 $\Phi(z)$ 的要求可知，$X(z)\Phi_0(z)$ 必须在各端点 $c_1,\cdots,c_q$ 附近有界，在其余端点附近至少无界可积.

设 c 为一特异端点. 为了保证 $\Phi(z)$ 在 c 附近至少无界可积，$X(z)\Phi_0(z)$ 必须也如此. 但因这时 $\operatorname{Re}\gamma_c=0$，故在 $z=c$ 附近，$X(z)$ 有界，且 $\neq 0$，而 $\Phi_0(z)$ 既以 c 点为孤立奇点，又要 $X(z)\Phi_0(z)$ 可积，故 $\Phi_0(z)$ 必须以 c 为常点，因此 $X(z)\Phi_0(z)$ 在 c 附近有界，从而 $\Phi(z)$ 在 c 附近几乎有界. 由此得知，在特异端点附近，$\Phi(z)$ 一定几乎有界.

若 $c\in\{c_1,\cdots,c_q\}$，则因 $0<\operatorname{Re}\gamma_c<1$，为了保证 $X(z)\Phi_0(z)$ 在 c 附近有界，$\Phi_0(z)$ 也必以 c 为常点. 若 $c\in\{c_{q+1},\cdots,c_r\}$，同样因为 $-1<\operatorname{Re}\gamma_c<0$，为了保证 $X(z)\Phi_0(z)$ 在 c 附近至少无界可积，c 也只可能是 $\Phi_0(z)$ 的常点.

总之，无论 c 为 Γ_j 的哪一端点，它都是 $\Phi_0(z)$ 的常点，因而 $\Phi_0(z)$ 在 D 上全纯. 又因为 $\Phi_1(z),X(z)$ 均连续到 L 上，且在 L 附近 $X(z)\neq 0$，故 $\Phi_0(z)$ 亦必连续到 L 上. 至于 $\Phi_0(z)$ 这时所应满足的条件，仍同(1.6). 于是问题仍化为 $\Phi_0(z)$ 的 H 问题. 且由(3.1)，立刻得知,

$$\operatorname{Ind}_L X(t)=-\sum_{j=1}^{n}\kappa_j=-\kappa,$$

故这个 H 问题的指标仍为

$$\operatorname{Ind}_L[\lambda(t)\overline{X(t)}]=k+\kappa=K.$$

因此，其余讨论均与 § 1 或 § 2 相同.

对于间断系数的情况，显然也可类似地讨论，现从略.

§ 4 多个未知函数的 RH 问题

记号 L, Γ 与 § 1 相同. 设所求 $\Phi(z)$ 为 D 上分片全纯、连续到 L 上的 N 维向量，要求

① 对数这样理解：沿 Γ_j 并延伸到 ∞ 点将平面割开，然后任取一支.

满足(1.1)和(1.2)，而$G(\tau)$ ($\tau \in \Gamma$)，$\lambda(t)$ ($t \in L$) 均为已知N阶满秩矩阵，$g(\tau)$,$c(t)$为已知N维向量，并设它们都满足Hölder条件. 这样，我们便得到N个函数或N维向量的RH问题.

这一问题仍可用§1中所述消去法求解. 设

$$\operatorname{Ind}_\Gamma \det G(\tau) = \kappa, \quad \operatorname{Ind}_\Gamma \det \lambda(t) = k,$$

称$K=\kappa+k$为上述RH问题的总指标.

求解时，先作出相应R问题(1.1)的典则矩阵（意义及一般作法见[6]），再作出这个R问题的一特解：

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} X(z) \int_\Gamma \frac{[X^+(\tau)]^{-1} g(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

然后按(1.5)把未知向量$\Phi(z)$改为$\Phi_0(z)$. 注意，在现在的情况下，(1.5)以下的推演仍成立，最后仍得$\Phi_0^+(\tau) = \Phi_0^-(\tau)$，即$\Phi_0(z)$为在$D$上全纯、在$\overline{D}$上连续的$N$维向量. 于是，问题又化为H问题(1.6)了.

这一H问题的总指标可以证明恰为K（按照H. П. Векуа的定义，总指标则为$2K$，见[7]，第179页）. 为此，我们首先证明：

$$\operatorname{Ind}_L \det X(t) = -\kappa. \tag{4.1}$$

大家已经熟知(参见[7],第41页)

$$\operatorname{Ind}_\Gamma \det X^+(\tau) = \operatorname{Ind}_\Gamma \det G(\tau) = \kappa,$$

但在Γ与L之间，典则函数$\det X(z) \doteq \det X^+(z)$全纯，且无零点，故

$$\operatorname{Ind}_L \det X(t) = \operatorname{Ind}_L \det X^+(t) = -\operatorname{Ind}_\Gamma \det X^+(\tau),$$

最后出现之负号是由于L以逆时针方向为正向，而Γ以顺时针方向为正向. 于是(4.1)成立. 由此，我们立刻得到转化后相应H问题的总指标为

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}_L \det[\lambda(t)\overline{X(t)}] &= \operatorname{Ind}_L[\det \lambda(t) \det \overline{X(t)}] \\ &= \operatorname{Ind}_L \det \lambda(t) + \operatorname{Ind}_L \overline{\det X(t)} \\ &= k + \kappa = K.\end{aligned}$$

如果能够有效地算出$X(z)$，则这个H问题的系数也就可知，于是原RH问题就能化为一个已知的、确定的H问题，而可进一步求解（见[7],第三章,I). 例如，当$G(\tau)$可写成两个因子的乘积，且它们又分别是Γ内部和Γ外部的半纯矩阵的边值时，便是如此(参看[6]，§5).

