微分方程数值解法

李立康　於崇华　朱政华　编著

计算数学丛书

复旦大学出版社

计算数学丛书

微分方程数值解法

李立康　於崇华　朱政华　编著

复旦大学出版社

微分方程数值解法

编　　著　李立康　於崇华　朱政华
责任编辑　范仁梅
责任校对　张利勇
装帧设计　赵丽丽
出版发行　复旦大学出版社　　　http://www.fudanpress.com
上海市国权路 579 号　200433
86-21-65102941　（发行部）　86-21-65642892　（编辑部）
fupnet@fudanpress.com
经销　新华书店上海发行所
印刷　上海第二教育学院印刷厂
开本　850×1168　1/32
印张　14.75
字数　420 千
版次　1999 年 1 月第一版　1999 年 1 月第一次印刷
印数　1—4 000
ISBN 7-309-02114-2/O・184
定价　18.00 元

DV69/02

内 容 提 要

本书是大学本科计算数学及其应用软件专业的专业基础课教材，主要讨论了微分方程的数值求解问题，内容包括常微分方程与边值问题的差分方法、发展方程的差分方法、变分问题和有限元方法等方面的基本理论与典型算法分析，并适度介绍了该领域当前最新的研究成果，如超收敛、多重网格法、区域分裂法等，还精选了部分规模适中、紧扣教材的计算实习题，以加强学生理论联系实际的能力。

本书也可作为综合性大学理科及工科院校相应专业的教材或教学参考书，对于计算数学工作者、从事科学和工程计算的其他领域的科研人员也有参考的价值。

前　言

多年之前，我系计算数学教研室就筹划编写一套新的专业基础课教材，在90年代初正式用于本科生的教学。由于时间变迁、条件变化、人员变更，几经周折，至今才得以画上一个句号(本套教材的另外两本为曹志浩编著的《**数值线性代数**》和蒋尔雄、赵风光编著的《**数值逼近**》，已分别于1996年6月和1996年7月出版)。

用数值方法求解微分方程问题几乎是与微分方程一同出现的，其历史可追溯到约一个半世纪之前。到本世纪中叶以后，由于微分方程本身的理论研究的深入发展，更兼之本世纪最重要的科学发明——电子计算机的问世，这方面的研究进入了一个蓬蓬勃勃发展的新局面，至今依然方兴未艾，基于各种新型的超级并行计算机的新思想、新算法层出不穷，同时，大量通用和专用的计算软件也组成了一个琳琅满目的新天地。

当然，作为一门专业基础课的教材，我们没有必要，也没有可能把这些内容包罗万象地列入本书中。本教材旨在通过对一些典型问题和典型算法的剖析，使学生循序渐进地掌握本课程的基础理论和分析解决问题的基本思路和技巧，为今后解决实际问题或进入深层次的专门研究奠定良好的基础。

本书主要由三大板块组成：常微分方程及边值问题的差分方法(第二章、第三章、第四章)、发展方程的差分方法(第五章)、有限元方法(第六章、第七章)。为了使学生开阔视野，了解本学科的发展现状，我们也适度介绍了一些当前的最新成果(主要集中在第八章)。材料的详略、取舍以及展开的方式、次序都根据其他相关课程的进度和讲授内容的变更，以及当今计算机软硬件的发展现状，作了一些新的探索，许多地方融会了我们以及同事们的讲课体验和研究心得，有些定理的证明是由

作者重新整理或给出的。如在第二章和第五章中，均采用了先将一个最简单而又典型的算法进行从构造思想直至性态分析的完整研究，从而引出几乎所有的重要概念和方法，然后再全面铺开内容的“解剖麻雀”式的展开方式（“解剖麻雀”时出现的某些需要后继知识的概念一开始可以不十分严格和精确，待随后的内容展开时再逐步完成准确的数学定义）。我们在教学实践中发现，这种方式可以使学生更快地抓住问题的关键，从总体上把握内容，取得较好的效果。

为了提高学生实际解决问题的能力，每章后面的练习都由“习题”和“计算实习”两部分组成。我们在后一部分中精心选编了一部分规模适中、紧扣内容的上机计算题，供任课教师在条件允许的情况下挑选若干，来指导学生进行实际计算，以加深对理论分析的理解和增强对算法的感性认识。

本书是以李立康、朱政华同志在80年代中期编写的同名的约10余万字的讲义为蓝本（於崇华同志参加了80年代末修订该讲义的讨论），在李立康同志主持下重新撰写的，内容已较讲义有了很大的扩充和变更。我们3人都曾分别多次使用该讲义授课，对教学中发现的一些需增删、更改、充实的地方作过详尽的讨论，所达成的共识已在本书中得到了体现。全书由於崇华同志执笔，书中所有的数值例子亦由他用C语言编制程序后，上机核算无误。初稿完成后我们进行了逐句逐段的推敲，并征求了本系部分对此有教学经验或研究成果的教师的意见，几经修改，才最后定稿。

