

O. M. 米尼娜

典型调节对象动态特性 和 参数的计算方法

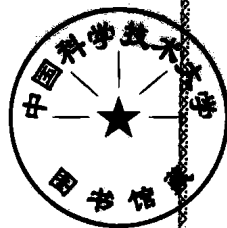
科学出版社

典型調節对象动态特性和 参数的計算方法

O.M.米尼娜著

呂武軒譯

林來興校



科學出版社

1965

О. М. МИНИНА
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ ТИПОВЫХ
РЕГУЛИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Изд. АН СССР, Москва, 1963

内 容 简 介

本书专门叙述了调节对象动态特性的实验测定方法和用 n 阶微分方程和典型方程近似实验数据的问题,即如何根据实验数据来确定调节对象典型方程的参数和微分方程的系数。

本书共分七部分。第 I、II 两部分叙述了工业自动化对象动态特性的实验测定方法;第 III—VI 四部分叙述了如何根据实验飞升曲线和实验幅相特性的数据,求取对象的典型特性的参数和微分方程系数的具体步骤和方法;最后一部分以举例说明上述各种方法如何在实际中的应用。

本书可供从事生产过程自动化工作的科学技术人员,自动控制专业的高年级大学生和教师参考。

典型调节对象动态特性和参数的计算方法

О. М. 米尼娜 著

吕武轩 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 117 号

北京市书刊出版业营业许可证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1965 年 2 月第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32

1965 年 2 月第一次印刷 印张: 1 1/2

印数: 0001—7,500 字数: 37,000

统一书号: 15031 · 177

本社书号: 3151 · 15—8

定价: [科六] 0.26 元

目 录

引言.....	1
I. 实验测定时间特性.....	2
II. 实验测定频率特性.....	5
III. 根据飞升曲线确定微分方程的系数.....	8
IV. 根据飞升曲线确定对象典型特性的参数.....	14
a) 自平衡对象的典型特性.....	14
b) 无自平衡对象的典型特性.....	18
V. 根据幅相特性确定微分方程的系数.....	19
VI. 根据实验幅相特性确定对象典型特性的参数.....	21
VII. 计算调节对象动态特性和参数的实例.....	23

引 言

在这本参考資料中，闡述了調节对象动态特性的实验測定和以 n 阶微分方程及典型方程来近似实验数据的问题，即对象典型特性的参数和微分方程系数的确定方法。

在一个复杂的对象（由各种不同参量所确定的工艺过程）中，可以先分出許多被調量 $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ 和調节作用 $\mu_1 \cdots \mu_l$ 。然后，依次确定每个調节作用同一个或几个被調量之間的关系。其余的調节作用和被調量，可借助于調节器或手动控制，使其維持在給定值，以免影响实验結果。这一阶段工作应协同該生产的工艺师以及根据以往在类似对象上实现自动化的經驗来进行。例如，图 1 中被調量 φ_1 和 φ_4 用調节器 1 和調节器 4 維持恆定，以便在測取沿 $\mu_3 - \varphi_2$ 和 $\mu_3 - \varphi_3$ 两通道的飞升曲綫时，工艺过程的其他量处于稳定状态。

在試驗中正确地选用測量被調量和調节作用的仪器是很重要的。上述各量应选用高灵敏度和快速动作的仪器来测量和記錄：仪器的時間常数要比对象的時間常数小得多。这可以按照事先的計算或根据仪器的已有試驗数据来选定。

总之，在选用測量被調量¹⁾和調节作用的发訊器 (I_1 、 I_2 、 I_3) 时，一定要选小慣性的发訊器，否則，在測定特性时就应采用作为自动調节系統組成元件的发訊器和記錄仪表。在这种情况下要測

