实用FFT信号处理技术

侯朝焕　阎世尊　蒋银林　编著

海洋出版社

实用FFT信号处理技术

侯朝焕　阎世尊　蒋银林　编著

海　洋　出　版　社

1990年·北京

内 容 简 介

快速傅里叶变换（ＦＦＴ）技术目前已成为数字信号处理的基本技术，它广泛应用于信号处理的各个领域。本书从实用观点出发，全面系统地介绍了ＦＦＴ信号处理技术的基本概念、原理和方法，重点介绍了一些ＦＦＴ的实用技术和在各个信号处理领域中的实际应用，以及近几年来ＦＦＴ技术的新进展。除此之外，本书还包括实际中常用的算法、计算机程序及各类ＦＦＴ信号分析仪及其性能比较等内容，以供读者查用。

本书对从事信号和信息处理的各个领域，包括通讯、雷达、声呐、语言处理、图象处理、振动分析、故障诊断、生物医学电子学、海洋等有关方面的工程技术人员、高等院校有关专业的师生和研究生是一本实用的参考书。

责任编辑：刘莉蕾

责任校对：俞丽华

实用ＦＦＴ信号处理技术

侯朝焕　阎世尊　蒋银林　编著

*

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街１号）

新华书店北京发行所发行　北京印刷一厂印刷

开本：787×1092 1/16　印张：20　字数：500千字

1990年10月第一版　1990年10月第一次印刷

印数：1—800册

*

ISBN 7-5027-0562-7/TP·13　定价：16元

序　言

随着数字计算机的发展，进入70年代以来，数字信号处理技术得到了迅速的发展，并逐步取代了传统的模拟信号处理技术。进入80年代以来，微处理机和超大规模集成电路的飞跃发展，数字信号处理技术亦得到了更大的发展，并且已经广泛应用于国民经济的各行各业，如雷达、声呐、通信、语言处理、图象处理、地震信号处理、生物医学电子学、数字声频和视频设备、电子测试仪器、噪声控制、振动分析和故障诊断等方面，取得了突出的成就。预计在今后不太长的时期内，数字信号处理技术这一非常活跃的分支，必将取得更大的发展。

快速傅里叶变换（FFT）技术是数字信号处理中的核心技术，它已广泛应用于数字信号处理的各个领域。自从库利-图基FFT算法出现以来，各种不同型式的FFT算法相继出现，应用FFT技术的人越来越多，使用的范围亦越来越广泛，讨论FFT技术的文章亦大批涌现。由于FFT技术在数字信号处理中的重要性，近年来随着超大规模集成电路（VLSI）和计算技术的发展，FFT技术仍然在不断地深入和发展。在近年来的信号处理国际会议上，FFT技术仍然是一个重要的专题。本书从方便于读者应用出发，全面而系统地介绍FFT信号处理技术的概念、基本原理、方法及具体应用。本书除了简述FFT技术的原理和方法外，还着重介绍近年来FFT技术的新进展和实际应用FFT的技术（包括优化的算法和程序），以及FFT技术在信号分析仪和信号与信息处理等各个方面的应用实例。

本书是作者多年来从事数字信号处理研究、FFT技术的应用、FFT信号分析仪的研制等工作的体会和经验总结，无疑它将满足国内目前FFT技术发展的急需，对于在国民经济的各行各业中推广使用FFT技术起到促进作用。祝愿本书将进一步为我国数字信号处理的发展、为我国的四个现代化作出贡献。

汪德昭

1986年5月26日

前 言

众所周知，傅里叶变换一直是信号分析、线性系统、光学、概率论、量子物理和天线系统等许多领域中的一个基本分析方法。但是，对于实际应用中的离散傅里叶变换讲，由于其计算量太大，即使应用现代高速计算机，也很难满足实时分析信号的要求，所以离散傅里叶变换的应用并不十分广泛。随着快速傅里叶变换（简称ＦＦＴ）算法的出现，使科学分析的许多方面发生了完全的改观。目前，ＦＦＴ技术已成了数字信号处理的基础，ＦＦＴ技术在各个领域中的应用已成为数字信号处理的中心。

