本书为下册．内容为曲线与曲线积分，外代数与外微分学，流形上的微积分等． 本书以现代观点严格处理了微积分的内容，但叙述却是循序渐进的。可供数学专业师生参考。

多 元 函 数

下 册

〔美〕W．弗列明 著

庄亚栋 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.625 字数 135,000

1981年9月第1版 1982年11月第1次印刷

印数 00,001—11,800

书号 13012·0656 定价 0.74 元

目　　录

第六章　曲线与曲线积分

考虑从一维区间 J 到 E^n 的向量值函数 $\mathbf{g}$，其导数 $\mathbf{g}'(t)\neq\mathbf{0}$. 当 t 从左到右通过 J 时，我们会想到，点 $\mathbf{x}=\mathbf{g}(t)$ 通过一条曲线. 我们不把 $\mathbf{g}$ 本身叫作曲线，而把经过适当的参数变换，从 $\mathbf{g}$ 得到的任一向量值函数 $\mathbf{f}$，看作与 $\mathbf{g}$ 表示同一条曲线 γ. 在 6.3 节，我们定义一次微分形式 $\boldsymbol{\omega}$ 的概念. 然后，在 6.4 节定义微分形式 $\boldsymbol{\omega}$ 沿曲线 γ 的线积分. 函数 f 的微分 df 叫作一次恰当微分形式. 将要证明：当且仅当 $\boldsymbol{\omega}$ 是恰当微分形式时 $\boldsymbol{\omega}$ 的线积分只与 γ 的端点有关(定理 6.1).

除了链导法则(4.4 节)以外，读这一章可以不求助于第 4，5 章. 6.1 节重复了第四章里的一些材料.

6.1 导　　数

设 $\mathbf{g}$ 是从集 $J\subset E^1$ 到 E^n 的函数，t 是 J 的内点，则 $\mathbf{g}$ 在 t 的导数是向量

$$(6.1)\qquad \mathbf{g}'(t)=\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}[\mathbf{g}(t+u)-\mathbf{g}(t)],$$

如果这个极限存在的话.

向量值函数的导数与实值函数的导数有许多相同的性质. 如果 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{g}$ 在 t 处都有导数，那么

$$(6.2)\qquad \begin{aligned}(\mathbf{f}+\mathbf{g})'(t)&=\mathbf{f}'(t)+\mathbf{g}'(t),\\ (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t)&=\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}'(t).\end{aligned}$$

这里，$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ 是实值函数，它在 t 处的值是内积 $\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)$.

导数有个几何解释：作为切向量. 让我们设 J 是区间. 当 t

从左到右通过 J 时，点 $\mathbf{g}(t)$ 通过 E^n 内的某条曲线. "曲线"这个词的严格定义在 6.2 节给出.

让我们假设 t_0 是 J 的点，在 t_0 处 $\mathbf{g}'(t_0)\neq\mathbf{0}$. 设

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{g}(t_0),\quad \mathbf{v}_0=\mathbf{g}'(t_0),$$
$$\mathbf{x}=\mathbf{g}(t),\quad \mathbf{y}=\mathbf{x}_0+u\mathbf{v}_0,$$

其中 $t=t_0+u$, 而 $|u|$ 小得使 $t\in J$. 距离 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 与 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|$ 之比可以写成(分子与分母同乘以 $1/|u|$):

$$\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}=\left|\frac{1}{u}[\mathbf{g}(t)-\mathbf{g}(t_0)]-\mathbf{g}'(t_0)\right|$$
$$\times\frac{1}{|(1/u)[\mathbf{g}(t)-\mathbf{g}(t_0)]|}.$$

因此 $$\lim_{u\to0}\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}=0\frac{1}{|\mathbf{g}'(t_0)|}=0.$$

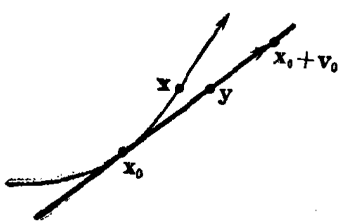

图 6.1

这说明把 $\mathbf{v}_0$ 叫作 $\mathbf{x}_0$ 处的切向量，把通过 $\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_0$ 的直线叫作 $\mathbf{x}_0$ 处的切线是合理的(图 6.1). 注意我们用了 $\mathbf{g}'(t_0)\neq\mathbf{0}$ 这个假设.

数 t 常叫作参数. 它不一定有什么几何意义或物理意义. 不过，如果 $n=3$, 而 t 表示物理问题内的时间，那么 $\mathbf{g}'(t)$ 就是速度向量.

向量值函数 $\mathbf{g}$ 有分量 $g^1,\cdots,g^n$, 它们是实值函数，满足

$$\mathbf{g}(t)=\sum_{i=1}^{n}g^i(t)\mathbf{e}_i,\quad t\in J.$$

如果 $\mathbf{g}'(t)$ 存在，那么，由命题 2.2, (6.1)右边的表达式的第 i 个分量 $u^{-1}[g^i(t+u)-g^i(t)]$ 当 $u\to0$ 时趋于 $g^{i\prime}(t)$, 且

$$\mathbf{g}'(t)=\sum_{i=1}^{n}g^{i\prime}(t)\mathbf{e}_i. \tag{6.3}$$

反之，若对 $i=1,\cdots,n$, $g^{i\prime}(t)$ 存在，则 $\mathbf{g}'(t)$ 存在且由(6.3)给出.