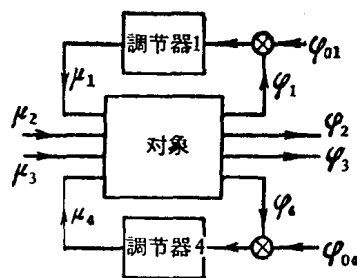


图 1 调节系统的方块图

1) 原文误为调节量——校者注。

取包括对象、发訊器和記錄仪表在內的广义对象的飞升曲綫。

对于大多数工业对象而言,宜于采用 ЭПП-09 型多点自动电位計(笔架滑过全刻度的時間不大于 1 秒,循环時間¹⁾为 0.75 秒,图紙移动速度为 24 毫米/分钟,測量范围为 1 毫伏)来記錄其参量的变化;对于快速过渡过程,則应采用迴綫示波器,其底片或記錄紙的移动速度不低于 5 毫米/秒。

不管是直接的調节作用(加热和冷却介质的流量、燃料量、液体流量等),还是調节机关的位置或加在执行机构上的信号,都可以視具体条件作为調节作用来加以研究。不过后者仅适用于調节机关和执行机构包括在自动調节系統中的情况。

如果已知对象是在調节作用很寬的变化范围内运行,則必須測取当調节作用在若干个初始值时的动态特性,因为在調节作用等于这些值时,对象特性可能出现非綫性。只有在調节作用处于某初始值时,系統才可能进行綫性化。調节作用的变化不仅会使对象参数改变,而且系統的結構也会随之变化。

当自动調节系統的程序(被調量的給定值)和作用于系統的外部扰动,都在很寬的范围内变化时,上述現象是可能发生的。

I. 实验測定時間特性

当調节作用阶跃变化时,被調量随時間的关系称为对象的时间特性或过渡特性,在調节对象中,这种关系常常称之为飞升曲綫。

当調节作用脉冲变化时,被調量随時間的关系称为对象的脉冲飞升曲綫。

实际上,由于調节机关或其他设备的慣性以及移动速度的限制,調节作用在一瞬間就达到某个預定值往往是不可能的。因此,我們有时測取的是所謂“畸变的”飞升曲綫或“畸变的”脉冲飞升曲綫。

1) 即各点打点间隔时间——校者注。

飞升曲线可以这样来测定，在对象上加入一阶跃作用¹⁾(如图 3 所示)并记录被调量的变化和加入的作用。试验线路示于图 2。

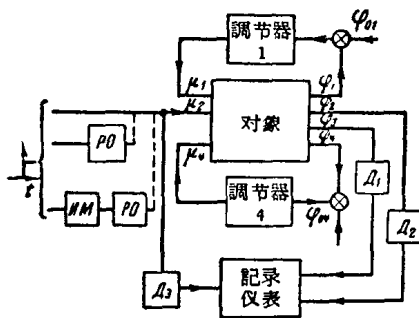


图 2 测取飞升曲线用的仪表联接线路

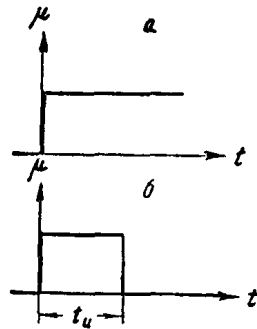


图 3 调节作用

调节作用的选择 假如工艺要求而设备允许调节作用阶跃变化，即可测取飞升曲线(图 3a)；反之，如果按照工艺要求，在研究对象的过程中被调量只能在较窄的范围内改变，那就只能测取脉冲飞升曲线。这时的调节作用的变化形状如图 3b 所示。其中 t_u 为调节作用的延续时间。

在选择作用量时，应考虑到运行中可能出现的最大扰动量、特性的非线性性和干扰程度。扰动量通常可以取最大值的 5—20% (若取值太大，则可能由于特性的非线性引起实验结果不准确；若取值太小，则又会由于干扰的存在，给实验结果的整理工作带来困难)。