然而，快速傅里叶变换却经历了一个漫长的发展过程。1965年，Ｊ．Ｗ．库利为了工作上的需要曾设计了一个快速计算傅里叶变换的程序，当他完成任务后，他所设计的程序也就搁置起来并几乎忘掉了。但是人们却纷纷来信要求复制这个程序，并希望库利写一篇这方面的报告，因而库利和Ｊ．Ｗ．图基发表了“机器计算傅里叶级数的一种算法”，从此以后，ＦＦＴ技术才迅速发展起来。实际上，早在1937年就有人提出过一种计算2^n型析因试验中交互作用的算法，但遗憾的是，那些早期为ＦＦＴ技术作出过贡献的科学家至今还不为大家所熟悉。

库利-图基算法出现后，ＦＦＴ技术发展很快，各种不同形式的算法相继涌现，随着电子计算机的普及，应用ＦＦＴ技术的人越来越多，不同类型的ＦＦＴ信号分析仪的使用范围不断扩大，目前它已应用于振动分析、噪声控制、图象处理、故障诊断、雷达和声呐信号处理、地震和语言信号处理、海浪分析、医疗诊断等各个领域，并取得了良好的效果。

目前，国内已出版了不少的专著和教材，均涉及到ＦＦＴ技术，但他们仅在ＦＦＴ方法方面讨论较多，而未能提供实用的技术。根据我们多年来从事数字信号的研究，ＦＦＴ技术的应用以及ＦＦＴ信号分析仪的研制等工作体会，我们深感需要有一本向广大读者介绍ＦＦＴ实用技术的专著，这本专著一方面系统地介绍ＦＦＴ方法，同时又能全面的提供给读者大量的实用技术，以便于读者将ＦＦＴ技术方便地用于实际工作。因此，本书就是以读者能系统而全面的掌握和应用ＦＦＴ技术为出发点的。

为了满足国内ＦＦＴ技术发展的需要，我们全面的介绍了实用ＦＦＴ信号处理技术。全书共分八章。第一章概述了连续傅里叶变换，第二章讨论了离散傅里叶变换，这两章主要简述ＦＦＴ技术的基本原理和方法。由于数字信号处理中的特殊性，为了解决泄漏问题，必须采用加窗处理，所以，在第三章中，我们介绍了各种窗函数以及他们的性能比较，读者可以从中挑选性能指标高而运算又简便的一些窗函数，以满足需要。在第四章中，我们详细介绍了ＦＦＴ的几种典型算法，读者掌握了它们，就不难理解其他各式各样的算法。随着微处理机的迅速发展，不少读者希望建立基于小型机和微计算机的信号分析系统，这种系统的特点是成本低，使用灵活方便，但是，要建立这种系统，其关键是要具有优化的ＦＦＴ程序。为此，在第五章中，我们讨论了新近发展起来的基于素因数分解的各种离散傅里叶变换。在这一章里，我们分别介绍了温纳格雷德算法和素因数分解的傅里叶变换算法，并对各种算法进行了比较，其中特别介绍了适合于8位微计算机上使用的ＦＦＴ算法。现代的数字信号处理技术，无不以ＦＦＴ算法为基础，因而第六章介绍了以ＦＦＴ算法为基础的数字信号处理，其中，我们讨论了如何用ＦＦＴ方法实现数字信号处理中的褶积、相关、自功率谱、互功率谱、

传递函数、相干函数等，最后还讨论了读者广泛使用的频率细化的ＦＦT技术的几种实现方法。在第七章中，我们重点介绍ＦＦＴ信号分析仪，分别剖析了高、中、低各档次的信号分析仪及其特点，为广大读者设计自己的ＦＦＴ信号分析系统作参考。第八章的内容是ＦＦＴ技术在各行各业中应用实例。读者不难从这些大量的实例中了解到自己所需用的实用技术和方法。在各章的末尾，我们还详尽的列出了大量的参考文献，供读者进一步研究使用。