从教学角度来看，全书大致可分为两个层次：主要部分满足了全日制大学对本课程的基本要求，可在一个学期学完；而一些较深入、较新颖的内容（目录上标了星号）则可供教师、计算数学工作者、工程技术人员参考和查阅，亦可选作研究生课程的材料。

阅读本书的大部分内容只需具备数学分析、高等代数和微分方程知识。个别地方涉及到了少量的泛函分析知识，尚未学过该课程的读者可以先跳过去，这不会影响对本书内容的总体把握。

囿于我们的学识水平，虽经几番努力，书中仍难免有疏漏不妥之处，恳请使用本书的师生和其他读者把宝贵的意见反馈给我们，不胜感

激。最后，谨向对本教材的编写予以热忱帮助的复旦大学数学系，尤其是计算数学教研室的同仁，对本教材的出版予以有力支持的复旦大学教务处和复旦大学出版社的同志致以诚挚的谢意。

编　者

1998 年 5 月于复旦

目　录

第一章 绪 论

§1 微 分 方 程

数学来源于人类的社会生产活动。现代数学的产生和发展是与力学、物理学、天文学等应用学科的发展相辅相成的:它们为数学提出问题,而数学在解决这些问题的过程中所获得的更广泛、更深刻的结果又反过来推动这些学科的发展。近几十年来,由于电子计算机技术突飞猛进地发展,除了那些传统上与数学关系密切的学科之外,工业、经济、交通、人口、生态等领域也越来越广泛地使用数学作为研究工具之一。

"数学模型"是当今一个被频繁使用的名词,它是指在对现实世界的某一特定对象的研究中,抽取客观事物的本质特征及其内部联系,用适当的数学语言和工具所建立的一个数学结构,如大气流动模型、疾病传播模型、工业自动控制模型、人口模型等。它的解往往表达了特定对象的现实性态和发展趋势,并提供了处理问题的最优决策和控制,成为人类改造自然、改造社会的有力武器。

若要处理的事物的内在联系比较简单,那么建立数学模型只要动用简单的数学工具就行了,如比例、排列组合、初等函数、低阶线性方程组和低次代数方程、图上作业等,都分别可以用来解决一些实际问题。

但现实世界中绝大多数事物的内外联系是极其复杂的,其状态随着时间、地点、条件的不同而不同,我们往往只能通过对问题进行简化和作某些假定,从中找出其状态和状态的变化规律之间的相互关系,也即一个或一些函数与它们的导数之间的关系,这种关系的数学表达就是**微分方程**。

英国人 Malthus 在 1798 年提出了著名的"Malthus 人口模型"。他

的基本假设是，在人口自然增长过程中，增长率（单位时间内人口的增长量）与人口成正比。设 t 时刻的人口为 $p(t)$，则在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增长量为

$$p(t+\Delta t)-p(t)=\lambda p(t)\Delta t,$$

其中 λ 为比例常数，也即 $p(t)$ 满足微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\lambda p,\\ p(t_0)=p_0,\end{cases}\tag{1.1}$$

这里 p_0 是在初始时刻 $t=t_0$ 时的人口数。

易知，方程的解为

$$p(t)=p_0\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}。\tag{1.2}$$

将 t 按某一固定时间段为单位来计算，则人口构成一个以 e^{λ} 为公比的等比数列——这即是“Malthus 人口论”的主要依据。

循着这样的思路可以建立事物间更复杂的联系，如两个互有一定依赖关系的生物种群的增长规律。意大利数学家 V. Volterra 在本世纪 20 年代曾就地中海鲨鱼和经济鱼类的关系建立了一个著名的“弱肉强食模型”：

设弱者（如食用的经济鱼）数量为 $x(t)$，强者（如鲨鱼）数量为 $y(t)$，弱者的净自然增长率为 r，杀灭率（如捕捞）为 k，被单位强者食取的比率为 e，则成立

$$\frac{x'}{x}=(r-k)-ey。$$

设强者的自然死亡率为 d，而弱者为其提供了食物使其赖以生存，提高了它的增长率，假定这个增长率 l 与弱者的数量 $x(t)$ 成正比，则有

$$\frac{y'}{y}=-(d+k)+lx,$$

于是，可得微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x[(r-k)-ey], \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y[-(d+k)+lx], \\
x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0。
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

理论分析可以证明，(1.3)式中杀灭系数 k 的减小将更有利于强者生存，这已为第一次世界大战期间捕获鱼类的统计资料所佐证。从这里我们可以得到一个有趣的结果，在使用杀虫剂杀灭农作物的害虫(弱者)时，也同时按比例地杀灭了它们的天敌——益虫(强者)，当大量使用杀虫剂，即当 k 增加时，将导致害虫的比例增多，益虫的比例减少，这是人们所始料不及的。