例 1 设 $n=2$, $\mathbf{g}(t)=t^2\mathbf{e}_1+(\log t)\mathbf{e}_2$, 求 $\mathbf{e}_1$ 处的切线. 在这个例子里, $g^1(t)=t^2$, $g^2(t)=\log t$, $t_0=1$, $\mathbf{x}_0=\mathbf{g}(1)=\mathbf{e}_1$. 于是 $\mathbf{g}'(t)=2t\mathbf{e}_1+t^{-1}\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_0=\mathbf{g}'(1)=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$. 切线通过 $\mathbf{e}_1$ 与 $3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$. 它的方程是 $2y=x-1$.

习　　题

1. 求由 $\mathbf{g}(t)=(\cos t)\mathbf{e}_1+(2\sin t)\mathbf{e}_2$, $J=[0, 2\pi]$ 表示的椭圆在 $2^{-1/2}\mathbf{e}_1-2^{1/2}\mathbf{e}_2$ 处的切线. 图示之.
2. 求由
$$\mathbf{g}(t)=t\mathbf{e}_1+t^{1/2}\mathbf{e}_2+t^{1/3}\mathbf{e}_3,\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 2$$
表示的曲线在 $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ 处的切线.
3. 一质点沿抛物线 $y^2=4x$ 以匀速 2 运动, $dy/dt=g^{2\prime}(t)>0$. 求 $\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2$ 处的速度向量 $\mathbf{g}'(t)$. [注: 速率是 $|\mathbf{g}'(t)|$.]
4. 给出公式(6.2)的证明:
   (a) 用实值函数的相应的导数公式及(6.3).
   (b) 直接从定义(6.1).
5. 设 $\mathbf{g}(t)=[3t/(1+t^3)]\mathbf{e}_1+[3t^2/(1+t^3)]\mathbf{e}_2$, $t\neq -1$.
   (a) 画出 $\mathbf{g}(t)$在区间$(-\infty, -1)$及$(-1, \infty)$上通过的曲线.
   (b) 证明$\{\mathbf{g}(t): t\neq -1\}=\{(x, y): x^3+y^3=3xy\}$. 这个集叫笛卡儿叶形线.

6.2 E^n 内的曲线

设 $\mathbf{g}$ 是从区间 $J\subset E^1$ 到 E^n 的函数, 则当"参数" t 通过 J 时, $\mathbf{g}(t)$通过 E^n 内的一条曲线. 最好不要把 $\mathbf{g}$ 本身叫作曲线, 而把经过适当的参数变换, 从 $\mathbf{g}$ 得到的任一向量值函数 $\mathbf{f}$ 看作与 $\mathbf{g}$ 表示同一条曲线. 这样, 我们把曲线定义为等价的参数表示的等价类. 为简单起见, 我们先只考虑切线连续变化的曲线.

现在我们要说得更严格一点. 为简单起见, 设 J 是有界闭区间 $[a, b]$, 分量 $g^1, \cdots, g^n$ 都是 $[a, b]$ 上的 $C^{(1)}$ 类函数. 所谓

$g^{i\prime}(a)$, $g^{i\prime}(b)$, 分别指右导数,左导数. 它们等于 g^i 对包含 $[a, b]$ 的开集的任一 $C^{(1)}$ 类扩张在 a, b 处的导数.

定义 若对每个 $t\in[a, b]$ 有 $\mathbf{g}'(t)\neq 0$, 则称 $\mathbf{g}$ 为 $[a, b]$ 上的 $C^{(1)}$ 类参数表示.

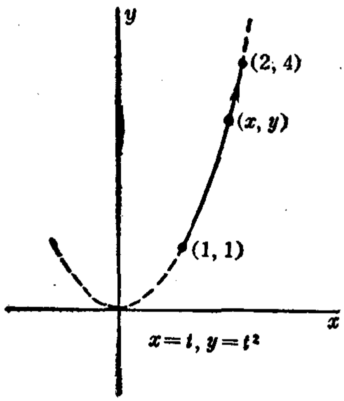

图 6.2

为了引导出我们将要作的等价性定义,先考虑一个例子.

例 1 设 $\mathbf{g}(t)=t\mathbf{e}_1+t^2\mathbf{e}_2$, $1\leqslant t\leqslant 2$, 则 $g^1(t)=t$, $g^2(t)=t^2$, $\mathbf{g}'(t)=\mathbf{e}_1+2t\mathbf{e}_2\neq\mathbf{0}$. 因此 $\mathbf{g}$ 是区间 $[1, 2]$ 上的 $C^{(1)}$ 类参数表示. 实际上, 它表示抛物线 $y=x^2$ 在 $(1, 1)$ 与 $(2, 4)$ 之间的从左到右通过的一段弧(图 6.2). 若设 $\mathbf{f}(\tau)=(\exp\tau)\mathbf{e}_1+(\exp 2\tau)\mathbf{e}_2$, $0\leqslant\tau\leqslant\log 2$, 则 $\mathbf{f}$ 也表示同一段弧. 事实上, $\mathbf{f}$ 是从 $\mathbf{g}$ 经过参数变换 $t=\exp\tau$ 得到的. 这样,把 $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ 看作等价的函数是合理的,我们就是这样做的.