由于我们的水平有限，难免有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

中国科学院声学所单荣华同志对本书部分章节的编写和图表编制给予了大力协助，在此谨致谢意。

作　者

1987年于北京

目 录

第一章　连续傅里叶变换

连续傅里叶变换有时又简称为傅里叶变换，常用CFT表示。它和我们经常碰到的对数变换相类似，也是一种变换技巧。所不同的是，对数变换是把单一的一个 x 值变换成单一的一个 $\log(x)$ 值，而傅里叶变换却要考虑 $-\infty$ 到 $+\infty$ 区间内定义的函数，即就是把一个自变量定义于 $-\infty$ 到 $+\infty$ 区间的函数，变换成也定义于 $-\infty$ 到 $+\infty$ 区间的另一变量的函数。这种变换在科学研究的许多领域中，对于被研究问题的简化是十分有用的。

第一节　傅里叶变换的基本定义

一个波形的傅里叶变换，其实质是把这个波形分解成许多不同频率的正弦波之和。如果被分解的波形为 $h(t)$，那么，傅里叶变换在数学上可表示成

$$H(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

式中 t 表示时间，f 表示频率。$H(f)$ 称为 $h(t)$ 的傅里叶变换，又把 $H(f)$ 叫做时间函数的频谱。

(1.1) 式是对时间域和频率域而讲的，它可以看作是时间函数 $h(t)$ 在频率域上的表示，显然，频率域上所包含的信息与时间域上所包含的信息应是完全相同的，唯一的差别是表示的形式不同而已。

通常，$H(f)$ 是频率 f 的一个复函数，即

$$H(f)=R(f)+jI(f) \tag{1.2}$$

我们把 $|H(f)|$ 称为振幅谱，$R(f)$ 和 $I(f)$ 分别为实部和虚部，因此，$|H(f)|=\sqrt{R^2(f)+I^2(f)}$。$\theta(f)=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{I(f)}{R(f)}$ 叫做相位函数。

第二节　傅里叶逆变换

傅里叶逆变换的定义为

$$h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f \tag{1.3}$$

(1.3) 式表明，如果已知一个时间函数的傅里叶变换，那么就能够确定该时间函数。(1.1) 式和 (1.3) 式叫做傅里叶变换对。为了简化，下面用 $h(t)\Leftrightarrow H(f)$ 的记号来表示。

但是，这里必须指出，傅里叶变换对的存在是有条件的。

条件1：如果时间函数 $h(t)$ 在下式意义上是可积的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\mathrm{d}t<\infty \tag{1.4}$$

则 $h(t)$的傅里叶变换$H(f)$存在，并满足逆变换的（1.3）式。

条件1只是傅里叶变换存在的充分条件，但不是必要条件。因为有一些函数，如$\sin af/af$并不满足条件1，但却有一个满足逆变换公式（1.3）的变换。

条件2：如果时间函数$h(t)=\beta(t)\sin(2\pi ft+\alpha)$，$f$、$\alpha$是任意常数，$\beta(t)$是单调下降函数。那么，对于充分大的正数$\lambda$，当$|t|>\lambda$时，函数$h(t)/t$在（1.4）式的意义下是绝对可积的，则$h(t)$的傅里叶变换$H(f)$存在并满足逆变换（1.3）式。

条件3：如果时间函数$h(t)$是一个周期函数或脉冲函数，那么，只有引入广义函数的概念才能讨论其傅里叶变换。关于广义函数的讨论请参阅有关参考书。但是，由于脉冲函数或称δ函数是一种十分重要的数学工具，它能极大地简化许多变换问题的推导，因此，讨论δ函数的傅里叶变换是很有必要的。

δ函数的定义为

$$\delta(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}\mathrm{d}f \tag{1.5}$$

具体地讲，δ函数是一个脉冲宽度无限小，振幅无限大，面积积分为1的脉冲波形。它的基本性质如下：

1）取值性质

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0 & t\neq\tau\\ \infty & t=\tau\end{cases} \tag{1.6}$$

2）筛选性质

$$\int_a^b f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}0 & [a,b]\text{不包含}t\\ f(t) & [a,b]\text{包含}t\end{cases} \tag{1.7a}$$

