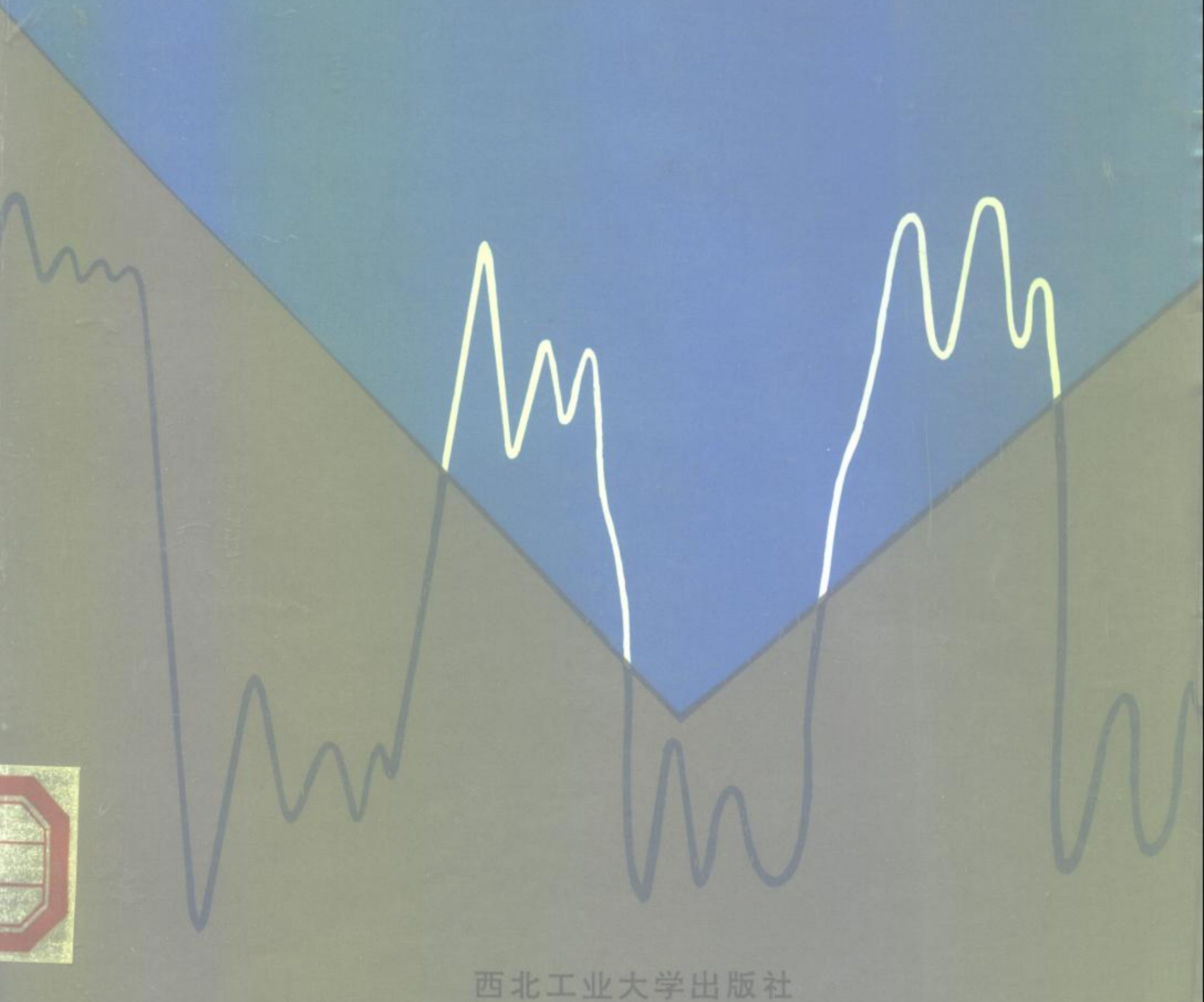
动态大系统方法

雷树樑 著



西北工业大学出版社

动态大系统方法

雷树梁 著

西北工业大学出版社

1994年3月 西安

(陕)新登字 009 号

【内容提要】 本书从大系统研究中最有实用价值的问题出发，论述了大系统的建模、辨识和控制、仿真以及图论的应用等方面内容。全书着重从工程实用角度探讨动态大系统方法，包括时域和频率域模型简化、在线和离线参数估值、并行处理以及用图论解决大系统仿真的方程重组和任务自动分配问题。本书不仅包括了大系统理论发展中的最新成果，还总结了作者在实际研究中所得到的有实用价值的新方法，所论述的内容为一般大系统同类论著中所没有的，既注重实际应用，又不失理论上的逻辑关系，因此具有独到的特色。本书可供高等学校控制系统专业高年级学生、研究生以及从事系统研究的工程技术人员参考。