现在,设 $\mathbf{g}$ 是 $[a, b]$ 上的任一 $C^{(1)}$ 类参数表示, ϕ 是某个闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 $C^{(1)}$ 类实值函数, 满足

$$\phi'(\tau)>0(\tau\in[\alpha, \beta]), \phi(\alpha)=a, \phi(\beta)=b. \tag{6.4}$$

设 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbf{g}$ 与 ϕ 的复合: $\mathbf{f}=\mathbf{g}\circ\phi$, 则

$$\mathbf{f}(\tau)=\mathbf{g}[\phi(\tau)],\quad \tau\in[\alpha, \beta].$$

由复合函数定理,

$$f^{i\prime}(\tau)=g^{i\prime}[\phi(\tau)]\phi'(\tau),\quad i=1, \cdots, n.$$

即

$$\mathbf{f}'(\tau)=\mathbf{g}'[\phi(\tau)]\phi'(\tau). \tag{6.5}$$

特别地, $\mathbf{f}'(\tau)\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{f}$ 也是 $C^{(1)}$ 类参数表示. 切向量 $\mathbf{f}'(\tau)$ 与切向量 $\mathbf{g}'[\phi(\tau)]$ 相差一个正的纯量倍 $\phi'(\tau)$. (把纯量右乘与左乘是一

回事：$\mathbf{v}c=c\mathbf{v}$.）

定义 称 $\mathbf{f}$ 等价于 $\mathbf{g}$，若存在满足上述条件的 ϕ，使 $\mathbf{f}=\mathbf{g}\circ\phi$.

等价关系所要求的自反、对称、传递性是成立的（习题6）. 所谓等价类，是指等价于已知的 $C^{(1)}$ 类参数表示的所有 $C^{(1)}$ 类参数表示之集. 读者也许已经在别的地方遇到过等价类的概念. 一个例子是从整数出发定义有理数.

定义 $C^{(1)}$ 类曲线 γ 是 $C^{(1)}$ 类参数表示的等价类.

如果要求分量 $g^1, \cdots, g^n$ 是 $C^{(q)}$ 类的，$q\geqslant 2$，并且只允许 $C^{(q)}$ 类参数变换 ϕ，便能同样地定义 $C^{(q)}$ 类曲线. 在研究曲线的曲率时，需要假设至少是 $C^{(2)}$ 类的[25]. 不过，对这里的目的来说，我们只要 $C^{(1)}$ 类曲线. 从现在起，我们用"曲线"代替"$C^{(1)}$ 类曲线"，"表示"代替"$C^{(1)}$ 类参数表示".

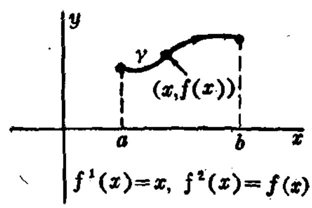

图 6.3

每条曲线有无数种表示. 如果 $\mathbf{g}$ 是其中之一，那么给一个参数变换 ϕ，就会得到另一种表示. 参数选得好常常会带来很大的好处. 在物理问题中，时间（按某种事先确定的标准来度量）也许是人们比较喜欢取的参数. 对于某些曲线，可以把分量 $x^1, \cdots, x^n$ 之一取作参数. 例如，如果切向量 $\mathbf{g}'(t)$ 的第一个分量 $g^{1\prime}(t)$ 处处是正的，则 g^1 有反函数（$A.4$ 节）. 我们可取 g^1 的反函数作为 ϕ. 从形式上来说，这也就是关于 t 解方程 $x^1=g^1(t)$，得到 $t=\phi(x^1)$，然后令 $\tau=x^1$，则 x^1 是新参数，且 $f^1(x^1)=x^1$. 图 6.3 就 $n=2$ 的情形说明这种做法.

我们已经把曲线 γ 理解为动点所通过的道路，而且我们不排除 γ 多次经过同一个点这种可能性. 满足 $\mathbf{g}(t)=\mathbf{x}$ 的点 $t\in[a, b]$ 的个数叫点 $\mathbf{x}$ 的重数. 重数与 γ 的参数表示 $\mathbf{g}$ 的取法无关，因为满足(6.4)的任何函数 ϕ 都是单叶的，即 $\tau_1\neq\tau_2$ 时 $\phi(\tau_1)\neq\phi(\tau_2)$.

γ 的迹是有正重数的点之集，即 γ 至少经过一次的点之集. 如果 $\mathbf{x}$ 的重数是 1, 则叫作简单点. 如果迹的点都是简单点, 则称 γ 为简单弧.

