# 气动设计的速度图方法

陈佐一 著

国防工业出版社

# 气动设计的速度图方法

陈佐一 著

国防工業出版社

## 内 容 简 介

本书介绍了气动设计速度图法的基本原理和应用，着重介绍了其在跨音流领域的应用，如跨音透平与压气机叶栅、跨音喷管等。对其它需要进行精确气动设计，特别是型线设计的领域，气动设计的速度图法也具有普遍的应用价值。本书共分十章。为便于读者阅读和理解，前两章介绍了速度图法的基本原理，第三～十章介绍了速度图方法的具体应用。

本书可供从事叶轮机械、航空工程和其它气体动力工程研究和设计的人员参考，也可作有关专业的教师、研究生和大学生的参考用书。


气动设计的速度图方法

陈佐一 著

国防工业出版社出版、发行

（北京市车公庄西路老虎庙七号）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/32 印张$9^5/_8$ 211千字

1990年9月第一版 1990年9月第一次印刷 印数：0,001—1,500册

ISBN 7-118-00073-6/V6 定价：4.90元

# 前　言

速度图法是流体力学的一种研究方法。由于流体动力学方程通过物理面到速度面的转换，使原来的非线性方程转换为线性方程，从而带来了求解问题的简化。著名科学家冯·卡门和钱学森创立的卡门-钱压强系数公式，就是利用对气体动力学方程的速度面转换再加上切线气体近似而得出的。如果说速度图法在应用的早期只是着眼于使方程简化，那么现在由于现代工程技术发展的需要，其在气体动力学及与此有关的工程技术应用方面，却有了更为广泛和重要的意义。

首先，是近代跨音速流动研究的发展。不论是机翼绕流、叶轮机械流动，还是喷管流动，跨音速流均具有极为重要的地位。由于跨音速流动的混合型性质，使得求解该问题具有很大的复杂性。目前虽然已经发展了各种求解跨音速问题的方法，如时间推进法、跨音松弛法等，但从严格求解的观点来看，速度图法才是跨音流动精确解的唯一方法。当然，它也还有许多问题有待解决。正如文献〔1〕所指出的："速度图法是给定流动条件下严格求解跨音速问题的唯一方法。从科学的观点看，特别是从纯数学的观点看，还有不少问题需要解决；从工程应用的观点看，有些问题已经可以解决，并已经积累了不少经验。"

另一方面，速度图法在处理气体动力学的反问题（即设计问题）时，具有显著的优点，因为速度图法通过速度面与物理面之间的相互转换，可以直接解得在物理面上的各种物

理特性的坐标线，如流线、等速线、特征线，等等。这就给设计问题带来极大的方便。同时，由于现代技术发展的需要和计算机技术的应用，各种优化的气动设计问题愈益受到重视。从这方面来说，速度图法将是一种很有前途的设计方法。

相对于反问题而言，用速度图法求解正问题还有较大的困难，因此本书主要是介绍将速度图法应用于反问题的研究，故将书名定为《气动设计的速度图方法》。

速度图法从察布雷金转换公式的提出至今已有五十余年的历史，在其发展过程中，除了卡门-钱公式的杰出例子外，特别应当提出的是特里柯米的贡献。特里柯米应用速度图法首先提出了简化的速度面混合型方程，亦称为特里柯米方程。并从数学上严格地论证了解的存在性和唯一性问题[2]。在将速度面混合型方程实际应用于跨音速喷管设计方面，杰曼、托摩梯卡和塔迈台等人，应用将各种近似压缩性函数来取代真实压缩性函数的方法，得到了速度面混合型方程的各种近似解[3]。C. Ferrari and F. G. Tricomi 所著的《Transonic Aerodynamics》，则是系统地总结了用速度图法研究跨音速机翼和平面跨音速喷管的成果。

七十年代以来，由于叶轮机械跨音流动研究的发展，用速度图法设计跨音速叶栅亦日益得到重视，这里特别应当指出的是豪勃逊和卡拉迪马斯的工作[4,5]，他们在应用速度图法设计跨音速透平叶栅方面取得了一定成果。