动态大系统方法
著　　者　雷树梁
责任编辑　王　璐
责任校对　享　邑
*

（西安市友谊西路 127 号　邮编 710072）
陕西省新华书店经销
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0655-0/TP·69
*
开本 787×1092 毫米 1/16　14.875 印张　插页 1　363 千字
1994 年 3 月第 1 版　　1994 年 3 月第 1 次印刷
印数：1—1 000 册　　定价：18.00 元

序

大系统的研究热是80年代兴起的，当时作者正在英国曼彻斯特理工学院控制系统中心从事这方面的研究，所涉及的内容包括建模与辨识、控制、仿真、图论的应用和分散控制等方面。回国以后，在实际的工程应用中遇到的又是大系统问题。结合控制系统设计的需要，配合研究生的培养，研究了集结法进行模型简化的问题，以便使大系统的理论和在宇航控制中常用的方法衔接起来。所有这些工作和结果的综合，便构成了本书的主要内容。它正好包含了大系统研究的两条路径：集结法(aggregation)和分级分解法(hierarchical decomposition)。前者致力于将大模型浓缩为低阶模型，然后再进行低阶系统的综合或分析；后者则将原模型分解为若干小模型(子系统)，然后用普通的控制论方法研究每个子问题。

目前大系统的理论框架除分散控制以外已经基本确立，大系统研究的侧重点已转到应用方面。因此，本书主要从实用的角度出发，介绍动态大系统理论的工程应用方法。大系统理论在工程实践中的应用，目前国内有关教材多是引用国外经济系统的数字算例，针对工程问题抽象出来的实例不多见。因此本书的着眼点不在于重复目前已有教材中的论述和例子，而是从工程应用的角度出发，注重实用性，可实施性。书中给出的公式和理论推导，用意在于交待来龙去脉，着重说明基本概念和方法的依据，不是去深入讨论其数学意义上的“严格性”，而是由此引出具体的方法。为使本书的内容有通用性，所介绍的方法都是在计算机上实施过的。考虑到通用性，书中仅给出两个通用程序放在附录中。在掌握本书内容的基础上，读者不难用书中的基本方法和算法编制解决具体问题的计算机程序。

在一定意义上，大系统问题的产生来源于计算机容量和速度的限制。因此，如何用计算机实现对大系统的处理是应用的一个重要内容，而这一点恰恰在现有的各类教材中都忽略了。在计算机高度发达和普及的今天，由于动态大系统方法的应用离开了计算机就失去依托成为空谈，所以本书所论述的分级分解方法都是以计算机并行处理为核心的。不仅在大系统仿真中，而且在建模与控制、图论应用以及分散控制中都围绕着这个核心。事实上，在并行处理的硬件技术已经发展的今天，所需要的是合适的软件算法和方法(methodology)，去很好地适应并开发并行处理的硬件功能。一个高效的并行算法只有应用动态大系统的方法才能产生，这是大系统应用的重要内容。另外，从工程角度考虑，本书还注重了“在线”实施的问题。这样，动态大系统的方法才能够“设计”到实际系统中去，才能为实用的工程装置所采纳。

因此，本书力图从工程应用的角度发挥自己的特色，所论述的内容尽量避免与一般教材雷同，以求给读者以新的信息。书中的主要方法和实例均取自研究工作的具体结果，包括分散控制中关于定态干扰部分的内容，也来自作者和同行的探索。这样才能保证本书求实、求新的特色。基于这一思路，并为了节约篇幅，本书没有从介绍控制理论的基本知识入手。因此，阅读本书的读者应具备控制系统的基本理论知识和必要的数学基础。

本书在出版过程中得到许多同事同行、领导和学生的热心支持、关怀和帮助，在此表示衷心的感谢。特别感谢上海航天局对本书出版的关怀和支持；感谢西北工业大学出版社和曾颖超教授为本书出版所做的工作和指导；感谢上海航天局李国红老师和教育处曹舜民处长的热心

帮助和斡旋。在整理书稿的过程中，我的研究生尹七一同学协助绘制图表、誊写手稿，雷明兵同学和孙经海同志等都为本书出版做过具体工作，在此一并致谢。

作　者

1992年10月

目　录

第一章　概　　论

1.1　大系统的一般概念

大系统是控制系统领域里一个新兴的分支，它是近年来随着控制理论在工程和社会系统的应用日趋深入而发展起来的。由于计算机的普遍应用给人们在更高层次上研究复杂的对象提供了有利条件，研究人员力图用数学表达式来定量地描述大规模的问题，从而把对控制系统的研究推进到大系统阶段。当前大系统的研究正在形成一套新理论，它对于解决实际问题的成效及其应用前景吸引了许多从事系统理论研究的人员和工程技术人员。同时，还有许多尚待解决的具有挑战性的题目，也吸引了大批从事控制系统研究的学者。