$\mathbf{g}(a)$ 叫 γ 的始点, $\mathbf{g}(b)$ 叫 γ 的终点. 若 $\mathbf{g}(a)=\mathbf{g}(b)$, 则 γ 叫闭曲线. 闭曲线叫作是简单的, 如果除 $\mathbf{g}(a)$ 的重数是 2 以外, 它的迹的其它点都是简单点(图 6.4).

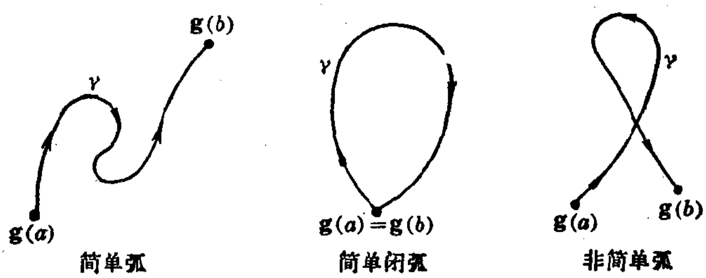

图 6.4

例 2 设 $\mathbf{g}(t)=\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0), 0\leqslant t\leqslant 1$, 则 γ 是连结 $\mathbf{x}_0$ 与 $\mathbf{x}_1$, 从 $\mathbf{x}_0$ 到 $\mathbf{x}_1$ 的线段. 它是简单弧.

例 3 设 $\mathbf{g}(t)=(\cos mt)\mathbf{e}_1+(\sin mt)\mathbf{e}_2,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 其中 m 是非零整数. 迹是单位圆 $x^2+y^2=1$. $\mathbf{g}$ 所表示的闭曲线 γ 绕这个圆通过 $|m|$ 次, $m>0$ 时按逆时针方向, $m<0$ 时按顺时针方向. 若 $m=\pm 1$, 则 γ 是简单闭曲线.

下面我们需要积分的一些性质, 这些性质在 A.3 节里复习. 这一章我们按照微积分的传统采用黎曼积分.

定义 曲线 γ 的长度 l 是

$$l=\int_a^b|\mathbf{g}'(t)|dt. \tag{6.6}$$

若 $\mathbf{f}$ 等价于 $\mathbf{g}$, 则由(6.5)及积分的变量置换定理(A.3 节)有

$$\int_\alpha^\beta |\mathbf{f}'(\tau)|d\tau=\int_\alpha^\beta |\mathbf{g}'[\phi(\tau)]|\phi'(\tau)d\tau=\int_a^b |\mathbf{g}'(t)|dt$$

因此, l 与 γ 的参数表示的取法无关.

公式(6.6)是从考虑内接折线得到启发的. 设$a=t_0<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m=b$, $\mu=\max\{t_1-t_0,\ t_2-t_1,\ \cdots,\ t_m-t_{m-1}\}$. 依次连结$\mathbf{g}(t_{j-1})$与$\mathbf{g}(t_j)$的折线的长度为

$$(*)\qquad \sum_{j=1}^{m}|\mathbf{g}(t_j)-\mathbf{g}(t_{j-1})|.$$

γ的长度l是内接于γ的折线长度的极限. 更严格地,给定$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使$\mu<\delta$时$|(*)-l|<\varepsilon$. 由于我们刚讲过这个事实启发了定义(6.6),所以只要指出证明就行了. 因为导数$\mathbf{g}'$连续,故$\mathbf{g}(t_j)-\mathbf{g}(t_{j-1})$可用$\mathbf{g}'(s_j)(t_j-t_{j-1})$代替,和数(*)可用

$$(**)\qquad \sum_{j=1}^{m}|\mathbf{g}'(s_j)|(t_j-t_{j-1})$$

代替,其误差当$\mu\to0$时趋于0, 这里的s_j可在$[t_{j-1},\ t_j]$内任意选取. 但(**)就是积分(6.6)的黎曼和, $\mu\to0$时趋于l. 证明(*)可用(**)代替而且误差很小时,用到了这样的事实:连续函数$\mathbf{g}'$在紧区间$[a,\ b]$上一致连续(2.5节习题8).

每一条光滑曲线γ有一种与几何的关系特别密切的表示. 它叫作标准表示或以弧长作参数的表示,定义如下. 设在$[a,\ b]$上$\mathbf{g}$表示γ, 且令

$$S(t)=\int_a^t|\mathbf{g}'(u)|du,\ \text{对每个}\ t\in[a,\ b].$$

$S(t)$正是$\mathbf{g}$在$[a,\ t]$上所表示的γ的那部分的长度. 显然, $S(a)=0$, $S(b)=l$. 由微积分基本定理,对每个$t\in[a,\ b]$,

$$S'(t)=|\mathbf{g}'(t)|>0.$$

特别地,若t表示时间,则$S'(t)$是速度向量的长度,即速率.

