高等学校理论物理学读物丛书

光的偏振

张之翔 著

高等教育出版社

高等学校理论物理学读物丛书

光 的 偏 振

张 之 翔

高 等 教 育 出 版 社

内 容 简 介

本书是北京大学张之翔同志编写的一本光学教学参考书。全书从理论上论述了反射光、折射光、虹霓，双折射和塞曼效应中光的偏振问题，数学推导较为详细。在每章之后写明了参考文献，书末附有索引。可供理科本科生和研究生作为理论物理学课程的课外读物，也可供高校教师及有关科技工作者参考。

高等学校理论物理学读物丛书
光 的 偏 振
张之翔 著
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
顺义小店印刷厂印装
开本850×1168 1/32 印张3.125 字数78,000
1985年 7月第1版　　1985年 7月第1次印刷
印数 00,001—56,00
书号 13010·01031　　定价0.75元

序

这是为大学生、研究生、高校教师和有关科技工作者写的参考书，是结合近几年来的工作写的，所以带有专题的性质。总的是想用基础理论来阐明一些光的偏振现象。为了便于阅读，有些地方在数学推导方面写得比较详细。

由于学识所限，错误和不妥之处，自知不免。如蒙读者指教，则不胜感谢。

张之翔

1982春于北大朗润园

目　录

第一章　反射光和折射光的偏振

在这一部分，我们用麦克斯韦的电磁理论研究反射光和折射光的偏振问题。为此，需要先提一下麦克斯韦的电磁理论，然后由它求出反射光和折射光，再根据所得结果分析反射光和折射光的偏振情况。

§1　理论基础

麦克斯韦在上一世纪中叶对物理学作出的伟大贡献之一，就是建立了电磁场理论，并提出了光的电磁理论。一百多年来，各方面的实验都证实，光就是电磁波；人眼可见的光是频率为 $4\times10^{14}\sim7.5\times10^{14}$ 赫兹的电磁波。因此，光的波动性质都包含在描述电磁场的麦克斯韦方程组和表征物质电磁性质的物质方程组中。这里我们由这些方程组出发，从理论上说明光的一些偏振现象。

用国际单位制(SI)表示，麦克斯韦方程组为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{I}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{II}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{III}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{IV}$$

对于各向同性的媒质来说，物质方程组为

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E} \tag{V}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{VI}$$

$$J=\sigma E \tag{VII}$$

式中 ϵ 是介电常数，μ 是磁导率，σ 是电导率。

在讨论光的反射和折射时，还要用到两个媒质交界面上电磁场的边值关系，这些关系可以由麦克斯韦方程组推出。由于在要讨论的问题里，交界面上的宏观电荷和电流都为零，这时由麦克斯韦方程组导出的四个边值关系便为

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=0 \tag{I$'$}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0 \tag{II$'$}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \tag{III$'$}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0 \tag{IV$'$}$$

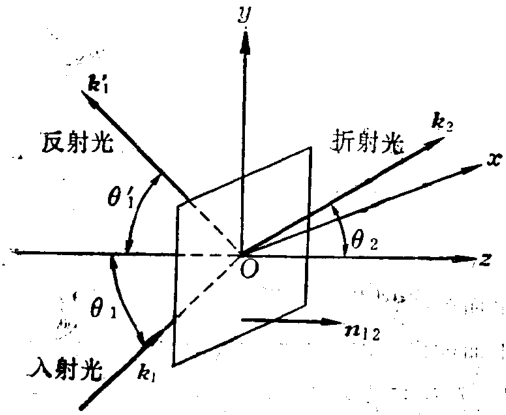
式中下标 1 和 2 分别代表第一种媒质和第二种媒质，$\boldsymbol{n}_{12}$ 代表交界面法线方向上的单位矢量，方向从 1 到 2 。可以证明，在平面单色波的情况下，这四个边值关系只有两个是独立的，例如可以从(II)′推出(III)′，可以从(IV)′推出(I)′。