试验步骤 首先必须使所要研究被调节量的对象稳定运行。在选择调节作用的初始值时，应使对象中的被调量基本维持恒定。为此，可以锁定外来扰动和稳定对研究结果有影响的其他被调量，稳定状态应当根据对象的动态性质维持足够长的时间。这时间要比过渡过程的历经时间长，通常是从一些试验中摸索出来的。

其次，还要检验一下调节作用改变后系统的稳定性。新的稳态必须与原工况同样稳定。

待对象稳定后，即可进入测取特性的阶段。在所选的某个初

1) 如果阶跃作用是加在调节机关上，那么实验测取的飞升曲线表示对象和调节机关串联时的特性。

始值上加入所选扰动作用 2—3 次,并记录被調量和調节作用的变化情况。然后,对所选其余的初始值重复上述試驗。

試驗結果的整理 在阶跃扰动的情況下, 实验測取的被調量示波图乃是時間特性或飞升曲綫。 图 4a 为自平衡对象的飞升曲綫, 图 4b 为无自平衡对象的飞升曲綫。

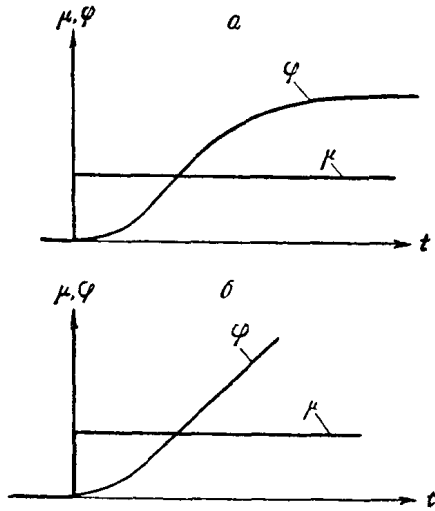


图 4 调节对象的飞升曲线

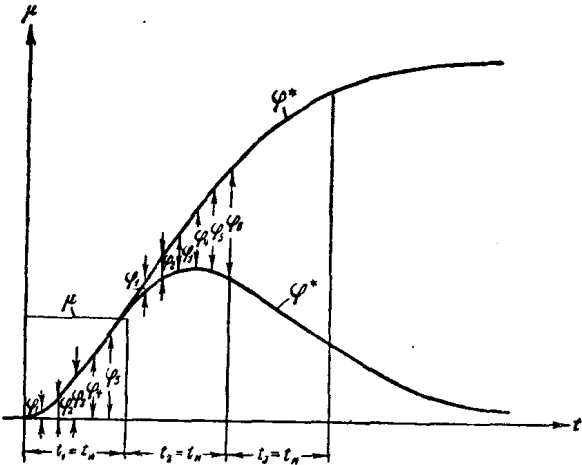


图 5 由脉冲曲线构成飞升曲线

在脉冲扰动的情況下，实验測取的被調量示波图則为脉冲飞升曲綫(图 5 中曲綫 φ^*)；为了得到時間特性，应根据下面方式来作图。用時間間隔 Δt^* 把脉冲曲綫分成 n 等份。在 $t_1 = t_u$ 的区間內，实验曲綫和時間特性是重合的，而在下面的 $t_2 = t_1$ 区間內，脉冲曲綫的縱座标是時間特性的縱座标与 t_1 区間內每一相应時刻的時特性縱座标之差；在 $t_3 = t_2 = t_1$ 的区間內，脉冲曲綫的縱座标又等于時間特性的縱座标与 t_2 区間內每一相应時刻的時特性縱座标之差，依此类推。由此可見，時間特性曲綫是从 t_1 時刻开始繪制的；在 t_2 的区間內，把实验脉冲曲綫的縱座标和 t_1 区間內相应的時特性的縱座标相加，而在 t_3 区間內，則把实验脉冲曲綫的縱座标和 t_2 区間內相应的時特性的縱座标相加，如此繼續作下去，最后即得到飞升曲綫(图 5 中曲綫 φ)。

