

计 量 与 测 试 的 分 析 方 法

何 国 伟 编 著

国 防 工 业 出 版 社



71.44
285

计量与测试的分析方法

何国伟 编著



国防工业出版社

85.10440

DT23/57

内 容 简 介

本书重点介绍六十及七十年代计量及测试分析方法的成果。其中包括：在一定置信度下评估计测设备的精密度及准确度的方法；计测设备的统计校准及信号杂音比；间接计测的一般最小二乘法（GLS）、最大似然估计法（ML）、最大验后概率法（MAP）、……等等。

本书可供科研及工业部门从事试验、计测、结果分析的技术人员及大学教师参考，亦可作为理工科大学或研究生的教材或参考书。

计量与测试的分析方法

何国伟· 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₃₂ 印张11³/₄ 257千字

1985年3月第一版 1985年3月第一次印刷 印数：0,001—7,850册

统一书号：15034·2675 定价：2.00元

0110162

前 言

本书的编写目的是给科研及工业部门的技术人员有系统、有重点地介绍六十及七十年代计量与测试分析方法的成果。

钱学森同志多次对我们强调：那一门工业如果不搞好标准、计量及可靠性工作，那一门工业的现代化是搞不好的。

在六十年代初，根据钱学森同志的意见，我们转向可靠性研究。精度作为性能可靠性是可靠性的一个重要内容。二十多年来，我们在把国外的新成果结合我国工业实际用到高精度计测分析上作了一点点工作，本书总结了我们在这一领域的经验及体会，也包括了我们在这个领域的研究成果，当然是很肤浅的。

计量与测试简称“计测”，作为一门工程技术而言，分成很多专业。如超低温计测、流量计测、振动计测、……等等。如果包含面更宽一些，还可以包括诸如卫星轨道计测、误差分离计测、……等等。这些专业各有其特点。但是它们都有一门共同的应用科学作为它们的基础。国内过去不少作者把这门应用科学叫做“计测误差分析及数据处理”，其实，更确切一些，应叫做“应用数学在计测中的应用”。

它研究的内容是：对直接或间接计测到的数据如何进行统计分析？对需要计测的物理量或需要鉴定的计测设备的准确度、精密度如何作出评估、鉴定？根据测试结果，如何求

得物理量之间的定量关系及给出定量的误差范围？如何进行计测或试验的试验设计？等等。

近年来，以“计测误差及数据处理”一类名称出版的著作已有多种。本书对已被更新、有更有效的方法取代的传统方法一律不介绍，或只作简单的说明。

本书重点介绍近年来计量与测试分析方法几个方面的成果：（1）在评定、鉴定误差、准确度、精密度时引入置信度 γ 的概念。传统方法往往把子样均值 $\bar{x}$ 与子样方差 s^2 当成母体均值 μ 与母体方差 σ^2 ，这样做有相当大的概率把准确度及精密度估计过高，造成虚假的精度。在高精度工作中这是不容许的。例如，如果把这种精度估计方法用到通信卫星上去，弄得不好会使卫星失败。（2）国内的计测设备校正还在用类似“折线法”一类传统方法。本书中经理论分析指出，其校正效果是不高的。日本标准协会在1972年出版“SNビマニュアル”，提出了统计校准及信杂比方法，近年来一直在全力推广。但这一个有效的软设备在国内还很少被有关技术人员所了解。本书把这个软设备推荐给国内技术人员使用。我们对某些计测设备使用这个软设备后，某些情况使设备精度提高了一级。（3）传统的著作中只介绍“普通最小二乘法”（OLS）及“一般最小二乘法”（GLS）中的特例“加权最小二乘法”（WLS），本书则进一步介绍近年来在国外已广泛应用的“最大似然法（ML）”、“最大验后概率法（MAP）”，以及由此发展的“序贯估计法（SE）”……等等。

但本书并不企图罗列近年来这一领域的成果，因为我们认为有些新方法没有经过足够的考验。本书只介绍我们在实践中认为有效并且物理意义明确的方法。例如，用“山脊回

归 (RR)”方法求某些病态法方程式的解，有时我们也确实得到出乎意外的“好”结果；但是如本书分析的那样，山脊回归方法在本质上用了“主观验前分布”这一过分大胆的物理假设，有时候没有把握认为这假设确实符合客观实际。因此尽管结果“好”，也不一定是可信的。从而对它只作简略的介绍及评述。

由于国内不少工程技术人员不太熟悉矩阵，所以本书的前几章尽量不用矩阵符号。但由于只有使用矩阵才能对多变数间接计测作出简明有效的推导，所以在本书最后一章，才使用了矩阵工具。