§ 2 光的反射和折射

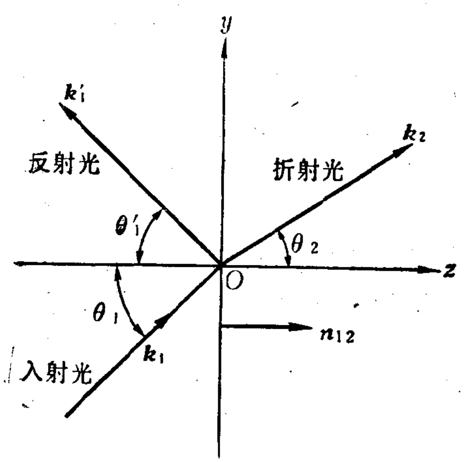
1. 问题说明

先考虑光射到两个各向同性的均匀绝缘媒质的交界面上发生的情况。由实验可知，一束光射到两个媒质的交界面上时，会产生反射光和折射光。在理论上，由电磁场的边值关系，可以推知有反射光和折射光的存在。由于不考虑散射问题，所以反射和折射的讨论便限制在这样一块交界面上，它是平面，线度比光的波长大很多。这样一来，问题就可以简化为，平行的单色光入射到无限大的平面交界面上，求产生的反射光和折射光。

把两媒质的交界面作为 xy 平面，取笛卡儿坐标如图 1.1 。设入射光、反射光和折射光的波矢量(也叫做传播矢量)分别为 $\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_1'$ 和 $\boldsymbol{k}_2$，频率分别为 ω_1、ω_1' 和 ω_2，则这三个光的电矢量便可写作



(1)立体图



(2) 侧视图

图 1.1 光在两媒质交界面上的反射和折射

$$\text{入射光}\qquad \boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{E}_{10}e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t)} \tag{1.1}$$

$$\text{反射光}\qquad \boldsymbol{E}_r=\boldsymbol{E}'_{10}e^{i(\boldsymbol{k}'_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega'_1 t)} \tag{1.2}$$

$$\text{折射光}\qquad \boldsymbol{E}_t=\boldsymbol{E}_{20}e^{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t)} \tag{1.3}$$

我们的问题就是，给定入射光，求反射光和折射光，即给定入射光的 $\boldsymbol{E}_{10}$、$\boldsymbol{k}_1$ 和 ω_1，求反射光的 $\boldsymbol{E}'_{10}$、$\boldsymbol{k}'_1$ 和 ω'_1 以及折射光的 $\boldsymbol{E}_{20}$、$\boldsymbol{k}_2$ 和 ω_2。[这里需要指出，给定入射光(1.1)，从理论上讲，反射光和折射光究竟是什么形式的光，还不知道。但根据傅氏(Fourier)理论，任何形式的光都可以由平面单色光迭加而成，这里的(1.2)式和(1.3)式，便是其中的一个傅氏分量。根据后面的分析可知，所有的傅氏分量都必须满足边值关系，结果反射光和折射光就都只能是平面单色光。]

下面就详细地叙述求解过程和所得结果，并阐明其物理意义。

2. 光在射过交界面时频率不变

由物质方程(V)和边值关系(I)′得

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\epsilon_2\boldsymbol{E}_2-\epsilon_1\boldsymbol{E}_1)=0$$

由图 1.1 和(1.1)至(1.3)式知，这时 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r$，$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_t$，代入上式便得

$$\epsilon_2\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{E}_t=\epsilon_1\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r)$$

即

$$\epsilon_2\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{E}_{20}e^{i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}=\epsilon_1\boldsymbol{n}_{12}\cdot[\boldsymbol{E}'_{10}e^{i\boldsymbol{k}'_1\cdot\boldsymbol{r}}e^{i(\omega_2-\omega'_1)t}+\boldsymbol{E}_{10}e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}e^{i(\omega_2-\omega_1)t}] \tag{1.4}$$

这个式子右边是时间 t 的指数函数，而左边却与 t 无关；由于 t 是独立变量，故要上式成立，右边也必须与 t 无关。唯一的可能性就是

$$\omega_2=\omega'_1=\omega_1 \tag{1.5}$$

这个式子表明，反射光和折射光的频率都与入射光的相同。也就是说，电磁波从一个媒质越过边界进入另一媒质时，它的频率不变。这个结果还启示我们，用频率来标志电磁波比用波长好，因为

波长与媒质有关，同一个单色波射到不同的媒质里，它的波长是不同的，而频率则在任何媒质中都一样。因此，在后面就用同一个 ω 来标志入射光、反射光和折射光的频率，而不必再加下标 1 或 2 了。

3．反射光线和折射光线都在入射面内

把(1.5)式代入(1.4)式得

$$\epsilon_2 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}_{20}e^{i\boldsymbol{k}_2\cdot \boldsymbol{r}}-\epsilon_1 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}'_{10}e^{i\boldsymbol{k}'_1\cdot \boldsymbol{r}}=\epsilon_1 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}_{10}e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot \boldsymbol{r}}$$