因为$S'(t)>0$, 方程$s=S(t)$可对t解之. 更严格地说, 在$[0,\ l]$上函数S有$C^{(1)}$类反函数ϕ. 令$\mathbf{G}=\mathbf{g}\circ\phi$, 则$\mathbf{G}$叫作$\gamma$的标准表示. 由(6.5),

$$\mathbf{G}'(s)=\mathbf{g}'[\phi(s)]\phi'(s),\quad \text{对每个 } s\in[0,l]$$

因为
$$\phi'(s)=\frac{1}{S'[\phi(s)]}=\frac{1}{|\mathbf{g}'[\phi(s)]|}$$

故对每个 $s\in[0,l]$ 有

(6.7a)
$$|\mathbf{G}'(s)|=1$$

因此 $\mathbf{G}'(s)$ 是点 $\mathbf{G}(s)$ 处的单位切向量．若把 $G^{i\prime}(s)$ 写作 dx^i/ds，则(6.7a)可写成

(6.7b)
$$\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dx^n}{ds}\right)^2=1.$$

例 3(续)　设 $m>0$，则 $|\mathbf{g}'(t)|=m$, $S(t)=mt$．关于 t 解方程 $s=S(t)$，得标准表示

$$\mathbf{G}(s)=(\cos s)\mathbf{e}_1+(\sin s)\mathbf{e}_2,\ 0\leqslant s\leqslant 2m\pi$$

逐段光滑曲线

把上面的讨论改编一下，就能用于除有限个角点与尖点外是 $C^{(1)}$ 类的曲线．逐段光滑曲线的参数表示是指区间 $[a,b]$ 上的有下列性质的连续函数 $\mathbf{g}$：存在 $t_0, t_1, \cdots, t_p$,

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{p-1}<t_p=b$$

使 $\mathbf{g}$ 对各个闭子区间 $[t_{j-1}, t_j]$ $(j=1,\cdots,p)$ 的限制是 $C^{(1)}$ 类参数表示．特别地，在 $[a,b]$ 内部的各个 t_j 处 $\mathbf{g}$ 有左、右导数，不过它们不一定相等．逐段 $C^{(1)}$ 类的参数变换也是容许的．逐段光滑曲线是逐段 $C^{(1)}$ 类的参数表示的等价类．

例 4　设 $n=2$, $\mathbf{g}(t)=t\mathbf{e}_1+|t-1|\mathbf{e}_2$, $0\leqslant t\leqslant 2$．这是从 $\mathbf{e}_2$ 到 $\mathbf{e}_1$ 到 $2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$（$\mathbf{e}_1$ 是角点）的折线的逐段 $C^{(1)}$ 类表示．设 $\phi(\tau)=\tau^3+1$, $\mathbf{f}(\tau)=\mathbf{g}(\tau^3+1)=(\tau^3+1)\mathbf{e}_1+|\tau^3|\mathbf{e}_2$, $-1\leqslant\tau\leqslant 1$，则 $f^1(\tau)=\tau^3+1$, $f^2(\tau)=|\tau^3|$．由于分量 f^1, f^2 都是 $C^{(1)}$ 类的，这就可能使人以为没有角点．但是，ϕ 并不定义一个可容许的参数变换，因为 $\phi'(0)=0$，违反(6.4)．由于 $\mathbf{f}'(0)=\mathbf{0}$，故 $\mathbf{f}$ 不是 $C^{(1)}$ 类参数表示．这个例子强调了(6.4)内限制 $\phi'(\tau)>0$ 的重要性．

习　题

1. 下列函数哪一个表示简单弧或简单闭曲线? 图示之.

(a) $\mathbf{g}(t)=(a\cos t)\mathbf{e}_1+(b\sin t)\mathbf{e}_2,\ a>0,\ b>0,\ J=[0,\ 2\pi]$.

(b) $J=[-\pi,\ \pi]$, 其它同(a).

(c) $\mathbf{g}(t)=(-\cosh t)\mathbf{e}_1+(\sinh t)\mathbf{e}_2,\ J=[-1,\ 1]$(cosh 与 sinh 的定义见3.5节).

2. (a) 设 γ 由 $\mathbf{f}(x)=x\mathbf{e}_1+f(x)\mathbf{e}_2,\ a\leqslant x\leqslant b$, 表示, 其中 f 是$[a,\ b]$上的 $C^{(1)}$ 类函数. 证明

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx.$$

(b) 在 $f(x)=|x|^{3/2}$, $a=-b$ 时, 求 l.

3. 求 $[0,\ 2\pi]$ 上由 $\mathbf{g}(t)=(\cos t)\mathbf{e}_1+(\sin t)\mathbf{e}_2+t\mathbf{e}_3$ 表示的螺旋线的标准表示. 画出它的迹.

4. 画出$[0,\ 2\pi]$上由 $\mathbf{g}(t)=(\cos t)\mathbf{e}_1+(\sin 2t)\mathbf{e}_2$ 表示的曲线 γ 的迹. 求 γ 在二重点$(0,\ 0)$处的切向量.

5. 设 $0<t\leqslant 1$ 时　$g^1(t)=\cos\dfrac{1}{t}\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)$,　$g^2(t)=\sin\dfrac{1}{t}\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)$, $g^1(0)=g^2(0)=0$.