现实世界中的绝大多数问题，最后所归结的数学模型都是微分方程，因此，对它的研究始终是数学领域中的一个重要课题。

§2 数值求解微分方程的意义

如何对现实问题建立相应的数学模型(简称“建模”)已有专门的**数学模型**课程介绍，各类微分方程本身和它们的解所具有的特性也有**常微分方程**和**数学物理方程**等课程加以阐述，我们这里只讨论利用数值方法去求解微分方程的一些问题。

如果能找到一个(或一族)具有所要求阶连续导数的解析函数(如(1.2))，将它代入微分方程(组)(如(1.1))中，恰好使得方程(组)的所有条件都得到满足，我们就将它称为这个微分方程(组)的**解析解**(也称为**古典解**)。若无特别指明，则本书后文中出现的“微分方程的**真解**”或“微分方程的**解**”就是指解析解。寻找解析解的过程称为**求解微分方程**。

微分方程的解在数学意义上的存在性可以在非常一般的条件下得到证明，这已有了许多重要的结论。但从实际应用上来讲，人们需要的往往并不是解在数学上的存在性，而是在我们所关心的某个定义范围内，对应于某些特定的自变量的解的取值或是近似值——这样一组数值称为这个微分方程在该范围内的**数值解**，寻找数值解的过程称为**数**

值求解微分方程。

那么，为什么要研究数值求解方法呢？

第一，在实际问题中，我们所能获取的或感兴趣的，往往只是一个个特定点上的数据。如空间的温度分布只能一个点一个点地测定，火箭升空传回的控制信息只能以某个 Δt 为间隔，一个个地发送和接收，如此等等。这些离散点上的函数值对于解决实际问题来讲，一般已经足够了，寻找解析解的一般形式未必很有必要。

第二，在很多情况下，寻找解析解也并无可能。现实问题中归结的微分方程不满足解析解的存在性条件的比比皆是，方程中出现的有些函数连连续性都无法保证，所以它们并不存在前述意义下的解析解。于是，求它的数值解便成了在这种情况下解决问题的重要手段了。

第三，即使微分方程的解析解存在，也并不意味着可以将它表示为初等函数，如多项式、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数及它们的不定积分的有限组合形式——我们把这样形式的解称为**显式解**。事实上，有显式解的微分方程只占解析解存在的微分方程中的非常小的一部分。

对于不存在显式解的那一部分问题，常用的两种解析处理方法是级数方法和 Picard 的逐次逼近法。但是，可以用简单的级数求解的微分方程只不过形成了十分有限的一类。同时，即便级数解存在，从实际计算来说，它对于自变量的大多数取值来讲，收敛极其缓慢以至未必真正实用，更不用说在非线性情况下，除了开头的几项外，要决定系数是相当困难的。

逐次逼近法是微分方程理论研究中的一个重要工具，不过若将它平行地搬来作为数值计算的方法，效果并不能令人满意。可以说，在能够使用逐次逼近法计算的场合，一定能找到一种数值方法，它的计算效益比逐次逼近法更好(而且往往是好得多)。

第四，对于像(1.1)那样具有如此简单的显式解(1.2)的微分方程，数值方法是否就没有用武之地了呢？并非如此。为了求得解在某一特定时刻 t 的数值，在许多情况下人们还得借助于数值计算。如对于方程

$$\begin{cases} u' = 1 - 2tu, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

它的解可以表示成

$$u(t) = e^{-t^2}\int_0^t e^{\tau^2} d\tau。$$

我们知道，e^{τ^2}的原函数是无法用初等函数表示的，因此要确定在某个 t_0 时刻的值 $u(t_0)$，还是必须用数值方法去计算一个积分值。此外，$e^{-t_0^2}$也需要用插值等方法来计算。既然如此，那么为什么不在一开始就干脆直接使用数值方法来解呢？

附带指出，对于一些原函数不能用初等函数表示的重要积分，如概率论中的许多分布函数，人们可以通过查表来获得函数值。但这些表一般并非是用数值积分方法得到的——与大部分人的直观想法恰恰相反，它是通过数值求解微分方程的方法构造出来的（参见第二章计算实习题 4）。

由于上述理由，多年来，**微分方程数值解法**一直与**数值逼近**、**数值线性代数**鼎足三分，牢牢地占据着计算数学的专业基础课的地位。近年来由于计算机技术的蓬勃发展，更使得这门学科日趋重要。

§3 数值求解方法概述

既然数值求解方法是求一个个离散点处的未知函数值，那么首先就要把整个定义域分成若干小块，以便对每小块上的点或片求出近似值，这样按一定规律对定义域分切的过程称为**区域剖分**。

区域剖分完毕后，依据原来的微分方程去形成关于这些离散点或片的函数值的递推公式或方程。这时它们的未知量已不再是一个连续函数，而成了若干个离散的未知值的某种函数组合了，这个步骤称为**微分方程离散**。

离散后的系统若是一个递推式，那它需要若干个初值才能启动，若是一个方程组，那它所含的方程个数一般少于未知量的个数，要想求解