本书作者从七十年代末开始从事气动设计的速度图方法研究，其中主要对下述几个方面进行了研究：关于各种速度面混合型方程的近似解析解的分析和应用条件研究；关于用速度图法设计跨音速透平和压气机叶栅；关于应用速度图法设计的快速数值试验方法研究；关于回转面上的速度图法设

计；关于将速度面与物理面的基本转换关系与吴仲华的三元流理论相结合而得到三元流动速度图法的基本方程等，可参看文献〔6～13〕。

本书的内容主要是作者关于气动设计速度图方法研究工作的总结，考虑到读者可能对速度图法的基本原理不很熟悉，故在前面加进了关于速度图法基本原理的内容。

作者衷心希望本书能在推动速度图法在气动设计的应用方面起到一定的作用。

# 目　录

# 第一章 速度面与物理面之间转换的基本关系

速度图法设计的基本思想包括下列三个步骤：

1）将物理面上的流体动力学方程转换到速度面上，得到相应的速度面上的流体动力学方程；

2）根据给定的边界条件（也就是设计条件）在速度面上求解流体动力学方程；

3）将速度面上的求解结果再返回物理面，得到物理面上流动问题的解。

因此，无论从物理面转到速度面，还是速度面返回物理面，都离不开物理面和速度面之间转换的基本关系。已有的转换方法主要有两种，一种是察布雷金转换，一种是蓝金特勒转换。这两种转换中察布雷金转换应用得较多，因此这里重点介绍察布雷金转换，蓝金特勒转换则附带提及。

## 一、察布雷金转换

在平面位流流动中，速度势和流函数可以分别表示为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=u \tag{1-1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=v \tag{1-2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho^*}v \tag{1-3}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho^*}u \tag{1-4}$$

这里，$\phi$ 为速度势；$\psi$ 为流函数；$u$，$v$ 分别表示流速在 $x$，$y$ 坐标上的分量；$\rho$ 为密度；$\rho^*$ 是当量密度，这里采用临界状态下的密度。

为了便于建立速度面与物理面之间的转换关系，我们采用复数表达式。设物理复平面的坐标为 $z=x+iy$；复速度面坐标为 $Ve^{i\theta}=u+iv$，其中 $i$ 等于 $\sqrt{-1}$；$V$ 为复速度的模；$\theta$ 为相位角，实际上 $\theta$ 就是速度 $V$ 与 $x$ 轴的夹角。

这样，复势的微分可以表示为

$$
\begin{aligned}
& d\phi+i\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)d\psi \\
&=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+i\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right] \\
&=udx-vdy+i\,[-vdx+udy] \\
&=(u-iv)(dx+idy)=Ve^{-i\theta}dz \qquad (1\text{-}5)
\end{aligned}
$$

亦即

$$dz=V^{-1}e^{i\theta}\left(d\phi+i\frac{\rho^*}{\rho}d\psi\right) \qquad (1\text{-}6)$$

应用微分关系式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial V}dV+\frac{\partial z}{\partial\theta}d\theta$$

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial V}dV+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta$$

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial V}dV+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta$$

将上述关系代入方程（1-6），得到

$$\frac{\partial z}{\partial V}=V^{-1}e^{i\theta}\left[\frac{\partial\phi}{\partial V}+i\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V}\right] \qquad (1\text{-}7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=V^{-1}e^{i\theta}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+i\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right] \qquad (1\text{-}8)$$

若有一函数$F(x, y)$在定义域内连续、可导，二阶导数存在并连续，则必满足下述条件：

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

因此有

$$\frac{\partial z}{\partial V \partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial \theta \partial V} \tag{1-9}$$

现在将式（1-7)、(1-8）分别对$\theta$和$V$再求导，并代入式（1-9)，则得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} i - \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right) \frac{\partial \psi}{\partial V} = -V^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + iV \left[\frac{d\left(\frac{\rho^*}{\rho V}\right)}{dV}\right] \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{1-10}$$

令式（1-10）中实部和虚部在等式两边分别相等，而得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = V \left[\frac{d\left(\frac{\rho^*}{\rho V}\right)}{dV}\right] \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{1-11}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = V \frac{\rho^*}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial V} \tag{1-12}$$