特例：当$f(\tau)=1$时，则

$$\int_a^b \delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}0 & [a,b]\text{不包含}t\\ 1 & [a,b]\text{包含}t\end{cases} \tag{1.7b}$$

3）尺度变化性质

$$\delta[a(t-\tau)]=\frac{1}{|a|}\delta(t-\tau) \tag{1.8a}$$

特例：

$$\delta(t-\tau)=\delta(\tau-t) \tag{1.8b}$$

4）δ函数与普通函数的乘积

$$f(t)\delta(t-\tau)=f(\tau)\delta(t-\tau) \tag{1.9}$$

5）褶积性质

两个δ函数的褶积是

$$\delta_1(t-\tau_1)*\delta_2(t-\tau_2)=\delta[t-(\tau_1+\tau_2)] \tag{1.10}$$

在（1.10）式中，$*$表示两个δ函数作褶积。

6）谱性质

$$\left.\begin{aligned}&\delta(t)\Leftrightarrow 1\\ &\delta(t-\tau)\Leftrightarrow e^{-j2\pi f\tau}\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

由（1.11）式可以看出，δ函数的谱是遍布整个频域的，而且，当在时间轴上产生一个位移τ时，那么在频域将产生一个相移$e^{-j2\pi f\tau}$。

7） δ 函数所构成的系列，其谱仍是一个 δ 函数序列，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta t) \Leftrightarrow f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-nf_s) \tag{1.12}$$

在（1.12）式中，$f_s=\frac{1}{\Delta t}$。

下面我们对性质 7 略加证明。做 δ 函数序列的傅里叶变换，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta t)\right] e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n\frac{1}{\Delta t}t}\right] e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t\left(\frac{n}{\Delta t}-f\right)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{\Delta t}\right)=f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)$$

用来定义 δ 函数的另一种重要的函数形式是

$$\delta(t)=\lim_{a\to\infty}\frac{\sin at}{\pi t} \tag{1.13}$$

利用（1.13）式可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f=\delta(t) \tag{1.14}$$

（1.14）式在估算具体的傅里叶变换时是很重要的。

值得注意的是，傅里叶变换虽然是科学研究领域中普遍适用的方法，但至今还没有一个严格统一的定义，例如，当 $\omega=2\pi f$时，我们得到下面的定义，即

$$\left.\begin{aligned} H(\omega)&=\alpha_1\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\\ h(t)&=\alpha_2\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

系数α_1和α_2的取值，可根据使用者的要求而异，例如，有人令$\alpha_1=1$，$\alpha_2=\frac{1}{2\pi}$；有人令$\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$；还有人令$\alpha_1=\frac{1}{2\pi}$，$\alpha_2=1$。但不管按什么要求取$\alpha_1$和$\alpha_2$的值，则必须满足$\alpha_1\times\alpha_2=\frac{1}{2\pi}$。如果我们不对 ω 积分而对 f 积分，那么就不会出现比例系数，所以，本书采用了（1.1）式和（1.3）式所定义的傅里叶变换对的形式。

傅里叶变换的应用领域是很广泛的，例如：线性系统的输出的傅里叶变换是系统传输函数与输入信号傅里叶变换的乘积；一个随机过程的功率谱密度是该过程自相关函数的傅里叶

变换；随机变量的特征函数是其概率密度函数的傅里叶变换；一个天线的方向图是其发射电流图的傅里叶变换；在光学系统中，一个会聚透镜前焦面和后焦面上的振幅分布，彼此存在着傅里叶变换的关系；在量子物理学和边值问题中，也常用到傅里叶变换。因此，尽管傅里叶变换的应用范围不同，但却通过共同使用的傅里叶变换方法把它们联系在一起，由此给人们提供了以熟悉的工具去分析一个生疏领域的可能性，这就是傅里叶变换应用的普遍性。