(a) 证明 g^1, g^2 是 $[0,\ 1]$ 上的 $C^{(1)}$ 类函数. [提示: $u\to\infty$ 时 $u^k\exp(-u)\to 0$.]

(b) $\mathbf{g}=g^1\mathbf{e}_1+g^2\mathbf{e}_2$ 表示 $C^{(1)}$ 类曲线吗? 图示之.

6. 以 $\mathbf{f}\sim\mathbf{g}$ 表示 $\mathbf{f}$ 等价于 $\mathbf{g}$. 证明:

(a) $\mathbf{g}\sim\mathbf{g}$(自反性).

(b) 若 $\mathbf{f}\sim\mathbf{g}$, 则 $\mathbf{g}\sim\mathbf{f}$(对称性).

(c) 若 $\mathbf{g}_1\sim\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_2\sim\mathbf{g}_3$, 则 $\mathbf{g}_1\sim\mathbf{g}_3$ (传递性).

7. 设 γ 是 $C^{(1)}$ 类曲线. 证明: 任一点 $\mathbf{x}$ 的重数都是有限的.

8. 设 γ_0, γ_1 是分别由 $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1$ 表示的 $[a,\ b]$上的曲线. 对每个 $u\in[0,\ 1]$, 设 γ_u 是由 $\mathbf{g}_u(t)=u\mathbf{g}_1(t)+(1-u)\mathbf{g}_0(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, 表示的曲线, $l(u)$是 γ_u 的长度. 证明 l 是$[0,\ 1]$上的凸函数. 何时严格凸?

9. 设 $\mathbf{G}$ 是$C^{(2)}$ 类曲线 γ 的标准表示.

(a) 证明 $\mathbf{G}'(s)\cdot\mathbf{G}''(s)=0$. [提示: 用 $|\mathbf{G}'(s)|^2=1$ 这个事实.]

(b) 设 $\mathbf{g}$ 是 γ 的任一 $C^{(2)}$类参数表示, $S(t)$如本节所定义. 证明 $S''(t)=$

$\mathbf{g}'(t)\cdot\mathbf{g}''(t)/S'(t)$.

(c) 若 $\mathbf{G}''(s)\neq\mathbf{0}$, 则 $\mathbf{G}''(s)$ 叫主法向量, $|\mathbf{G}''(s)|$ 叫 $\mathbf{G}(s)$ 处的绝对曲率. 证明

$$|\mathbf{G}''[S(t)]|=\frac{[|\mathbf{g}'(t)|^2|\mathbf{g}''(t)|^2-(\mathbf{g}'(t)\cdot\mathbf{g}''(t))^2]^{1/2}}{|\mathbf{g}'(t)|^3}$$

6.3 一次微分形式

让我们先对这个概念作一粗略的描述,然后再进一步精确化. 一次微分形式 $\boldsymbol{\omega}$ 被认为是“微分 $dx^1, \cdots, dx^n$ 的线性表示式”:

(6.8) $$\boldsymbol{\omega}=\omega_1 dx^1+\cdots+\omega_n dx^n,$$

其中,系数 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是实函数. 当存在实值可微函数 f, 使 $\omega_i(i=1, \cdots, n)$ 是 f 的第 i 个偏导数 f_i 时, $\boldsymbol{\omega}$ 叫作 f 的微分, 记为 df. 这样,

(6.9) $$df=f_1 dx^1+\cdots+f_n dx^n.$$

给定微分形式 $\boldsymbol{\omega}$, 确定它是否某个函数的微分的问题是重要的. 这一节与 6.4 节的很大一部分内容正是要解决这个问题. 从 $C^{(2)}$ 类函数 f 的混合偏导数 f_{ij} 与 f_{ji} 相等这一事实, 得到一个必要条件 (6.11). 当定义域是单连通的时候, 这个条件也是充分的(8.10 节).

回顾 3.2 节, E^n 的对偶空间 $(E^n)^*$ 的元素叫协向量, 协向量 $\mathbf{a}$ 的分量 a_i 是用带下标的方法写的. 不管我们对符号 $dx^1, \cdots, dx^n$ 所给的精确含义是什么, 函数 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 必需确定微分形式 $\boldsymbol{\omega}$. 对每个 $\mathbf{x}$, 数 $\omega_1(\mathbf{x}), \cdots, \omega_n(\mathbf{x})$ 是某个协向量的分量. 这就启示我们可以把微分形式定义为值是协向量的函数.

精确地说,是:

定义 定义域为 $D\subset E^n$, 取值于 $(E^n)^*$ 的函数 $\boldsymbol{\omega}$ 叫作一次微分形式.

为简短起见, 通常说“一次形式”代替“一次微分形式”. 任意

$r=0, 1, 2, \cdots, n$ 次微分形式在第七章定义.

$\boldsymbol{\omega}$ 在 $\mathbf{x}$ 处的值记为 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$. 它是协向量

$$(6.10) \qquad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})=\omega_1(\mathbf{x})\mathbf{e}^1+\cdots+\omega_n(\mathbf{x})\mathbf{e}^n,$$

与 3.2 节一样,这里的 $\mathbf{e}^1, \cdots, \mathbf{e}^n$ 是标准基向量.