什么是系统？系统是相互之间有联系的诸元素的有组织的集合，用来实现给定的目标。系统动力学创始人 Forrester 在《系统学原理》一书中开宗明义地指出："系统是为着一个公共的目的而一起工作的部件群。"例如，航天飞行器是能提供运载能力并把有效载荷送到空间指定地点的部件系统。"系统"(system)一词最早出现于 2 000 多年前古希腊学者柏拉图的著作中，在希腊语中，"系统"是"有组织的群体"之意。柏拉图指出，系统像任何一个关系协调的组合有其内在的统一性。在近代，"系统"一词以及系统分析的概念直接来自二次大战对于军事的研究。例如，海上舰艇的防卫以及对敌空袭这一类军事行动，单一的军事手段是无法在复杂的战场环境中应付自如的，必须把所有的措施组织成一个统一的实体，以保证用最小的代价实现防卫或空袭的目的。现代工业社会中大多数工程技术系统也可以纳入这一定义中。国防尖端技术集现代科技和军事运筹之大成，无论是防空导弹还是警戒雷达本身，都是复杂的大规模动态系统，而它们和地面站、测控设备、照射雷达、指挥中心等等则构成了更为复杂的防空技术系统。

当前，还没有一个为大家普遍接受的定义说明什么是大系统。但是，在实际应用中有许多实例，通过考察这些例子，大系统的概念便会一目了然。例如，对于前述的防空导弹系统，如何确定导弹在指令作用下最后击中目标的精度？又如何分析导弹在飞行中的动态行为对于飞行精度的影响？这便是大系统问题。在现代城市交通信号灯网络的控制中，要根据马路上控制器在线实时测量的结果给出各相邻路口信号灯变化的规律，以保证城市交通尽可能地畅通，车辆在路口停留时间最短。显然，对于具有成百成千个交叉路口的城市，要描述这样一个实际交通网络系统，则需数量相当多的变量和方程组。此外，像电力电网系统、石油管道系统、工厂流水线控制系统、国民经济管理系统等等，都是典型的大系统的例子。例如，英国伦敦商学院所用的计量经济模型就有 1 万多个变量。但是，有时一个只具有几个状态变量的线性系统的参数辨识问题也是大系统问题。由此可见，大系统对于维数并无具体限定，高阶次也是随着问题而异的模糊概念。

当应用已经建立的控制系统理论来解决大系统问题时，有两个基本困难：一是由于高阶次带来的数值问题，随着阶次的线性增加使计算量将以 3 次方或 4 次方关系增加；二是由于非经典信息模式所带来的分散控制问题。也就是说，由于系统过于庞大，在设计控制器时所需要的

信息(状态变量)无法全部得到,或者由于信息远距离传递所用的代价太大而希冀只利用局部信息,例如计算机网络、电力系统等在大范围内分布的系统都是这类例子。大系统的特殊困难导致了去研究克服这些困难的方法,进而发展成为动态大系统理论。

在控制系统的研究中,控制系统的设计通常包含下述四个互相关联的基本阶段,即建模、分析、设计和实施。而在大系统问题研究中,由于问题的规模扩大,上述步骤需加以修改。例如,在建模的过程中,在某些情况下需进行模型简化。对大系统的研究可以大致归结为以下几个方面:

(1) 模型的简化;

(2) 大系统的建模和辨识;

(3) 大系统的仿真;

(4) 大系统的控制器设计;

(5) 分散控制系统。

上述几个方面都是大系统所特有的问题,也是工程应用上会经常遇到的问题。另外大系统的研究还包括稳定性的研究、凸函数概念等问题,本书不在这方面做深入的理论性探讨。

1.2 经典信息模式下的大系统研究

前述5个方面概括了大系统理论的各个不同模式以及不同的研究方法。在大系统研究中,若按信息模式分类,可分为经典信息模式和非经典信息模式两种。所谓经典信息模式就是在普通控制理论中所遇到的那种情况:每个子系统都可以得到它所需要的全部信息,因此,局部反馈或全局反馈都可以实现,而无须顾及这样一种反馈信息传递的距离或代价。在非经典信息模式中,信息是分布式的,要获得各子系统之间的全部信息常因代价太高而无法实现,因此只能利用局部信息来实现所要求的控制,这就产生了"分散控制"的概念。