取 yz 平面为入射面(图 1.1)，则 $k_{1x}=0$；又 $z=0$ 为交界面，故上式化为

$$\epsilon_2 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}_{20}e^{i(k'_{1x}x+k'_{1y}y)}-\epsilon_1 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}'_{10}e^{i(k_{1x}x+k_{1y}y)}=$$
$$=\epsilon_1 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}_{10}e^{ik_{1y}y} \qquad (1.6)$$

这个等式在交界面上任何地方都应成立，在 $y=0$ 处也必定成立，故得

$$\epsilon_2 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}_{20}e^{ik_{2x}x}-\epsilon_1 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}'_{10}e^{ik'_{1x}x}=\epsilon_1 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}_{10}$$

这个等式在 x 为任何值时都成立，唯一的可能是

$$k_{2x}=k'_{1x}=0 \qquad (1.7)$$

这个式子表明，$\boldsymbol{k}'_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 都在入射面（yz 平面）内。它的物理意义为：光入射到两个各向同性的绝缘媒质交界面上时，产生的反射光线和折射光线都在入射面内。由此得出，入射光线、反射光线、折射光线和交界面的法线四者都在同一平面内。

4．反射定律和斯涅耳定律

把(1.7)式代入(1.6)式，经整理得

$$\epsilon_2 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}_{20}e^{i(k_{2y}-k_{1y})y}-\epsilon_1 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}'_{10}e^{i(k'_{1y}-k_{1y})y}=\epsilon_1 \boldsymbol{n}_{12}\cdot \boldsymbol{E}_{10}$$

此式应对 y 为任何值时都成立，因此唯一的可能是

$$k_{2y}=k'_{1y}=k_{1y} \qquad (1.8)$$

即波矢量平行于交界面的分量都相等，亦即

$$k'_1\sin\theta'_1=k_1\sin\theta_1 \qquad (1.9)$$

$$k_2\sin\theta_2=k_1\sin\theta_1 \qquad (1.10)$$

因为由电动力学有

$$k_1'=\omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}=k_1 \tag{1.11}$$

而 θ_1' 和 θ_1 都在 90°以内，故由(1.9)式得

$$\theta_1'=\theta_1 \tag{1.12}$$

这就是反射定律。

由(1.10)和(1.11)式以及麦克斯韦关系式

$$n=\frac{c}{v}=c\sqrt{\epsilon\mu} \tag{1.13}$$

得

$$n_2\sin\theta_2=n_1\sin\theta_1 \tag{1.14}$$

这就是光的折射的斯涅耳定律(W. Snell,1621)，其中 n_2 和 n_1 分别是媒质 2 和 1 的折射率。

根据以上的分析和结果，得出：(1.1)、(1.2)和(1.3) 三式中 e 的指数都相同，即

$$\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t=\boldsymbol{k}_1'\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1' t=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t \tag{1.15}$$

注意，(1.5)、(1.7)和(1.8) 三式是电磁场的边值关系所要求的结果，也是在前面假定反射光和折射光都是平面单色光［即由(1.2)和(1.3)式表示］的根据。

5. 菲涅耳公式

前面曾指出，我们的目的是研究反射光和折射光的偏振，为此需要先求出反射光和折射光。前面已经求出了 $\boldsymbol{k}_1'$、$\boldsymbol{k}_2$、ω_1' 和 ω_2，剩下的就是求 $\boldsymbol{E}_{10}'$ 和 $\boldsymbol{E}_{20}$。

由边值关系(II)′得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_t-\boldsymbol{E}_i-\boldsymbol{E}_r)=0 \tag{1.16}$$

把(1.1)、(1.2)、(1.3)和(1.15)等式代入上式便得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_{20}-\boldsymbol{E}_{10}'-\boldsymbol{E}_{10})=0 \tag{1.17}$$

为了求出 $\boldsymbol{E}_{10}'$ 和 $\boldsymbol{E}_{20}$，我们以入射面为准，把电矢量($\boldsymbol{E}$) 都分解为

垂直于入射面的分量($\boldsymbol{E}_{\perp}$)和平行于入射面的分量($\boldsymbol{E}_{\parallel}$)，如图 1.2 所示即