为了尽快地理解傅里叶变换，我们先简单地回顾傅里叶变换的基本性质。

第三节　傅里叶变换的基本性质

一、线性

如果函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换分别为 $X(f)$ 和 $Y(f)$，那么，$[x(t)+y(t)]$ 的傅里叶变换为 $X(f)+Y(f)$，即

若 $x(t)\Leftrightarrow X(f)$，$y(t)\Leftrightarrow Y(f)$，

则 $$[x(t)+y(t)]\Leftrightarrow X(f)+Y(f) \tag{1.16}$$

(1.16) 式表明，傅里叶变换完全适用于线性系统的分析，例如

$$x(t)=K，\text{则 } X(f)=K\delta(f)$$

$$y(t)=A\cos(2\pi f_0 t),\text{则 } Y(f)=\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$

那么

$$\begin{aligned}x(t)+y(t)&=K+A\cos(2\pi f_0 t)\\&\Leftrightarrow K\delta(f)+\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)\end{aligned}$$

二、对称性

如果 $x(t)$ 与 $X(f)$ 互成傅里叶变换对，则有

$$X(t)\Leftrightarrow x(-f) \tag{1.17}$$

为了建立（1.17）式所表示的傅里叶变换对，根据傅里叶变换的定义，我们有

$$\begin{aligned}x(-t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{j2\pi f(-t)}\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}f\end{aligned}$$

把变量 f 和 t 互换，则得

$$x(-f)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)e^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

即

$$X(t)\Leftrightarrow x(-f)$$

三、时间比例关系

如果$x(t)$与$X(f)$互成傅里叶变换对，则$x(Kt)$的傅里叶变换为$\frac{1}{|K|}X(f/K)$，其中K是大于零的实常数。

我们令$t'=Kt$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(Kt)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi f\frac{t'}{K}}\mathrm{d}\frac{t'}{K}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi t'(\frac{f}{K})}\mathrm{d}t'/K$$

$$= \frac{1}{K}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi t'(\frac{f}{K})}\mathrm{d}t'$$

$$= \frac{1}{K}X(f/K)$$

当K为负值时，积分限互换后右边的项要改变符号，所以，时间比例的改变导致傅里叶变换对变成

$$x(Kt) \Leftrightarrow \frac{1}{|K|}X(f/K) \tag{1.18}$$

(1.18)式表明，时间尺度的扩展相应于频率尺度的缩小。但要注意，在频率尺度缩小时，频率域里的垂直幅度增大，以保证曲线下的面积不变。

四、频率比例关系

如果$X(f)$的傅里叶逆变换为$x(t)$，则$X(Kf)$的傅里叶逆变换为

$$\frac{1}{|K|}x\left(\frac{t}{K}\right) \Leftrightarrow X(Kf) \tag{1.19}$$

其中K是实常数。

(1.19)式的证明与性质3相同，这里不加重述。但是，该公式表明，频率尺度的改变导致时间尺度的缩小，当频率尺度扩展时，同样引起时间函数的幅度增大，以保证曲线下的面积不变。

五、时间位移

若函数$x(t)$的自变量t有一个时间位移t_0，则有

$$x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0} \tag{1.20}$$

我们令$s=t-t_0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi f(s+t_0)}\mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi fs}\times e^{-j2\pi ft_0}\mathrm{d}s$$

$$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-j2\pi f s} \mathrm{d}s$$

$$= e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

所以，

$$x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

(1.20)式表明，时间位移只引起相角改变，而傅里叶变换的幅值并不改变，因为

$$X(f) e^{-j2\pi f t_0} = X(f)[\cos(2\pi f t_0) - j\sin(2\pi f t_0)]$$

$$|X(f) e^{-j2\pi f t_0}| = \sqrt{X^2(f) \times [\cos^2(2\pi f t_0) + \sin^2(2\pi f t_0)]}$$

$$= \sqrt{X^2(f)}$$

六、频率位移

如果 $X(f)$ 的自变量 f 移动一个常量 f_0，则其傅里叶逆变换要乘以 $e^{j2\pi f_0 t}$，即

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f-f_0) \tag{1.21}$$

我们令 $s = f - f_0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f-f_0) e^{j2\pi f t} \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{j2\pi(s+f_0)t} \mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{j2\pi f s} \times e^{j2\pi f_0 t} \mathrm{d}s$$

$$= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{j2\pi t s} \mathrm{d}s$$

$$= e^{j2\pi f_0 t} x(t)$$

所以，

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \Leftrightarrow X(f-f_0)$$

如果频率函数 $X(f)$ 是实函数，那么频率左、右移位后的叠加再折半导致时间函数 $x(t)$ 与一个余弦函数相乘，该余弦函数的频率就等于频率位移量 f_0，这个过程又叫调制，即