当前对于具有经典信息模式的大系统的研究方法已相当成熟,主要有两个分支,一是集结法,一是分级分解法。

集结法 集结法是用来处理大系统问题中维数过高的一种方法。从本质上说,它是从一个复杂的大系统模型开始,得到一个低价的模型。这种方法的通俗解释可以见于地图的绘制中,在一个城市地图中,每条街道、每座桥梁都详尽无遗地得到描述,以便能够清楚地反映城市的面貌。但是,绘制世界地图显然不能采用这种方法。从理论上说,世界的地理状况是囊括全球的大系统,当然包括每个城市的状况,但是在绘制世界地图时,着重点在于各国和各大主要城市之间的交通地形等的描述,而绝不可能细致到每个大小城市的街道。虽然世界包含着每座城市,但绘制世界地图所用的方法(大系统)则不同于绘制普通城市地图的方法(普通系统)。世界地图是低一阶的地图的浓缩和集结,没有这种集结,世界地理的描绘和研究都无法进行。

集结法研究最终要达到以下目的:

(1) 简化模型,以便更好地理解和掌握系统本身,并实施对系统的仿真,以及对合适的控制器的计算。

(2) 简化后应保留原系统的主要特性,如动态品质等。

在这一领域的工作中诞生了如下一些模型简化方法:

(1) 将系统的传递函数展开成级数进行近似,用部分分式法进行近似,等等,由于其还没

有构成新的系统理论分支，故本书不拟叙述。

（2）在模型简化法中保留“主导模式”，引入基本状态变量的概念，这一工作是由 Aoki 发展起来的，其基本思路如下：

设 S_1 为物理系统的数学模型，S_2 为采用较少状态变量描述原系统的模型，则 S_2 称为集结模型，S_2 的变量称为集结变量。设 S_1 可用以下的线性方程描述：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)$$

S_2 为

$$\dot{z}(t)=Fz(t)+G\boldsymbol{u}(t)$$

为使 S_2 成为 S_1 的集结模型，要求

$$z(t)=C\boldsymbol{x}(t)$$

C 称为集结矩阵。这表明，集结状态变量 $z(t)$ 是变量 $\boldsymbol{x}(t)$ 某种方式的组合，也就是说，F 矩阵的特征值是相应的 A 矩阵的特征值的一部分。

在本书中将详细讨论这种方法。事实上，应用集结的基本思想来研究解决大系统问题，目前已经繁衍出许多具体的方法。本书将选择其中具有普遍意义并且已经在具体研究中得到应用的方法做详细说明。

分级分解法 分级分解法的思路是把系统分为若干子系统，再用普通的控制技术研究子系统的问题。在此之前，必须先确定大系统的稳定性问题。一般说来，对于互相联系的系统的稳定性的研究可沿如下几步进行：

第一步：系统由互相连接的子系统组合而成，先对于每个子系统分别给出数学描述；

第二步：对在孤立状态下的每个子系统都研究其稳定性，并且定量地表达其稳定程度；

第三步：根据稳定裕度和子系统之间相互交连的定量关系，给出系统稳定性条件。

满足上述稳定条件，就可以将大系统分解为子系统的组合。但是，经过这样分解之后，各子系统之间存在着相互联系或相互作用。设全局问题用 $P(d_0,I_0)$ 表示，其中变量 d_0 为控制决策，I_0 为可用信息。经过分解，问题化成由 $N+1$ 个子系统所反映的子问题：$P_{1i}(\boldsymbol{d}_i;I_{1i},\boldsymbol{\zeta})$，$i=1,2,\cdots,N$ 和 $P_2(\boldsymbol{\zeta};I_2,\boldsymbol{d}_\zeta)$。上式的含义是：由子问题 P_{1i} 可以解得 $\boldsymbol{d}_i$（用普通的控制论方法），此时应将子系统的局部信息 I_{1i} 以及由高一级的子系统 P_2 所提供的信息 ζ 作为输入量。为了求解问题 P_2，需要收集所有来自第一类子问题的解 $\boldsymbol{d}_\zeta=(d_{1\zeta},d_{2\zeta},\cdots,d_{N\zeta})$，$P_2$ 通常称为协调器。于是，经过分解的大系统问题的求解便可以分两极进行：在第一级，分别求解 N 个子问题 P_{1i}，$i=1,2,\cdots,N$，将结果 $\boldsymbol{d}_\zeta$ 送到第二级求解 P_2；第二级利用从下级得来的信息求解 $\boldsymbol{\zeta}$，再返回第一级，于是问题的求解便可迭代地进行，直到收敛为止。这便是分级分解法的基本思路。这一方法中的 $\boldsymbol{\zeta}$ 通常是子系统之间的相互耦合变量。