II. 实验測定頻率特性

在簡諧扰动作用下，环节的穩定运动呈現頻率特性。对象輸出端与輸入端簡諧振蕩的振幅比与振蕩頻率之間的关系称为对象的幅頻特性，而对象輸出端与輸入端簡諧振蕩的相位差与振蕩頻率之間的关系則称为对象的相頻特性。

測定对象的頻率特性，是在一个穩定了的系統中激起周期振蕩，然后記錄对象輸入端与輸出端振蕩曲綫。試驗綫路¹⁾示于图 6 a、б。建議尽可能采取图 6a 的試驗綫路，因为此時的系統处于閉环状态，因而有可能較長時間地进行实验而不致破坏工艺过程；此外，系統还能很好地鎮定外来扰动。

調节作用的选择 采用低頻正弦波发生器来产生周期扰动作用(图 7a)，对于实验和以后的結果整理都是最方便的。实验当中只要发现輸出振蕩曲綫和簡諧振動有任何的差异，都說明系統具有非綫性特性或其他外部扰动。实验进行过程中必須尽可能地消

* $\Delta t = \frac{t_u}{n}$ ，式中 t_u ——脉冲扰动的持续时间， n ——整数($n = 5 \sim 10$)。

1) 周期扰动发生器可以接入变量 φ_2 或 φ_3 的調节迴路中任何方便于实验的地方。

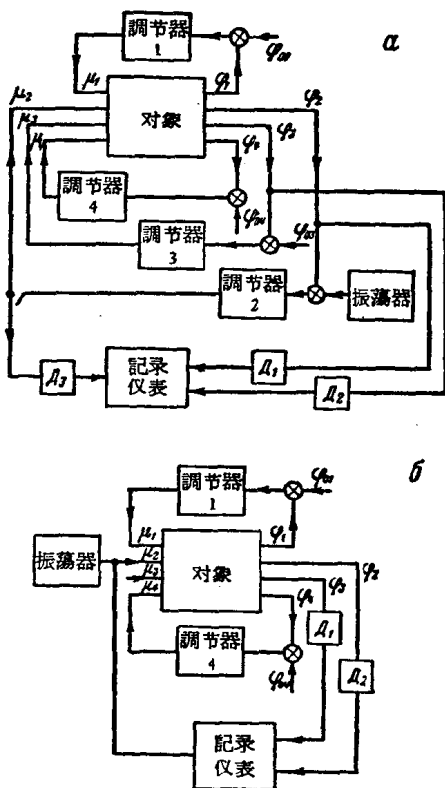


图6 测定对象频率特性的仪表联接线路

整理工作量将大大增加。

在选取作用的幅值 (A) 时, 应考虑到运行当中可能出现最大扰动量、对象特性的非线性性和干扰程度。通常取扰动幅值为可能出现的最大值的 5—25%。

試驗步驟 首先必須使系統象測取時間特性时那样穩定(參閱 I)。如果我們測取閉環系統的特性(參閱图 6), 則很容易做到这点。

为选取頻率范围,

除系統非線性的影响。

在沒有正弦波发生器的場合下, 一般都采用矩形波或梯形波(图 76、B)。产生这类振蕩并不困难, 它們的发生器要比正弦波发生器简单得多, 而对于緩慢过程的对象还可以通过手动控制来产生矩形波或梯形波。不过在这种情况下, 若想找出外部扰动和元件的非线性因素对振蕩曲綫形状的影响是很不容易的, 因为振蕩曲綫的形状还和系統的动态性質、振蕩頻率等因素有关。下面我們就会看到, 在采用矩形波或梯形波来測取对象特性时, 实验結果的