对于Γ为开口弧段或有间断系数的情况，利用H. П. Векуа的结果（[7],第二章）和上述§3中的方法，可类似地求解，不再详谈.

最后注意，如在[1]中曾指出的，本文所用的消去法可广泛应用于解决某一R问题与其他类型边值问题的复合，也可用来较简便地重新处理开口弧段或间断系数的R问题，以及复杂边界的R问题等.

消去法在另一些边值问题中的应用，将另行讨论.

参考文献

1 路见可. 解析函数边值问题中的一些想法. 武汉大学学术报告选编（自然科学版），1962，(1)：1~8

2 Гахов Ф Д. Краевые Задачи，Москва，1958

3 Мусхелишвили Н И. Сингулярные интегральные уравнения, М. -Л., 1946

4 Гахов Ф Д, Хасабов Э Г. О краевой задаче гильберта для многосвязной области. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Москва, 1960: 340～345

5 Боярский Б В. Об особых случаях задачи Римана-Гильберта. 载于 И. Н. Векуа: Обобщенные Аналитические Функции (Москва, 1959) 一书 гл. 4 后面（或见中译本：广义解析函数，上册最后）

6 Гахов Ф Д. Краевая задача римана для системы и пар функций. Успехи Мат. Наук, 1952, 8 (50): 3～54

7 Векуа Н П. Системы сингулярных интегральных уравнений, М. -Л., 1950（已有中译本）

ON COMPOUND BOUNDARY PROBLEMS

Abstract

In this paper, the so-called Riemann-Hilbert compound problem, or briefly, RH problem, is considered and solved. Let D be a (simply connected or multiply connected) Liapunoff region with boundary L, and Γ be a finite set of non-intersecting and mutually exclusive smooth contours in D. By Γ^+ we mean the clockwise sense of transversal along Γ, and by L^+, the sense of transversal which preserves the region D at its left-hand. The problem here considered may be formulated as follows:

Find a sectionally holomorphic function $\Phi(z)$ in D (i. e., regular everywhere in D except on Γ, but continuous to Γ on both sides of it, and also continuous to L), such that conditions (1. 1) and (1. 2) are satisfied, where $G(\tau), g(\tau)$ are given on Γ, $G(\tau)\neq 0$; $\lambda(t), c(t)$ are given on L, $\lambda(t)\neq 0$; and all of them satisfy Hölder conditions.

This problem is solved by the method of elimination: first, solve the "Riemann part" (1. 1) of the problem and take a particular solution $\Phi_1(z)$, and then, by changing the unknown function $\Phi(z)$ to $\Phi_0(z)$, holomorphic in D, by means of (1. 5), where $X(z)$ is the characteristic function of the problem (1. 1), the problem is reduced to a Hilbert problem (1. 6). The index K of the reduced problem, called the index of the RH problem, is easily proved to be the sum of the index κ of $G(\tau)$ with respect to Γ and the index k of $\lambda(t)$ with respect to L. Thus, the solubility or the number of solutions of the RH problem can be readily analyzed.

The case in which Γ consists of open arcs is also considered, and the solutions of the RH problem may also be classified into classes h, just as the Riemann problem. It is found that the special ends of the latter serve also as the special ends of the former, the solution of which must be almost bounded near them. The index relation is just the same as before.

If $G(\tau), \lambda(t)$ are regarded as non-degenerate matrices of order N, and if $g(\tau), c(t)$, $\Phi(z)$ are N-dimensional vectors, we have the vector RH problem. This problem is solved similarly and the index relation still holds, but in this case the indices must be understood as total indices.

［原载于武汉大学学报（自然科学版），1962，5：15～24；转载于高等学校自然科学学报（数学、力学、天文学版），试刊，1964，(1)：1～11；又译成英文转载：Chien-ke Lu. On compound boundary problems. Scientia Sinica，1965，14(11)：1545～1555.］

周期 Riemann 边值问题及其在弹性力学中的应用

绪言

周期 Riemann 边值问题的更一般形式是自守函数的边值问题. 关于有限群的自守函数 Riemann 边值问题，最初在 1954 年被 Ф. Л. Гахов 和 Л. И. Чибрикова 所研究[1]. 而无限群的研究，为后者在 1956 年所研究[2]（或参看[3]中和 [4]，§ 52 中的简单介绍)，最后并有更一般的研究[5]。从实用观点看来，周期边值问题将更为重要. 在[2]中虽也曾指出了这一问题的重要性，并给出了一些在流体力学上的应用，但在单周期情况下，周期解在无穷远处(即自守函数的本性奇点)的性态没有讨论，而在双周期情况下，却没有这样的问题.

本文第一章将研究单周期的 Riemann 边值问题，特别是对解在无穷远处作各种补充的要求而讨论. 这里用的是保角变换的方法，这一方法曾被 Г. Н. Савин 类似地用来解决弹性平面中的基本周期问题（参看[6]或[12]).

本文第二章将研究单周期 Riemann 边值问题在弹性平面问题中的应用. 虽一般地这类问题可化为积分方程来处理（见[6])，但具体求解时很困难. 运用 Н. И. Мусхелишвили 的方法（见[7]，第六章）到这里来，就能把他的许多结果改换到单周期问题上来，并同样地可获得许多重要特例的解的有限形式.

双周期弹性平面的基本问题也可化为积分方程，见 W. T. Koiter [11]. 利用双周期 Riemann 边值问题的结果也可获得一系列有效的结果，但不在本文讨论之列. 因此，本文以后所称“周期”都是指单周期而言.

第一章 周期 Riemann 边值问题

§ 1 封闭曲线情况

1. 问题的提法 设 L_k ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$) 为无穷个封闭的光滑曲线，它们彼此形状