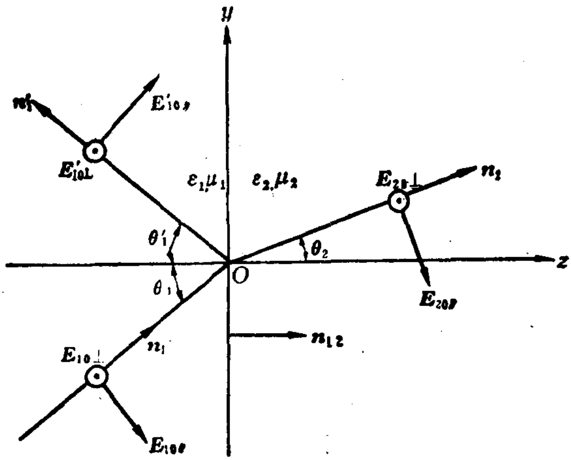


图 1.2 把光的电矢量分解成垂直于和平行于入射面的分量

$$\boldsymbol{E}_{10}=\boldsymbol{E}_{10\perp}+\boldsymbol{E}_{10\parallel} \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{E}'_{10}=\boldsymbol{E}'_{10\perp}+\boldsymbol{E}'_{10\parallel} \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{E}_{20}=\boldsymbol{E}_{20\perp}+\boldsymbol{E}_{20\parallel} \tag{1.20}$$

把(1.18)、(1.19)和(1.20)三式代入(1.17)式便得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_{20\perp}+\boldsymbol{E}_{20\parallel}-\boldsymbol{E}'_{10\perp}-\boldsymbol{E}'_{10\parallel}-\boldsymbol{E}_{10\perp}-\boldsymbol{E}_{10\parallel})=0 \tag{1.21}$$

由图 1.2 可见，$\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{20\perp}$、$\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}'_{10\perp}$ 和 $\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{10\perp}$ 都是逆平行于 y 轴的矢量，而 $\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}$、$\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}'_{10\parallel}$ 和 $\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}$ 则都是平行于 x 轴的矢量。一个矢量等于零，它在笛卡儿坐标系里的每个分量必定都等于零。因此，(1.21) 式中平行于 y 轴的分量和平行于 x 轴的分量必定都分别等于零，于是便得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_{20\perp}-\boldsymbol{E}'_{10\perp}-\boldsymbol{E}_{10\perp})=0 \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_{20\parallel}-\boldsymbol{E}'_{10\parallel}-\boldsymbol{E}_{10\parallel})=0 \tag{1.23}$$

由图 1.2 知矢量 $(\boldsymbol{E}_{20\perp}-\boldsymbol{E}_{10\perp}'-\boldsymbol{E}_{10\perp})$ 与矢量 $\boldsymbol{n}_{12}$ 垂直，故由(1.22)式得知

$$\boldsymbol{E}_{20\perp}-\boldsymbol{E}_{10\perp}'-\boldsymbol{E}_{10\perp}=0 \tag{1.24}$$

(1.24)和(1.23)就是由边值关系(II)′ 得出的关于这四个未知量 $\boldsymbol{E}_{20\perp}$、$\boldsymbol{E}_{10\perp}'$、$\boldsymbol{E}_{20\parallel}$ 和 $\boldsymbol{E}_{10\parallel}'$ 的两个式子，要想解出这四个未知量，还需要另外两个式子。它们可由边值关系(IV)′和单色平面波的关系式

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} \tag{1.25}$$

得出，过程如下。为方便起见，令

$$\boldsymbol{k}_1=k_1\boldsymbol{n}_1,\quad \boldsymbol{k}_1'=k_1\boldsymbol{n}_1',\quad \boldsymbol{k}_2=k_2\boldsymbol{n}_2 \tag{1.26}$$

则由边值关系(IV)′和(1.25)、(1.26)、(1.5)三式得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times\left(\frac{k_2}{\mu_2}\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_t-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_r-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_i\right)=0$$

把(1.18)、(1.19)和(1.20)三式代入上式，并利用(1.15)式便得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times\left(\frac{k_2}{\mu_2}\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\perp}-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10\perp}'-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\perp}\right)+$$
$$+\boldsymbol{n}_{12}\times\left(\frac{k_2}{\mu_2}\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}'-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}\right)=0 \tag{1.27}$$