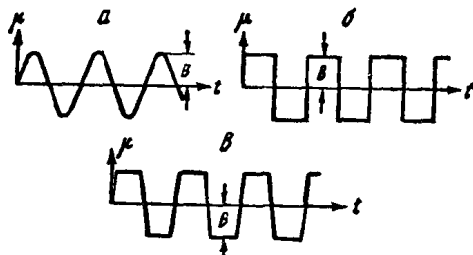


图7 测定对象频率特性的调节作用型式

先要确定最高频率。为此，在所选的系统初始状态下，不断增加扰动作用的振荡频率，直到被调量的振幅趋近于零（或减少到当 $\omega = 0$ 时幅值的 $1/20-1/100$ ）。再把 0 到 $\omega_{\max}$ 这一频带大体上分为 5—10 点（ $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \cdots$ ）。然后，先确定对象的静态特性，也就是找出与稳态相对应的飞升曲线的一点（频率特性在 $\omega = 0$ 时的那点）。在选好初始状态后，即可将已选定的频率为 ω_1 的周期扰动加到系统上，并把被调量和调节作用的稳定振荡曲线记录下来。然后，改变扰动的频率，在 $\omega_2, \omega_3, \omega_4 \cdots$ 的情况下重复上述试验。

假若知道对象的动态性质与系统的初始状态有关，那么要在其他初始状态下，从确定最高频率开始重新进行试验。

实验结果的整理 在往系统中加正弦振荡的情况下，可得在不同频率 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{\max}$ 时的被调量和调节作用的示波图。

稳态时 $\varphi = A \sin(\omega t + \psi)$, $\mu = B \sin \omega t$ ，可求出振幅比 $r = \frac{B}{A}$

和相位差 ψ ，从而绘出系统的幅相特性曲线。

如果加于系统的是矩形波或梯形波，则被调量和调节作用的示波图将是复杂的周期曲线。这种示波图必须以富氏级数的近似展开方法来处理。

在示波图（图 8）上，选取一段时间间隔为 $2\pi/\omega$ 的稳定振荡曲线。然后把示波图上的这段曲线展成富氏级数：

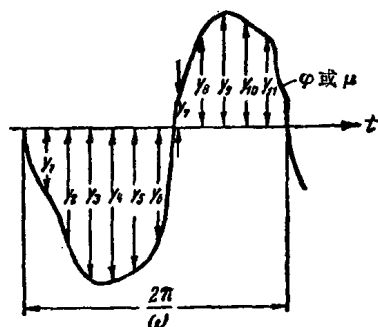


图 8 在简谐作用下被调量变化的示波图

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \cdots; \\ \mu &= B_0 + B_1 \sin(\omega t + \psi'_1) + B_3 \sin(3\omega t + \psi'_3) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由于所加的振荡是矩形波或梯形波，故级数中只含有 ω 的奇次谐波。为了确定富氏级数的系数，将周期 $2\pi/\omega$ 分成 12 等分，并大概量出各等分点的纵坐标值，然后，按图表 1 计算和与差。

表 1

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	S_0	S_1	S_2	S_3	q_1	q_2	q_3
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7		S_4	S_5	S_4		q_5	q_4	
和	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	β_1	β_2	β_3
差		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5		γ_0	γ_1	γ_2				

因为对象通常能滤掉高频振荡,故在确定富氏系数时,只取前三项系数就足够了。

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 \text{ 或 } B_0 &= 0.083 (\sigma_0 + 2\sigma_3 + \sigma_1), \\
 A_1 \text{ 或 } B_1 &= 0.408 \sqrt{(\gamma_0 + 0.5\gamma_2 + 0.866\gamma_1)^2 + (\beta_3 + 0.5\beta_1 + 0.866\beta_2)^2}, \\
 A_3 \text{ 或 } B_3 &= 0.408 \sqrt{(\gamma_0 - \gamma_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}, \\
 \psi_1 \text{ 或 } \psi'_1 &= \arctg \frac{\gamma_0 + 0.5\gamma_2 + 0.866\gamma_1}{\beta_3 + 0.5\beta_1 + 0.866\beta_2}, \\
 \psi_3 \text{ 或 } \psi'_3 &= \arctg \frac{\gamma_0 - \gamma_2}{\beta_1 - \beta_2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