式（1-11）中的$d\left(\frac{\rho^*}{\rho V}\right)/dV$，可以应用流体动力学的关系式$VdV = -dp/\rho$及$a^2 = dp/d\rho$而求得（其中$p$为流体静压力；$a$为音速)，即

$$\frac{d\left(\frac{\rho^*}{\rho V}\right)}{dV} = -\frac{\rho^*}{\rho V^2}(1 - Ma^2) \tag{1-13}$$

式中$Ma$为马赫数，$Ma = V/a$。

将式（1-13）代入式（1-11)，得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial V}=-\frac{(1-Ma^2)}{V}\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad (1\text{-}14)$$

现将式（1-12）、（1-14）分别再对$V$和$\theta$求导，并应用$\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial V}=\frac{\partial^2\phi}{\partial V\partial\theta}$的关系，消去速度势$\phi$，可得到

$$\frac{-(1-Ma^2)}{V}\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=\frac{\rho^*}{\rho}\left[\frac{\partial\psi}{\partial V}+\frac{\partial\psi}{\partial V}Ma^2+V\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}\right]$$

上式是以$V$和$\theta$为坐标变量的流函数偏微分方程，经过移项并整理，最后可得到速度面上的流函数方程，也称为察布雷金方程，即

$$V(1+Ma^2)\frac{\partial\psi}{\partial V}+V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}+(1-Ma^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0 \qquad (1\text{-}15)$$

应用察布雷金方程进行从物理面到速度面的转换并求解该方程，在速度面上解得$\psi(Ma, V)$后，再利用式（1-6）返回物理面，这个过程可以称为察布雷金转换的速度图方法。

## 二、蓝金特勒转换

察布雷金转换的优点是，由物理面转到速度面时，流函数$\psi$和速度势$\phi$本身都是不变的，这对于理解转换的物理实质是比较有利的，同时在工程实际应用中也比较方便。当然，这样就使得返回物理面比较复杂，要有一套相应的积分方程。而蓝金特勒转换，则是在由物理面到速度面的转换过程中，不再保持原来意义上的速度势，而是在速度面上形成一个新的速度势，称为蓝金特勒位势。

若令$\Phi$为物理面上的速度势，即$\Phi$是物理坐标$x$、$y$的

函数$\Phi(x, y)$，令$\phi$为速度面上的新位势，即蓝金特勒位势，$\phi=\phi(u, v)$，在蓝金特勒转换中，定义蓝金特勒位势$\phi(u, v)$与物理面速度势$\Phi(x, y)$之间的关系为

$$\phi(u, v)=xu+yv-\Phi(x, y) \tag{1-16}$$

再引入一个速度面上的流函数$\omega$，并定义为

$$\omega=x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}-\psi \tag{1-17}$$

这里$\psi$为物理面上的流函数，应用式（1-16）和式（1-17），同样可以得到速度面上的蓝金特勒位势$\phi(V, \theta)$的偏微分方程

$$V^2\frac{\partial^2\phi}{\partial V^2}+V\left(1-\frac{V^2}{a^2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial V}+\left(1-\frac{V^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0 \tag{1-18}$$

同样地，也可以推导得到速度面上流函数$\omega(V, \theta)$的偏微分方程

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}+(Vf)\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{V}{d(Vf)/dV}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial V}\right]=0 \tag{1-19}$$

这里 $f=\rho/\rho^*$

$$\frac{d}{dV}(Vf)=\frac{\rho}{\rho^*}(1-Ma^2)$$

若应用方程（1-18）和（1-19）解得速度面上的位势$\phi$和流函数$\omega$，就可以很方便地返回物理面，即

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}=x+\frac{\partial x}{\partial u}u+\frac{\partial y}{\partial u}v-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=x \tag{1-20}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial v}=y+\frac{\partial y}{\partial v}v+\frac{\partial x}{\partial v}u-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=y \tag{1-21}$$

同样有
$$\frac{\partial \omega}{\partial s}=y \tag{1-22}$$

$$-\frac{\partial \omega}{\partial r}=x \tag{1-23}$$

其中　$s=(\rho/\rho^*)u$，$r=(\rho/\rho^*)v$。

## 三、速度面返回物理面的基本方程

在前面已经提到，速度图法的优点之一是在进行物理面到速度面的转换后，能将物理面上的非线性方程转化为速度面上的线性方程，为求解方程带来很大的便利，同时，又由于用速度作为独立变量，更利于设计问题上的应用。但是，归根到底，我们需要的解是物理面上的解，因此任何速度面上的解，最终都必须返回到物理面，以求得物理面上所需要的真正的解。这个重要步骤是依靠速度面返回物理面的基本方程来完成的。