由于计量测试名词的国标有的还未公布，因此有一些名词是作者译选的。

本书的实例及计算结果多数是黄雅芬同志于1965年起在工作中积累的资料及分析报告。

管窥之见，不免挂一漏万。限于水平，谬误在所难免，深望批评指正，使这本小书能成为引玉之砖，为四个现代化尽一点微薄的力量。

何国伟

目 录

本书符号表	1
第一章 计测误差	5
§ 1.1 计测误差分析的意义及作用	5
§ 1.2 计测误差及概率	11
§ 1.3 离散型计测误差、不定常差及其综合	22
§ 1.4 连续型计测误差、准确度及精密度	39
第二章 计测设备的误差估计及统计校准	70
§ 2.1 直接计测的参数点估计	70
§ 2.2 直接计测的参数估计值误差及统计校正	94
§ 2.3 线性计测设备的统计校准, 两参数间接计测的 OLS 估计及 ML 估计	132
§ 2.4 线性计测设备统计校准的误差分析	153
第三章 计测数据基本假设的统计检验	163
§ 3.1 显著性检验	163
§ 3.2 正态性检验, 正态概率纸, 李立福方法	164
§ 3.3 粗差剔除、格拉布斯方法、培根方法	170
§ 3.4 方差无显著差异的检验方法——柯克郎方法	178
§ 3.5 均值无显著差异的检验方法——威尔许方法	190
§ 3.6 检验残差有无显著倾向性的杜宾-华特逊方法	194
§ 3.7 非线性校正	198
第四章 误差的分配、传递及综合	212
§ 4.1 误差分配	212
§ 4.2 误差的传递及综合	228
第五章 计测设备的信号杂音比	242

Ⅷ

§ 5.1	方差分析及信号杂音比	242
§ 5.2	线性计测设备的信号杂音比	260
第六章	多参数间接计测	268
§ 6.1	多参数间接计测的 OLS 及 ML 方法	268
§ 6.2	多参数间接计测的 GLS 及 GML 方法	281
§ 6.3	有约束条件的多参数间接计测的 ML 方法	294
§ 6.4	解法方程式的计算技巧——直接法及叠代法	320
§ 6.5	MAP估计、序贯估计、山脊回归	335
§ 6.6	LQ估计、高斯叠代法、阻尼最小二乘法	342
参考资料		354
附表〔I〕	标准正态分布表	356
附表〔Ⅱ〕	$\chi^2(v)$ 分布的上侧分位点 $\chi^2_{\alpha}(v)$ 表	358
附表〔Ⅲ〕	$t(v)$ 分布的双侧分位点 $t_{\alpha}(v)$ 表	360
附表〔Ⅳ〕	$F(v_1, v_2)$ 分布的分位点 $F_{\alpha}(v_1, v_2)$ 表	362

本书符号表

$A, B, \dots$	事件, 矩阵
A'	矩阵 A 的转置矩阵
$\bar{A}$	事件 A 的余事件
$E\{X\}$	随机变量 X 的期望值 (均值)
$f(x)$	随机变量的概率密度函数
$f_X(x)$	随机变量 X 的概率密度函数
$F(x)$	随机变量的累积分布函数
$F_X(x)$	随机变量 X 的累积分布函数
$F(v_1, v_2)$	自由度为 v_1, v_2 的 F 分布
$F_\alpha(v_1, v_2)$	F 分布的 α 分位点
I, I_n	么矩阵, $n \times n$ 么矩阵
J	雅可比行列式
$L(\)$	损失函数, 最大似然函数
$M_X(z)$	X 的矩母函数
$N(\mu, \sigma)$	均值为 μ 、方差为 σ^2 的正态分布
$N(0, 1)$	标准正态分布
n	子样大小
O	零矩阵
$P(A)$	事件 A 出现的概率
$Q(u)$	即 $1 - \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2/2} dt$

r	子样相关系数
R	子样范围
R_n	大小为 n 的子样的极差
S	样本空间、残差平方和
s^2	子样方差
$t(v)$	自由度为 v 的 t 分布
$t_\alpha(v)$	t 分布的 α 分位点
$V(X)$	随机变量 X 的方差
$X, Y, \dots$	随机变量、矩阵
$\bar{x}$	行向量, 即 $n \times 1$ 矩阵
$\bar{x}'$	列向量, 即 $1 \times n$ 矩阵
$X_0, X^{(0)}$	标称值, 真值
$x_1, x_2, \dots$	子样个体特性值
$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots$	$x_{(i)}$ 是把子样个体特性值按从小到大排列后的第 i 个值, 顺序统计量
$\bar{x}$	子样均值
α	第一种错误
β	第二种错误, 待估参数
$\hat{\beta}$	待估参数的估计值
γ	置信度
ε	误差
σ^2	方差
σ_X^2	随机变量 X 的方差
ρ	相关系数, 相对计测误差
μ	随机变量的均值
μ_x	随机变量 X 的均值