所有实验的示波图都这样进行整理,并根据整理结果绘制成幅相特性:

$$\left(\gamma = \frac{B}{A}, \text{ 相差 } \psi - \psi' \right).$$

应当指出:根据在低频($\omega_1, \omega_2, \omega_3$)时进行试验的资料,可以得到在高频($3\omega_1, 3\omega_2, 5\omega_1, 5\omega_2, 3\omega_3$)情况下的一些数据。这些数据($\gamma_3 = \frac{B_3}{A_3}, \psi_3 \dots$)可以大大提高幅相特性的准确性。

III. 根据飞升曲线确定微分方程的系数

根据本书所叙述的方法可以确定以下两种对象的微分方程的系数¹⁾:

对于自平衡对象:

$$a_n \varphi^{(n)}(t) + a_{n-1} \varphi^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \varphi'(t) + a_0 \varphi(t) = \mu(t). \quad (3)$$

1) 所引用的微分方程可以表示大多数工业自动化对象的特性。

对于无自平衡对象:

$$a_n \varphi^{(n)}(t) + a_{n-1} \varphi^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \varphi'(t) = \mu(t). \quad (4)$$

方程(3)的系数可按下列公式确定。由实验脉冲飞升曲线(图

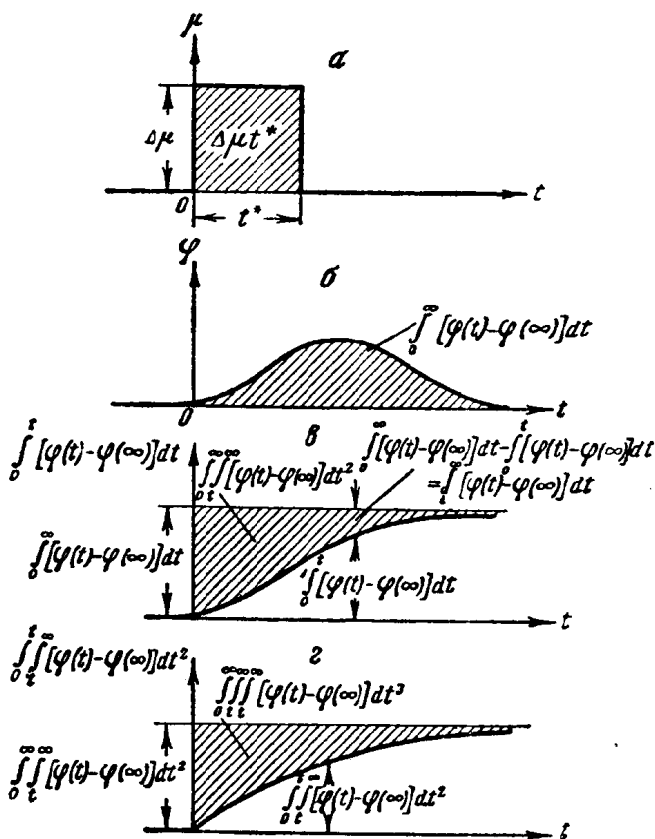


图9 确定方程系数的曲线

9a)的数据来计算:

$$a_0 = \frac{\Delta \mu t^*}{I_1 [\varphi(t) - \varphi(\infty)] dt};$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{I_1 [\varphi(t) - \varphi(\infty)]} \left\{ \Delta \mu \frac{t^{*k+1}}{(k+1)!} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i a_i I_{k+1-i} [\varphi(t) - \varphi(\infty)] \right\}, k = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

其中

$$I_{k+1-i}[\varphi(t) - \varphi(\infty)] = \int_0^\infty \int_t^\infty \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty [\varphi(t) - \varphi(\infty)] dt^{k-i+1}, \quad (5a)$$

或

$$a_0 = \frac{\Delta\mu t^*}{S_1}, a_k = \frac{(-1)^k}{S_1} \left\{ \Delta\mu \frac{t^{*k+1}}{(k+1)!} - a_0 S_{k+1}^* \right\}, \quad (6)$$