我们还是从物理面与速度面之间的基本关系式（1-6）入手，即

$$dz=V^{-1}e^{i\theta}\left(d\phi+i\frac{\rho^*}{\rho}d\psi\right)$$

将下述微分式

$$dz=dx+idy$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$d\phi=\frac{\partial \phi}{\partial V}dV+\frac{\partial \phi}{\partial \theta}d\theta$$

$$d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial V}dV+\frac{\partial \psi}{\partial \theta}d\theta$$

代入式（1-6），并令实部和虚部分别相等，则有

$$dx=V^{-1}\left[\cos\theta\left(\frac{\partial \phi}{\partial V}dV+\frac{\partial \phi}{\partial \theta}d\theta\right)-\sin\theta\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial V}dV+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta\right)\Big] \tag{1-24}$$

$$dy=V^{-1}\Big[\sin\theta\left(\frac{\partial\phi}{\partial V}dV+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta\right)+\cos\theta\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial V}dV+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta\right)\Big] \tag{1-25}$$

再利用式（1-12）和（1-14）代入上式而消去式中的速度势 $\phi$ 的偏导数项即 $\frac{\partial\phi}{\partial V}$ 与 $\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$，则有

$$dx=V^{-1}\Big\{\cos\theta\Big[\frac{-(1-Ma^2)}{V}\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}dV+$$
$$+V\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V}d\theta\Big]-\frac{\rho^*}{\rho}\sin\theta\Big[\frac{\partial\psi}{\partial V}dV+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta\Big]\Big\} \tag{1-26}$$

$$dy=V^{-1}\Big\{\sin\theta\Big[\frac{-(1-Ma^2)}{V}\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}dV+$$
$$+V\frac{\rho^*}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V}d\theta\Big]+\frac{\rho^*}{\rho}\cos\theta\Big[\frac{\partial\psi}{\partial V}dV+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta\Big]\Big\} \tag{1-27}$$

式（1-26）和式（1-27）是由速度面返回物理面的最基本的关系式，如果得到了速度面上的流函数 $\psi(V,\ \theta)$，则可以应用它得到物理面上的相应的值。

实际上，在求解流场问题，特别是设计问题上，主要是能得到物理面上各种有特定意义的物理线，例如等速线、流线、特征线等等，而在这些特定的物理线上，$\theta$ 与 $V$ 之间存在着确定的关系，通过这些确定的关系，就可以在式(1-26)、(1-27) 中消去 $d\theta$ 与 $dV$ 中的任一个微分变量，而使返回物理面的方程（1-26)、(1-27) 中只剩下一个独立微分变量 $dV$ 或者 $d\theta$，因而很容易将它积分而得到物理面上所要的各种物

理线。

现在来分别推导流线、等速线和特征线方程。

**1. 流线方程**

由速度面返回物理面求流线，是气动设计速度图法中极重要的部分。因为在理想流体定常流动中，型线就是流线，所以设计型线也就是求出型线的物理坐标。如机翼的型线、喷管的型线、叶栅的型线等都是物理面上的流线。

因为沿流线流函数ψ是常数，即沿流线有

$$d\psi=0$$

则对于速度面上的$\psi(V,\ \theta)$而言，有

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial V}dV+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta=0$$

即

$$d\theta=\frac{-\dfrac{\partial\psi}{\partial V}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}}dV \tag{1-28}$$

将式（1-28）代入式（1-26）、（1-27）而消去微分变量$d\theta$，则有

$$dx=V^{-1}\left\{\cos\theta\left[\frac{-(1-Ma^2)}{V}\ \frac{\rho^*}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}dV-V\frac{\rho^*}{\rho}\cdot\frac{\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial V}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)}dV\right]\right\} \tag{1-29}$$

$$dy=V^{-1}\left\{\sin\theta\left[\frac{-(1-Ma^2)}{V}\ \frac{\rho^*}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}dV-V\frac{\rho^*}{\rho}\right.\right.$$