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[X(f-f_0) + X(f+f_0)] \tag{1.22}$$

由于 $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$，所以，

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) = x(t) \times \frac{1}{2}[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2}[x(t) e^{j2\pi f_0 t} + x(t) e^{-j2\pi f_0 t}]$$

根据（1.21）式，则有

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f-f_0)$$

$$x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f+f_0)$$

因此

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t)=x(t)\times\frac{1}{2}[e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}]$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}[X(f-f_0)+X(f+f_0)]$$

七、奇偶函数的傅里叶变换

1．奇函数的傅里叶变换

如果函数 $x(t)$ 为奇函数，根据奇函数的定义，则有 $x_0(t)=-x_0(-t)$，$x_0(t)$ 表示函数 $x(t)$ 为奇函数。当 $x_0(t)$ 是实函数时，则其傅里叶变换是一个虚的奇函数，即

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_0(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}x_0(t)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t$$

$$-j\int_{-\infty}^{+\infty}x_0(t)\sin(2\pi ft)\mathrm{d}t$$

由于 $\cos(2\pi ft)$ 是一个偶函数，它与奇函数 $x_0(t)$ 相乘后的积分为零，所以

$$X(f)=-j\int_{-\infty}^{+\infty}x_0(t)\sin(2\pi ft)\mathrm{d}t=jI_0(f) \tag{1.23}$$

(1.23) 式表明，由于 $\sin(2\pi ft)$ 是一个奇函数，所以 $x_0(t)\sin(2\pi ft)=-x_0(t)\sin[2\pi(-f)t]$，且 $X_0(f)=-X_0(-f)$，这就是说 $X_0(f)$ 是一个奇函数。反之，如果 $X(f)$ 是虚的奇函数，也可以证明它的傅里叶逆变换是一个实的奇函数，即

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f=j\int_{-\infty}^{+\infty}I_0(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$=j\int_{-\infty}^{+\infty}I_0(f)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}f-j\int_{-\infty}^{+\infty}I_0(f)\sin(2\pi ft)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}I_0(f)\sin(2\pi ft)\mathrm{d}f=x_0(t)$$

2．偶函数的傅里叶变换

如果函数 $x(t)$ 是一个实的偶函数，且用 $x_e(t)$ 表示，那么 $x_e(t)=x_e(-t)$。这时，$x_e(t)$ 的傅里叶变换是一个实的偶函数，即

$$x_e(t)\Leftrightarrow R_e(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_e(t)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t \tag{1.24}$$

根据傅里叶变换的定义，我们有

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_e(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x_e(t)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t-j\int_{-\infty}^{\infty}x_e(t)\sin(2\pi ft)\mathrm{d}t$$

由于 $\sin(2\pi ft)$ 是一个奇函数，它与偶函数 $x_e(t)$ 相乘后的积分为零，所以，

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_e(t)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t$$

又因 $\cos(2\pi ft)$ 是一个偶函数，故有

$$x_e(t)\cos(2\pi ft)=x_e(t)\cos[2\pi(-f)t],$$

即 $$X_e(f)=X_e(-f)$$

即就是说，频率函数也为偶函数。同样，如果$X(f)$为实的偶函数，那么它的傅里叶逆变换为实的偶函数，即

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}X_e(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f=\int_{-\infty}^{+\infty}R_e(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_e(f)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}f+j\int_{-\infty}^{+\infty}R_e(f)\sin(2\pi ft)\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_e(f)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}f=x_e(t)\end{aligned}$$