用上述基本思路，可以解决大系统的优化控制问题。该系统的动态特性可由如下状态方程描述：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{初值} \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

优化的目的要使下述指标函数最小：

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}t+q_t[\boldsymbol{x}(t_f)]$$

首先将大系统分解为 N 个互相交连的子系统。将第 i 个子系统中与交连变量 $\boldsymbol{x}_j$ 有关的项记作 ζ_i，得到相互作用等式

$$\zeta_i = g_i(x_j, t), \quad j \neq i$$

然后将原指标函数分解

$$J = \sum_{i=1}^{N} J_i$$

由于引入交连变量 ζ_i，为了保证相互作用等式满足，在指标函数中 J 须加入一项 J_c

$$J_c = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_f} \beta_i^T(t)\{\zeta_i(t) - g_i(x_j, t)\} \mathrm{d}t$$
$$\triangleq \sum_{i=1}^{N} J_{ic}$$

从而使指标函数 J 变成 J_T

$$J_T = J + J_c = \sum_{i=1}^{N} (J_i + J_{ic})$$

而原系统模型也可以写成如下分解的形式：

$$x_i = f_i(x_i, \zeta_i, t), \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

这样就可以在第一级对每个子系统分别用通常的办法优化，在第二级给出协调变量 β_i、ζ_i 的解返回第一级，如此迭代直至收敛。

协调变量的选择方法有三种：一种是直接协调，如上所示，变量 ζ 为全局问题变量的一部分，即它是参预子系统之间耦合的那部分变量；第二种为代价协调，此时 ζ 由对偶变量组成；第三种为混合协调，它是前二种方法的结合。本书只介绍第一种方法。

协调级 P_2 的解法也有许多种，常用的有校正法、预报法等。也可以对哈密尔顿函数进行优化给出最佳二级算法。

在系统辨识中，读者将会看到这种分级分解方法应用的详细过程。在大系统的仿真中，为了提高运算速度，节省机时，特别是在大系统实时仿真中，这种方法被证明是非常有效的，读者也将会通过详细实例进一步掌握这种方法。分级分解法现在已经取得了很大的进展，当前研究的重点是如何处理分解方法以及协调级问题 P_2 的求解方式。总之，分级控制的基本方法，已构成大系统理论及其应用的重要基础。

1.3 非经典信息模式下的大系统的研究——分散控制

分散控制。对于非经典信息模式的系统的研究产生了分散控制的概念。分散控制的理论发展目前尚未完全成熟。当系统受到若干控制器的作用，而这些控制器相互之间又无法进行在线联系或者无法实时处理大量的由传感器采集的参数时，便产生了分散控制的问题，控制器可以是物理装置或者是参预决策的人。在这里，分散控制的概念是假设决策过程是协调进行的，即各控制器只要利用先验的规则处理在线信息，便能达到统一的目标。反之，如果分散决策者或控制器各自具有不同的目标，而这些目标又互相对立时，则需要应用对策或博弈论。这种情况不属于本书讨论的范围。

分散控制的提出来源于许多实际的工程问题。典型的例子有：

电力系统。在这个系统中，电网的各部分以及不同的电站受不同的控制器控制。这些局部（地区性的）控制按照先验的规则工作，但是每个局部电站的控制既无在线信息交换又不可能进行实时的复杂计算。

大工厂的过程控制系统。工厂的装置工作在稳定状态，而局部的跟踪控制器需调整控制变

量到设定值，这样可保证过程的稳定，并可减少作用在装置上的瞬间扰动的冲击。在这种情况下，要得到在线集中参数的数据资料，或者在实际上是行不通的（由于时间的限制），或者是代价太高。即使有可能在某一处获得整体控制所需的全部信息，但人们可能仍然情愿采用分散控制的方法，以减少在线实时计算量，从而有可能更好地应付紧急情况。例如，如果某个单输入单输出控制回路不能正常工作了，过程控制操作员（或控制器）通常会知道如何处理，并做出相应的反应。但是如果某一多变量控制器发生故障，即使是有经验的操作员也难以采取正确的行动消除故障。由此可见，成功的分散控制可以使系统的处理大为简化。

快速复杂的伺服系统，例如工业机器人。在这一例子中机器人的运动控制需对输入的信息和测量数据做出立即反应，而事实上想利用全部的数据集合计算每一步的控制是不可能的，因为计算周期要大大超过动作时间。