由图 1.2 可见，$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\perp})$、$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10\perp}')$ 和 $\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\perp})$ 都是平行于 x 轴的矢量，而 $\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel})$、$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}')$ 和 $\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel})$ 则都是平行于 y 轴的矢量。一个矢量等于零，它在笛卡儿坐标系里的每个分量必定都等于零。于是便得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times\left(\frac{k_2}{\mu_2}\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\perp}-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10\perp}'-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\perp}\right)=0 \tag{1.28}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times\left(\frac{k_2}{\mu_2}\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}'-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}\right)=0 \tag{1.29}$$

这就是所要求的四个未知量 $\boldsymbol{E}_{20\perp}$、$\boldsymbol{E}_{10}'_{\perp}$、$\boldsymbol{E}_{20\parallel}$ 和 $\boldsymbol{E}_{10}'_{\parallel}$ 的另外两个式子。(1.23)、(1.24)、(1.28)和(1.29)四个式子联立，便可求出上述四个未知量了。

为了解出 $\boldsymbol{E}_{10}'_{\perp}$ 和 $\boldsymbol{E}_{20\perp}$,需要把(1.28)式变形。由图 1.2 得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\perp})=(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{E}_{20\perp})\boldsymbol{n}_2-(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{E}_{20\perp}=-\cos\theta_2\boldsymbol{E}_{20\perp} \tag{1.30}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10}'{}_{\perp})=(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{E}_{10}'{}_{\perp})\boldsymbol{n}_1'-(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{n}_1')\boldsymbol{E}_{10}'{}_{\perp}=\cos\theta_1\boldsymbol{E}_{10}'{}_{\perp} \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\perp})=(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{E}_{10\perp})\boldsymbol{n}_1-(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{E}_{10\perp}=-\cos\theta_1\boldsymbol{E}_{10\perp} \tag{1.32}$$

故(1.28)式可化为

$$-\frac{k_2}{\mu_2}\cos\theta_2\boldsymbol{E}_{20\perp}-\frac{k_1}{\mu_1}\cos\theta_1\boldsymbol{E}_{10\perp}'+\frac{k_1}{\mu_1}\cos\theta_1\boldsymbol{E}_{10\perp}=0 \tag{1.33}$$

由(1.24)和(1.33)两式解得

$$\boldsymbol{E}_{10\perp}'=\frac{k_1\mu_2\cos\theta_1-k_2\mu_1\cos\theta_2}{k_1\mu_2\cos\theta_1+k_2\mu_1\cos\theta_2}\boldsymbol{E}_{10\perp} \tag{1.34}$$

$$\boldsymbol{E}_{20\perp}=\frac{2\,k_1\mu_2\cos\theta_1}{k_1\mu_2\cos\theta_1+k_2\mu_1\cos\theta_2}\boldsymbol{E}_{10\perp} \tag{1.35}$$

这就是我们所要求的 $\boldsymbol{E}_{10}'_{\perp}$ 和 $\boldsymbol{E}_{20\perp}$。

$\boldsymbol{E}_{10}'_{\parallel}$ 和 $\boldsymbol{E}_{20\parallel}$ 两者与 $\boldsymbol{E}_{10\parallel}$ 的关系,比$\boldsymbol{E}_{10}'_{\perp}$ 和$\boldsymbol{E}_{20\perp}$两者与 $\boldsymbol{E}_{10\perp}$ 的关系要复杂一些,这是因为,$\boldsymbol{E}_{10\perp}$、$\boldsymbol{E}_{10}'_{\perp}$、$\boldsymbol{E}_{20\perp}$ 三者都与入射面垂直,故 $\boldsymbol{E}_{10}'_{\perp}$ 和 $\boldsymbol{E}_{20\perp}$都与 $\boldsymbol{E}_{10\perp}$ 平行或逆平行，关系简单。而 $\boldsymbol{E}_{10}'_{\parallel}$ 和 $\boldsymbol{E}_{20\parallel}$ 与 $\boldsymbol{E}_{10\parallel}$的关系就没有这样简单。要把 $\boldsymbol{E}_{10}'_{\parallel}$ 和 $\boldsymbol{E}_{20\parallel}$ 的大小和方向都表示出来，就必须把(1.23)和(1.29)两式都化成 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}$、$\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10}'_{\parallel}$、$\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}$ 的形式。由图 1.2 可见,矢量 $\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}$ 与矢量 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}$的方向相同,其大小的关系为

$$|\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}|=\boldsymbol{E}_{10\parallel}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=|\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}|\cos\theta_1$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}=\cos\theta_1\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}$$