ϕ	不可能事件, 空集
$\Phi(u)$	标准正态分布的累积分布函数
ν	自由度
η	信号杂音比, 真值
$\chi^2(\nu)$	自由度为 ν 的 χ^2 分布
$\chi^2_{\alpha}(\nu)$	χ^2 分布的 α 分位点
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\cup$	和集符号
$\cap$	交集符号
$\wedge$	估计值符号
$\subset$	$A \subset B$ 表示 “ B 包括 A ”, 亦即 $B \supset A$

第一章 计 测 误 差

§ 1.1 计测误差分析的意义及作用

计测误差分析是计测工程的重要内容。

在科研及生产中，为了研究掌握物理量间的定量关系，必须对物理量进行计测。由于计测设备、工具、环境条件、人员技术水平、计测方法、……等内外因素的影响，作为计测对象的物理量的真值 X_0 与计测所得值 X 之间一般总有一定差异 ε 。

$$[\text{定义 } 1.1.1] \quad \varepsilon = X - X_0. \quad (1.1.1)$$

ε 叫做“计测误差”。

$$\text{令} \quad \rho = \varepsilon / X_0. \quad (1.1.2)$$

ρ 叫做“相对计测误差”。由于 X_0 是未知的，且 X 一般与 X_0 也较相近，因此，也有一些资料定义

$$\rho = \varepsilon / X \quad (1.1.3)$$

计测误差的大小，反映了人们的认识接近于客观实际的程度。

〔例 1.1.1〕 用水银温度计测得某一温度为 20.3°C ；用更精确的铂电阻温度计测得该温度为 20.2°C 。由于后者更为精确，可认为是真值。于是计测误差 $\varepsilon = 20.3^\circ - 20.2^\circ = 0.1^\circ$ 。相对计测误差如按(1.1.2)式计算为 $\rho = 0.1^\circ / 20.2^\circ = 0.495\%$ ；如按(1.1.3)式计算为 $\rho = 0.1^\circ / 20.3^\circ = 0.493\%$ 。

〔例1.1.2〕某工作人员用同一游标卡尺反复测量某一长度25次，其测量值如下（单位：厘米）：

6.356, 6.357, 6.351, 6.355, 6.355,
6.353, 6.356, 6.354, 6.357, 6.355,
6.352, 6.356, 6.355, 6.353, 6.357,
6.354, 6.351, 6.355, 6.354, 6.356,
6.353, 6.356, 6.358, 6.354, 6.355.

这个实例有典型意义。同一个工作人员用同一计测工具或设备测同一物理量，反复多次的计测值不尽相同。由于被测对象的真值只有一个，因此，多次计测的计测误差不尽相同。

计测误差的大小与所用的计测设备或工具有密切关系。如果〔例1.1.2〕用米尺去计测，则计测误差会大得多。因此要选用适当的计测工具或设备去进行计测。但是决不能采用所谓“计测工具或设备愈高级愈好，环境条件（如温度、湿度、……等）愈稳定愈好，计测次数愈多愈好”的原则。因为，一般说来，计测工具愈高级，误差一般说是小了，但费用往往要大得多；环境条件要求愈稳定，就必须建立例如恒温、恒湿、高空调要求的实验室，基建投资要高得多；计测次数愈多，所用的人力物力也愈大。

实际工作中，影响被计测对象的计测误差的主要因素，往往只有很少几项物理量，对这几项物理量，必须进行严格的控制或精密计测。对其它虽然也起一定影响但影响程度不大的物理量，则只要进行适当控制或用一般的计测工具进行计测就可以了。

〔例1.1.3〕在用高1米的测高仪计测高差时，需要调正铅直度。操作规程规定：应把准锤的两个尖调到相差不超

过 2 毫米。这样带来测高差的相对误差有多少?