对于上述诸例子无须进行深入详细的分析，即可以粗略地把分散控制划分为如下几种类型：

A 类：跟踪控制。在这种情况下，理想的系统行为（例如稳态弹道）是由上层控制机构决定的，它工作在一个比较缓慢的时间比例中；而局部控制器的目的是使系统按照需求工作，这里分为两种情况：

A1 类：系统长时间处于稳定状态（典型例子为过程控制）。为了研究这一系统的行为并设计适合的分散跟踪控制规则，可以利用线性动态系统的时不变描述方法，即在“工作点”附近局部系统均可以视为处于线性定常状态，而性能指标仍可以用线性二次型作为代价函数。

A2 类：参考弹道变化很快，并且无法事先预知（典型的例子为复杂伺服系统）。这时分散控制器的设计要用到非线性模型并要考虑到饱和效应等因素。

B 类：“管理型”控制。在这种情况下，局部控制器必须采取适当的控制步骤以保证系统有满意的行为。在这里不存在参考工作点或参考弹道。同时，控制周期可能是无限的。例如，许多水库的水闸控制便是这种情况。

目前存在的理论大都只能用于 A1 类的问题，因为线性时不变系统可以用定量的方法进行有效的研究。当然，应用这种定量的研究时，人们将会发现，即使对于线性系统，定量地研究分散控制也是非常困难的。A2 类问题就复杂得多了，而 B 类的研究则更加复杂，也难于观察。本书将在最后一章对于线性非时变系统的分散控制作概要介绍。

综上所述，大系统的研究可以用图 1.1 所示来说明。

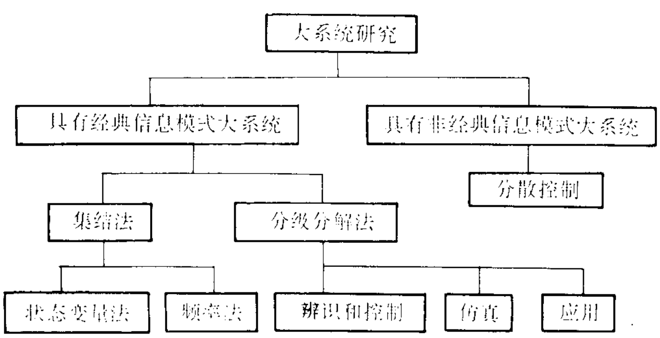


图 1.1　大系统的研究思路

在上图中，应用频率法解决大系统问题，主要针对工程应用，通过分析系统的频率特性将模型简化；辨识和控制以及并行仿真均利用前面所述的分级分解法的基本思路；图论应用主要是利用图和集合的概念解决大系统任务分解问题。其余各方框的基本概念前面已逐一做过介绍，详细内容将在后文介绍。

参 考 文 献

[1] Singh, M.G., Dynamical Hierarchical Control, North Holland, Amsterdam, 1980.

[2] Findeisen, W. et al, Control and Coordination in Hierarchical Systems, Wiley (International Series on Applied Systems Analysis), 1980.

[3] Singh, M. G. et al, Systems: Decomposition, Optimisation and Control, Pergamon Press, 1978.

[4] Bernussou, J. et al, Interconnected Dynamical Systems: Stability, Decomposition and Decentralization, North Holland, Amsterdam, 1982.

[5] Confmat, J. P. et al, Decentralised Control of Linear Multivariable Systems Automatica 12, 1976. pp 479—495.

[6] Lce, E. S. (1968), Quasilinearisation and Invariant Imbedding, Academic Press, New York, pp 179—212.

[7] Sage, A. P et al, System Identification, Academic Press, New York.

[8] Warland, P. B., Parallel Methods for the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations IEEE Trans. Comp. Oct 1976. pp 1045—1048.

[9] Hagedorn, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 13, 1978, pp 103—116.

第二章　大系统的模型简化

2.1 引　言

系统建模是设计和分析的第一步，模型的准确性以及可处理性对于最终设计的系统性能有直接影响。建模的过程一般包括以下三个阶段：①根据物理概念确定模型的结构，建立物理模型；②参数估值；③模型验证。通常，对于被研究的对象（装置），通过试验获得有关参数，然后根据物理定律给出初步的系统模型。但是，这样获得的模型常常阶次很高难以直接分析和处理。例如，英国壳牌卡林顿公司的一个锅炉的模型可能高达 20 阶，含有 400 个待估计的参数。在这种情况下，尽管所获得的模型可以反映系统物理规律，具有切合实际的结构，但其参数可能是不精确的，因此必须进行参数估值。当参数太多时，估值的难度大大增加。例如在前述的例子中，要估计 400 个参数值是不可能的，因此有必要对模型进行简化，以克服优化或控制设计的困难。