如果存在协向量 $\mathbf{a}$, 使对每个 $\mathbf{x}\in D$ 有 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})=\mathbf{a}$, 则 $\boldsymbol{\omega}$ 叫常值形式. 特别地, 对 $i=1, \cdots, n$, 让我们考虑取值 $\mathbf{e}^i$ 的一次常值形式. 这种一次形式记为 dx^i. 由于 $(E^n)^*$ 是向量空间,有相同定义域 D、取值于 $(E^n)^*$ 的两个函数 $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\zeta}$ 的和 $\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\zeta}$ 已被定义过(2.1 节). 类似地, f 为实值函数, $\boldsymbol{\omega}$ 为有同一定义域 D 的一次形式时,积 $f\boldsymbol{\omega}$ 也已定义过. 特别地, $\omega_i dx^i$ 是在 $\mathbf{x}$ 取值 $\omega_i(\mathbf{x})\mathbf{e}^i$ 的一次形式. 从 (6.10), $\omega_1 dx^1+\cdots+\omega_n dx^n$ 是一次形式, 它在 $\mathbf{x}$ 的值是 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$. 因而公式(6.8)是正确的.

函数的微分

设 D 是开集, f 是以 D 为定义域的实值可微函数. f 在 $\mathbf{x}$ 处的微分是分量为偏导数 $f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x})$ 的协向量 $df(\mathbf{x})$.

定义 f 的微分是一次微分形式 df, 它在 $\mathbf{x}\in D$ 处的值是协向量 $df(\mathbf{x})$。

某些作者把 df 定义为实值函数, 其定义域为笛卡儿积 $D\times E^n$, 在各对$(\mathbf{x}, \mathbf{h})$处的值为数 $df(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}$. 知道了 $df(\mathbf{x})$, 对每个 $\mathbf{h}\in E^n$ 可求得 $df(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}$, 反过来也一样. 因此这个定义与我们这里所给的是等价的.

若 f, g 是有相同定义域 D 的可微函数,则

$$d(f+g)=df+dg, \ d(fg)=fdg+gdf.$$

这两个公式可从 3.3 节习题 7 得到. 类似地, 如果把值为 c 的常值函数仍写作 c, 则

$$dc=\mathbf{0}.$$

这里的 $\mathbf{0}$ 表示"零值形式",它的值处处是 $\mathbf{0}$. 如果 D 连通,则反过

来可从 $df=\mathbf{0}$ 得知 f 是常值函数. 这正是 3.3 节推论 2 的复述.

若 L 是线性函数,则 dL 是常值一次形式. 因为,如果与命题 3.1 一样地设 $L(\mathbf{x})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$, 则 L 的第 i 个偏导数是 a_i, $dL(\mathbf{x})=\mathbf{a}$ 对每个 $\mathbf{x}$ 成立.

特别地,标准笛卡儿坐标函数 $X^1, \cdots, X^n$(3.2 节)是线性的. 事实上, $X^i(\mathbf{x})=\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{x}=x^i$, $dX^i(\mathbf{x})=\mathbf{e}^i$. 因此 dX^i 正是我们已经表示为 dx^i 的常值一次形式. 把 dX^i 写作 dx^i 是大家都这样做的. 这种做法起因于把函数符号与它在某个特殊点 $\mathbf{x}$ 的值的符号混用的习惯, 在这里是把 X^i 与 $x^i=X^i(\mathbf{x})$ 混用. 虽然如此, 我们仍遵从习惯而采用记号 dx^i.

定义 若存在函数 f 使 $\boldsymbol{\omega}=df$, 则称一次形式 $\boldsymbol{\omega}$ 是恰当的.

若 $df=dg$, 则 $d(f-g)=\mathbf{0}$. 若 D 连通,则 $f-g$ 是常值函数. 因此,如果函数 f 的定义域连通,并且它的微分是已知的恰当一次形式 $\boldsymbol{\omega}$, 那么除了相差一个常值函数之外它是确定的.

如果一次形式 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量 ω_i 都是 $C^{(q)}$ 类函数, 则称 $\boldsymbol{\omega}$ 是 $C^{(q)}$ 类的. 若 $\boldsymbol{\omega}=df$, 则 $\omega_i=\partial f/\partial x^i$. 这时, $\boldsymbol{\omega}$ 是 $C^{(q)}$ 类的当且仅当 f 是 $C^{(q+1)}$ 类的.

让我们找一下判断一次形式 $\boldsymbol{\omega}$ 是否恰当的准则. 如果 $\boldsymbol{\omega}$ 是 $C^{(1)}$ 类的,并且 $\boldsymbol{\omega}=df$, 则 f 是 $C^{(2)}$ 类的. 用定理 3.3, 并把偏导数记为 $\partial/\partial x^i$, 则

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}.$$

这样一来,条件

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}=\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i},\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ n, \tag{6.11}$$

对 $\boldsymbol{\omega}$ 的恰当性是必要的.