〔解〕 设真正的高差为 $OA = h_0$ 。由于测高仪的准锤两个尖未完全对准, 引起测高仪偏调, 计测出的高差为 $OB = h$, $\angle AOB = \theta$ 。 θ 即由于准锤两个尖未对准而引起的偏角 (见图 1.1.1)。

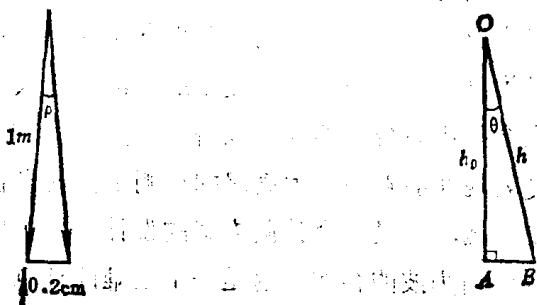


图 1.1.1

根据操作规程, 在极限容许情况的两个尖之差为 2 毫米, 由于测高仪高 1 米, 故

$$\theta = 0.2 \text{ 厘米} / 1 \text{ 米} = 0.002 \text{ 弧度} = 0.114591559^\circ$$

由于 $h_0 = h \cos \theta$, 故计测误差 $\varepsilon = h - h_0$, 从而相对计测误差为

$$\begin{aligned} \rho &= \varepsilon / h = (h - h_0) / h = 1 - h_0 / h = 1 - \cos \theta \\ &= 1 - 0.999998 = 2 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

在一般测高工作中, 这相对计测误差已远远小于标尺最小刻度的相对误差。因此, 准锤两个尖的对准要求相差不超过 2 毫米是足够了。这样的精度要求已不需要专门的计测工具, 有经验的工作人员用目测就可以保证达到这个精度。

在设计计测方案时, 必须研究: 为了保证最终被计测对

象的计测误差在要求的范围之内，各项造成误差的因素应控制稳定在什么范围之内？事实上，有些因素确实影响最终结果，但不一定在计测中加以控制。例如有些计测设备的计测数值受温度影响较大，但是不一定要在恒温条件下进行计测，如果能把温度对该计测设备的影响规律弄清楚的话，则温度所带来的影响可以加以修正。

作者在这里再三强调：无限制提高对计测工具或设备的要求，是谁都能做到的。一个能干的计测设计人员的水平，不表现在会提出高要求的计测设备上。计测设计人员的水平，一定程度表现在能够用不太高级的计测工具或设备进行有较高要求的计测，这是一个计测方案的设计问题。例如，要通过计测证明引力波的存在，这是一个很难的计测问题。其困难的原因之一，是要选择一个天体为测量对象，但一般的天体的引力辐射的影响往往为比它强得多的电磁辐射所掩盖。泰勒等人在验证引力波存在的著名计测试验中，他们选择了计测中子双星的公转周期由于引力辐射而引起的变化。其所以选中子星，是因为中子星公转不辐射电磁波。又因中子星质量极大而体积极小，所以分析时可以严格地把它看成质点，不象别的星体会由潮汐作用影响其公转周期。这是计测方案设计的光辉范例。由于计测方案设计牵涉太广，牵涉到物理学的几乎各个部门，不列入本书的内容，故不多赘述。

计测误差分析的内容与意义大致如下：

(1) 通过计测误差分析，合理地选择环境条件、计测工具设备及计测次数，使得在最少的人力、物力、周期下得到预期的计测结果。

(2) 对计测结果总结出科学的误差范围，如果计测分析

出来的误差比实际误差小，会使使用结果的部门造成太平无事的假象，某些情况下就会造成重大的后果。例如，为了发射同步卫星，必须对轨道参数有足够地精确的控制，同步卫星的运载火箭的性能参数的误差应很小。如果计测性能参数的计测设备分析出的误差比实际小，把不合格的当成合格的，则同步卫星就可能不能准确入轨，漂离原定位置，使卫星失败。

(3) 由于计测花一定的人力、物力、时间，因此每一个计测得到的数据都是花了代价的，某些情况下甚至花很大代价。计测分析要充分利用计测所得的信息，得出最有效的结论。在数据处理中，要尽量用避免损失信息的处理方法，并尽可能利用过去积累的信息，近年来，从传统的二乘法(OLS)发展到最大似然法、最大验后概率法等就是这一方面的重要进展。

在任何计测中，由于各种原因，被计测物理量的真值与所得计测值之间一般总存在一定差异，即计测误差一般总是存在的。计测误差存在于一切计测之中，而且贯彻计测过程的始终。每使用一种计测工具或设备，都会引入相应的计测误差。计测所根据的方法理论愈繁，所用计测工具及方法愈复杂，计测过程的时间愈长，则引入误差源就愈多。

误差按其性质分为如下两类：

其值为固定的或按确定规律变化的误差叫“系统误差”。系统误差的来源大体有下述几方面：

(1) 基准或标准值不准带来的误差，即所谓“标准误差”

计测工具及设备要定期与上一级计测标准进行校准。但