模型简化可以通过物理方法或数学方法进行。用物理方法简化，主要是基于物理概念的思索或直觉的考虑，这包括忽略某些不起主导作用的子系统的动态环节，但这种方法并非经常有效。因此，数学手段便显示出其优越性，因为它不需要对装置的物理行为有深刻的理解，也不会犯直觉的错误。

本章所述的模型简化方法实质上就是一种数学的方法。这样它就对于任何具有不同物理概念的系统都适用。模型简化方法主要是保留模型的主导变量，同时又不改变原装置各变量的物理含义，而且也不在系统模型中引入新的参数。

在模型简化中，系统的刚度和零特征值的出现将限制所选用的方法。从 50 年代末到 60 年代初，随着自动控制技术的发展，人们对于复杂系统的简化问题给予了越来越高的重视，各种简化方法也相继出现。但是，有些方法对于具有奇异的结构矩阵以及刚性很大的系统并不适用。本章在时域的简化方法中主要以 Marshall 和 Litz 所发展起来的方法为基础，通过简化，满足以下要求：

(1) 简化后的模型保持原来的物理含义；

(2) 保留主导模式；

(3) 适合于具有奇异结构矩阵的系统；

(4) 系统的刚度不会导致简化的困难，只是在计算特征值时比较复杂。

设一线性连续系统的方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0 \tag{2.1}$$

其中状态变量 $x \in R^n$，输入矢量 $u \in R^p$，矩阵 A 和 B 分别为具有适当维数的状态矩阵。

模型简化的基本思路就是要保留主导变量和正确的稳态行为，忽略那些衰减很快的非主导变量。下面在时域研究的模型简化中，主要通过优化理论，确立主导变量的选择，使得简化后的模型和原有模型间的偏差最小。

2.2 模型简化的基本方法

研究(2.1)式所表达的系统，对变量 x 做约当变换：

$$x = Vz \tag{2.2}$$

将上式应用于(2.1)式，则有

$$\dot{z} = \Lambda z + Gu \tag{2.3}$$

其中 Λ 为对角阵，$\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n\}$，且

$$\Lambda = V^{-1}AV \tag{2.4}$$

$$G = V^{-1}B \tag{2.5}$$

对角阵 Λ 的诸元素即为矩阵 A 的特征值，也就是系统的极点，假定系统矩阵 A 为满秩矩阵，这样它就有 n 个线性无关的特征矢量 v_i，它们构成了矩阵 V 的列矢量，分别对应 n 个不同的特征矢量 λ_i。对于实际的大系统而言，大多数都导致满秩的系统矩阵，因此不讨论降秩的情况。

设简化后的系统为 m 阶，则需原保留 Λ 中的 m 个特征值，为方便起见，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 为保留特征值，$\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n$ 为去掉的特征值。在一般情况下，要保留的特征值不可能按照顺序恰好为 λ_1 到 λ_m。在这种情况下，可以通过置换 V 矩阵中特征矢量(列矢量)的位置以及相应的 G 矩阵中行矢量的位置使之满足这一要求。

例如

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

它对应的特征矩阵为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

现在欲保留特征值 λ_1 和 λ_2，故应将它们排列到第一、第二行。

对矩阵 V 做置换，将 V 的第二列和第三列互换：

$$V' = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{13} & v_{12} & v_{14} \\ v_{21} & v_{23} & v_{22} & v_{24} \\ v_{31} & v_{33} & v_{32} & v_{34} \\ v_{41} & v_{43} & v_{42} & v_{44} \end{bmatrix}$$

故有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = V' \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_4 \end{bmatrix} \triangleq V'z'$$

此时对应的特征值矩阵为

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_3 & & \\ & & \lambda_2 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

设系统原来的方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

展开为

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + g_{11}u_1 + g_{12}u_2$$
$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + g_{21}u_1 + g_{22}u_2$$
$$\dot{z}_3 = \lambda_3 z_3 + g_{31}u_1 + g_{32}u_2$$
$$\dot{z}_4 = \lambda_4 z_4 + g_{41}u_1 + g_{42}u_2$$

为保持上述 4 个等式不变，置换后的矩阵关系式显然应为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_3 & & \\ & & \lambda_2 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \triangleq \Lambda' z' + G' \boldsymbol{u}$$