总之，一个实的偶时间函数，它的傅里叶变换是一个实的偶频率函数；同样，一个实的偶频率函数，它的傅里叶逆变换是一个实的偶时间函数。

八、复时间函数的傅里叶变换

假若函数$x(t)$是一个复时间函数，即

$$x(t)=x_r(t)+jx_i(t) \tag{1.25}$$

那么，该函数的傅里叶积分为

$$\begin{aligned}X(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}[x_r(t)+jx_i(t)]e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[x_r(t)\cos(2\pi ft)+x_i(t)\sin(2\pi ft)]\mathrm{d}t\\&\quad-j\int_{-\infty}^{+\infty}[x_r(t)\sin(2\pi ft)-x_i(t)\cos(2\pi ft)]\mathrm{d}t\\&=R(f)+jI(f)\end{aligned} \tag{1.26}$$

在（1.26）式中

$$\left.\begin{aligned}R(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}[x_r(t)\cos(2\pi ft)+x_i(t)\sin(2\pi ft)]\mathrm{d}t\\I(f)&=-\int_{-\infty}^{+\infty}[x_r(t)\sin(2\pi ft)-x_i(t)\cos(2\pi ft)]\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

同理，复的频率函数的傅里叶逆变换为

$$\left.\begin{aligned}x_r(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}[R(f)\cos(2\pi ft)-I(f)\sin(2\pi ft)]\mathrm{d}f\\x_i(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}[R(f)\sin(2\pi ft)+I(f)\cos(2\pi ft)]\mathrm{d}f\end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

如果$x(t)$是一个实函数，即$x(t)=x_r(t)$，那么

$$\left.\begin{aligned}R_e(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x_r(t)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t\\I_0(f)&=-\int_{-\infty}^{+\infty}x_r(t)\sin(2\pi ft)\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

由于 $R_e(f)=R_e(-f)$，所以，$R_e(f)$是一个偶函数。又因$I_0(-f)=-I_0(f)$，所以，$I_0(f)$ 是一个奇函数。

如果$x(t)$是一个纯虚数，即$x(t)=jx_i(t)$，那么

$$\left.\begin{aligned} R_0(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t)\sin(2\pi ft)\mathrm{d}t \\ I_e(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t)\cos(2\pi ft)\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

此时，$R_0(f)$是一个奇函数，$I_e(f)$是一个偶函数。

综上所述，我们把复函数的傅里叶变换归纳如下：

时域⇔频域

实函数⇔实部为偶函数，虚部为奇函数

虚函数⇔实部为奇函数，虚部为偶函数

实部为偶，虚部为奇⇔实函数

实部为奇，虚部为偶⇔虚函数

实的偶函数⇔实的偶函数

实的奇函数⇔虚的奇函数

虚的偶函数⇔虚的偶函数

虚的奇函数⇔实的奇函数

偶函数⇔偶函数

奇函数⇔奇函数

九、傅里叶逆变换的另一种形式

傅里叶逆变换还可以写成下面的形式，即

$$x(t)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(f)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}f\right]^* \tag{1.31}$$

式中上角*表示共轭。如果$X(f)=R(f)+jI(f)$，那么，$X^*(f)=R(f)-jI(f)$。因此，只要完成共轭运算，就能证明（1.31）式是成立的，即

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(f)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}f\right]^* \\
&=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}R(f)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}f-j\int_{-\infty}^{+\infty}I(f)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}f\right]^* \\
&=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}[R(f)\cos(2\pi ft)-I(f)\sin(2\pi ft)]\mathrm{d}f\right. \\
&\qquad\left.-j\int_{-\infty}^{+\infty}[R(f)\sin(2\pi ft)+jI(f)\cos(2\pi ft)]\mathrm{d}f\right]^* \\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}[R(f)\cos(2\pi ft)-I(f)\sin(2\pi ft)]\mathrm{d}f \\
&\qquad+j\int_{-\infty}^{+\infty}[R(f)\sin(2\pi ft)+jI(f)\cos(2\pi ft)]\mathrm{d}f
\end{aligned}$$