根据类似的分析得

$$\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{10}{'}_{\parallel}=-\cos\theta_1\boldsymbol{n}_1{'}\times\boldsymbol{E}'_{10\parallel}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}=\cos\theta_2\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}$$

把以上三式代入(1.23)式得

$$\cos\theta_2\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}+\cos\theta_1\boldsymbol{n}_1{'}\times\boldsymbol{E}_{10}{'}_{\parallel}-\cos\theta_1\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}=0 \tag{1.36}$$

再看(1.29)式，因 $\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}$、$\boldsymbol{n}_1{'}\times\boldsymbol{E}_{10}{'}_{\parallel}$ 和 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}$ 都是平行于 x 轴的矢量，$\boldsymbol{n}_{12}$ 是垂直于 x 轴的单位矢量，故由(1.29)式得

$$\frac{k_2}{\mu_2}\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1{'}\times\boldsymbol{E}_{10}{'}_{\parallel}-\frac{k_1}{\mu_1}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel}=0 \tag{1.37}$$

由(1.36)和(1.37)两式解得

$$\boldsymbol{n}_1{'}\times\boldsymbol{E}_{10}{'}_{\parallel}=\frac{k_2\mu_1\cos\theta_1-k_1\mu_2\cos\theta_2}{k_2\mu_1\cos\theta_1+k_1\mu_2\cos\theta_2}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel} \tag{1.38}$$

$$\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}=\frac{2k_1\mu_2\cos\theta_1}{k_2\mu_1\cos\theta_1+k_1\mu_2\cos\theta_2}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel} \tag{1.39}$$

(1.34)、(1.35)和(1.38)、(1.39)四式便是我们所要求的四个量 $\boldsymbol{E}_{10}{'}_{\perp}$、$\boldsymbol{E}_{10}{'}_{\parallel}$、$\boldsymbol{E}_{20\perp}$、$\boldsymbol{E}_{20\parallel}$ 的表达式。至此，由给定的入射光(1.1)，求反射光(1.2)和折射光(1.3)的工作便完成了。下面先作一些说明，然后再讨论偏振。

如果用(1.10)式消去(1.34)、(1.35)、(1.38)和(1.39)四式中的 k_1 和 k_2，则所得结果为

$$\boldsymbol{E}_{10\perp}'=-\frac{\mu_1\sin\theta_1\cos\theta_2-\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\mu_1\sin\theta_1\cos\theta_2+\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_1}\boldsymbol{E}_{10\perp} \tag{1.40}$$

$$\boldsymbol{E}_{20\perp}=\frac{2\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\mu_1\sin\theta_1\cos\theta_2+\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_1}\boldsymbol{E}_{10\perp} \tag{1.41}$$

$$\boldsymbol{n}_1{'}\times\boldsymbol{E}_{10}{'}_{\parallel}=\frac{\mu_1\sin\theta_1\cos\theta_1-\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_2}{\mu_1\sin\theta_1\cos\theta_1+\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_2}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel} \tag{1.42}$$

$$\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}=\frac{2\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\mu_1\sin\theta_1\cos\theta_1+\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_2}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel} \tag{1.43}$$

在可见光的频率范围内，一般物体的磁导率都可以认为相等，即

$$\mu_2=\mu_1 \tag{1.44}$$

这时，利用三角函数关系，(1.40)至(1.43)式便可化为

$$\boldsymbol{E}_{10}{}'_{\perp}=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\boldsymbol{E}_{10\perp} \tag{1.45}$$

$$\boldsymbol{E}_{20\perp}=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\boldsymbol{E}_{10\perp} \tag{1.46}$$

$$\boldsymbol{n}_1'\times\boldsymbol{E}_{10}{}'_{\parallel}=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel} \tag{1.47}$$

$$\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{E}_{20\parallel}=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{E}_{10\parallel} \tag{1.48}$$

如果不考虑方向，只考虑大小和指向，则(1.45)至(1.48)式可写作

$$E_{10}{}'_{\perp}=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}E_{10\perp} \tag{1.49}$$

$$E_{20\perp}=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}E_{10\perp} \tag{1.50}$$

$$E_{10}{}'_{\parallel}=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}E_{10\parallel} \tag{1.51}$$

$$E_{20\parallel}=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}E_{10\parallel} \tag{1.52}$$

这四个式子是菲涅耳 (A.J. Fresnel) 在麦克斯韦的理论出世之前(1823 年)，由弹性波的理论推得的，所以现在一般称它为菲涅耳公式。

王