式中 G' 即为 G 矩阵交换第二行和第三行之后所得结果。

根据这一思想，Λ 矩阵可以写成

$$\Lambda = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & \lambda_m & & & \\ \hline & & & \lambda_{m-1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Λ_1 包含主特征值，而 Λ_2 中则包含要舍去的特征值。

和(2.6)式相对应有

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad G_1 \text{ 为 } m \times p \text{ 维}, G_2 \text{ 为} (n-m) \times p \text{ 维} \tag{2.7}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad z_1 \text{ 为 } m \text{ 维}, z_2 \text{ 为} (n-m) \text{ 维} \tag{2.8}$$

同样，特征矢量矩阵 V 可以写成

$$V = \left[\begin{array}{c|c} V_{11} & V_{12} \\ \hline V_{21} & V_{22} \end{array}\right] \tag{2.9}$$

其中 V_{11}为 $m \times m$ 维；V_{12}为 $m \times (n-m)$维；V_{21}为 $(n-m) \times m$ 维；V_{22}为 $(n-m) \times (n-m)$维。

参照前面的例子，有

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$G_1=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{bmatrix} \qquad G_2=\begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix}$$

$$V_{11}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{13} \\ v_{21} & v_{23} \end{bmatrix} \qquad V_{12}=\begin{bmatrix} v_{12} & v_{14} \\ v_{22} & v_{24} \end{bmatrix}$$

$$V_{21}=\begin{bmatrix} v_{31} & v_{33} \\ v_{41} & v_{43} \end{bmatrix} \qquad V_{22}=\begin{bmatrix} v_{32} & v_{34} \\ v_{42} & v_{44} \end{bmatrix}$$

方程(2.3)式现在可以分解成主导模式和非主导模式：

$$\dot{z}_1=\Lambda_1 z_1+G_1\boldsymbol{u} \qquad \text{主导模式} \tag{2.10}$$

$$\dot{z}_2=\Lambda_2 z_2+G_2\boldsymbol{u} \qquad \text{非主导模式} \tag{2.11}$$

这里选取 m 个变量为基本状态变量，它们构成 $\boldsymbol{x}_1$。基本状态变量选取的原则通常是：

(1) 这些状态变量在实际问题中的重要性以及在系统中的作用。避免那些有重要意义的或者对于分析问题有直接帮助作用的变量在简化的模型中消失。

(2) 一个系统中最慢的衰减模式对于某一状态变量的影响。如果考虑系统的输出方程，则希望保留那些直接作为输出量的状态变量。

按照事先选定的 m 个状态变量，有

$$\boldsymbol{x}_1=V_{11}z_1+V_{12}z_2$$

注意到这里同时包含了主导项 z_1 和非主导项 z_2。必须将 z_2 消去。为此，用主导项的内容 z_1 来近似表述 z_2，则有

$$z_2\approx Ez_1 \tag{2.12}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为误差矩阵，将在后面详细研究它的确定方法。这样，就有

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{z}_2\approx(V_{11}+V_{12}E)z_1\triangleq F\boldsymbol{z}_1 \tag{2.13}$$

同理

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{V}_{21}\boldsymbol{z}_1+V_{22}\boldsymbol{z}_2\approx(V_{21}+V_{22}E)z_1\triangleq L\boldsymbol{z}_1 \tag{2.14}$$

由(2.13)式得

$$z_1=F^{-1}\boldsymbol{x}_1 \tag{2.15}$$

实际只对主导模式感兴趣，将(2.13)，(2.15)式代入(2.10)式中，有

$$F^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}_1=\Lambda_1F^{-1}\boldsymbol{x}_1+G_1\boldsymbol{u}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=F\Lambda_1F^{-1}\boldsymbol{x}_1+FG_1\boldsymbol{u} \tag{2.16a}$$

或者写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=\widetilde{A}\boldsymbol{x}_1+\widetilde{B}\boldsymbol{u} \tag{2.16b}$$

式中

$$\widetilde{A}=F\Lambda_1F^{-1} \tag{2.17}$$

$$\widetilde{B}=FG_1 \tag{2.18}$$

这样，就完成了模型简化的基本过程。

为了便于理解，将本节关于模型简化的基本思想归纳如下：

给定 n 维系统(2.1)式，欲将它的模型简化成 m 维($m<n$)的步骤是：

(1) 确定 m 个要保留的状态变量，并把它们按照顺序排列为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，同时将相应的系统矩阵 A 进行置换，保证方程组原有的关系式不变。

(2) 求矩阵 A 的特征值，得 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，同时求出其对应的特征矢量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$，并构成矩阵 $V=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]$。

(3) 选定主导模式，即确定要保留的 m 个特征值(选取的原则在下节详述)，并把它们分别