定义 满足(6.11)的 $C^{(1)}$ 类一次形式 $\boldsymbol{\omega}$ 叫闭一次形式.

在(6.11)内也可以设 $i<j$. 这样,这个定义实际上是说: 如果

$\boldsymbol{\omega}$ 的分量 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 满足这 $n(n-1)/2$ 个条件，它就叫闭微分形式．例如：若 $n=2$，记 dx^1，dx^2 为 dx，dy，且

$$M(x, y)=\omega_1(x, y),\ N(x, y)=\omega_2(x, y),$$

则一次形式的表达式是

$$\boldsymbol{\omega}=M\,dx+N\,dy;$$

$\boldsymbol{\omega}$ 成为闭形式的条件是分量 M，N 满足

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

我们已经知道恰当一次形式是闭的．但反过来不一定，正如下面例 2 所表明的．检查条件(6.11)是否满足是比较容易的，因此当然希望找到某个附加条件，以保证逆命题也成立．这样的一个条件是：区域 D 是单连通的(定义见 8.10 节)．我们在第八章将证明：若 D 是单连通的，则以 D 为定义域的闭一次形式是恰当的．任何凸集是单连通的，特别地，E^n 是单连通的．当 $n=2$ 时，开连通集 D，当且仅当——粗糙地说——D 没有洞时，成为单连通集．

我们已经从符号上细致地区别了函数与它的值．在这种区别被认识到以前，人们几乎不能得到关于微积分的完善知识．尽管如此，在举例时，为了简略起见，我们还是混用记号．例如，对于陈述"$df=f_1\,dx+f_2\,dy$，其中 $f(x, y)=x^2y$，$f_1(x, y)=2xy$，$f_2(x, y)=x^2$；$(x, y)\in E^2$"来说，讲 $d(x^2y)=2xy\,dx+x^2\,dy$ 要简短得多．

例 1 设 $\boldsymbol{\omega}=2xy\,dx+(x^2+2y)dy$，$D=E^2$．当然，这是"$\boldsymbol{\omega}=M\,dx+N\,dy$，其中 $M(x, y)=2xy$，$N(x, y)=x^2+y^2$，$(x, y)\in E^2$"的缩写．在这个例子里，对任何 (x, y)，

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y)=2x=\frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

因此 $\boldsymbol{\omega}$ 是闭一次形式．由于 E^2 单连通，故 $\boldsymbol{\omega}=df$，其中 f 被确定到相差一个常值函数．函数 f 可由关于第一个变量积分而求得：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y)=M(x,\ y)=2xy,\ f(x,\ y)=x^2y+\phi(y),$$

其中的函数ϕ由

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)=N(x,\ y)=x^2+2y,\ x^2+2y=x^2+\phi'(y)$$

确定．当然，这些方程是对所有$(x,\ y)\in E^2$成立的．于是，$\phi'(y)=2y$，$\phi(y)=y^2+c$，其中“积分常数”c是可以任意选取的数．因此，对任何$(x,\ y)\in E^2$，

$$f(x,\ y)=x^2y+y^2+c.$$

例 2 设$D=E^2-\{(0,\ 0)\}$．挖去$(0,\ 0)$后出现一个洞，D不是单连通的．设$\boldsymbol{\omega}=M\,dx+N\,dy$，其中，对$(x,\ y)\in D$，

$$M(x,\ y)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$N(x,\ y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

计算表明：在D内$\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$，故$\boldsymbol{\omega}$闭．让我们证明$\boldsymbol{\omega}$不是恰当的．设$D_1$是$D$除去正$x$轴后得到的$D$的开子集．对每个$(x,\ y)\in D_1$，设$\Theta(x,\ y)$是从正$x$轴到$(x,\ y)$的角，$0<\Theta(x,\ y)<2\pi$（图 6.5）．用初等微积分方法得知：在$D_1$内$d\Theta=\boldsymbol{\omega}$（习题 6(a)）．若存在$D$上的$C^{(2)}$类函数$f$使$\boldsymbol{\omega}=df$，则关于$f$对$D_1$的限制将有$d(f-\Theta)=\mathbf{0}$．因为$D_1$连通，$f-\Theta$在$D_1$上应为常值，故$\Theta$可穿过正$x$轴连续地扩张．这是不可能的，故$\boldsymbol{\omega}$不是恰当形式．

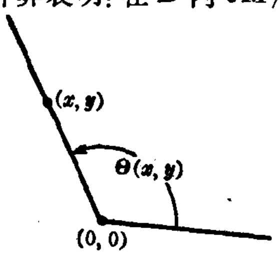

图 6.5

例 3 在某些场合可以从观察得知$\boldsymbol{\omega}$恰当．例如，若$\boldsymbol{\omega}=2x^1dx^1+\cdots+2x^n\,dx^n$，$D=E^n$，则

$$\boldsymbol{\omega}=d[(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2+c]=d(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+c).$$

读者也可以通过观察发现例 1 内的$\boldsymbol{\omega}$是恰当的．