其中

$$S_{k+1}^* = \int_0^\infty [\varphi(t) - \varphi(\infty)] \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{a_i}{a_0} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} dt, \quad (6a)$$

由实验飞升曲线的数据来计算:

$$a_0 = \frac{\mu(\infty) - \mu(0)}{\varphi(\infty) - \varphi(0)},$$

$$a_k = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i+1} a_i I_{k-1}[\varphi(\infty) - \varphi(t)]}{\varphi(\infty) - \varphi(0)}, \quad (7)$$

其中

$$I_{k-1}[\varphi(\infty) - \varphi(t)] = \int_0^\infty \int_t^\infty \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty [\varphi(t) - \varphi(\infty)] dt^{k-i},$$

$$k = 1, 2, \cdots, n \quad (7a)$$

或

$$a_0 = \frac{\mu(\infty) - \mu(0)}{\varphi(\infty) - \varphi(0)}, a_k = \frac{a_0 S_k}{\varphi(\infty) - \varphi(0)}, k = 1, 2, 3, \cdots, n \quad (8)$$

其中

$$S_k = \int_0^\infty [\varphi(\infty) - \varphi(t)] \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i+1} \frac{a_i}{a_0} \cdot \frac{t^{k-i-1}}{(k-i-1)!} dt. \quad (8a)$$

公式(5)和(7)中的积分 I_{k-i} 和 I_{k-i+1} , 可通过对实验曲线的多次积分求得。计算时最好能利用表格来进行。用时间间隔 Δt 把实验曲线分成 n 等分, 并把每点的座标值 t_i 、 φ_i 填在表2中。然后, 计算被调量瞬时值与稳态值的偏差 $\varphi(\infty) - \varphi_i = \varphi_n - \varphi_i$ 或 $\varphi_i - \varphi(\infty) = \varphi_i - \varphi_n$ 。表2中 α_i 、 v_i 、 $\lambda_i \cdots$ 几栏内, 除最后一栏外, 均须按下面的公式计算:

$$\alpha_n = 0; \alpha_{n-1} = \int_{t=(n-1)\Delta t}^\infty [\varphi(\infty) - \varphi(t)] dt = \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{2} \Delta t,$$

表 2

№ п/п	t_i	φ_i	$\varphi(\infty) - \varphi_i$	α_i	ν_i	λ_i
0	0	φ_0	$\varphi_n - \varphi_0$	$I_1 = \alpha_0$	$I_2 = \nu_0$	
1	t_1	φ_1	$\varphi_n - \varphi_1$	α_1	ν_1	
2	t_2	φ_2	$\varphi_n - \varphi_2$	α_2	ν_2	
3	t_3	φ_3	$\varphi_n - \varphi_3$	α_3	ν_3	
4	t_4	φ_4	$\varphi_n - \varphi_4$	α_4	ν_4	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$k-1$	t_{k-1}	φ_{k-1}	$\varphi_n - \varphi_{k-1}$	α_{k-1}	ν_{k-1}	
k	t_k	φ_k	$\varphi_n - \varphi_k$	α_k	α_k	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$n-1$	t_{n-1}	φ_{n-1}	$\varphi_n - \varphi_{n-1}$	α_{n-1}	α_{n-1}	
n	t_n	φ_n	0	0	0	

$$\alpha_k = \int_{t=k\Delta t}^{\infty} [\varphi(\infty) - \varphi(t)] dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\varphi_n - \varphi_k) + \sum_{i=n-1}^{k-1} (\varphi_n - \varphi_i) \right] \Delta t,$$

$$\alpha_{k-1} = \int_{t=(k-1)\Delta t}^{\infty} [\varphi(\infty) - \varphi(t)] dt =$$

$$= \frac{(\varphi_n - \varphi_{k-1}) + (\varphi_n - \varphi_k)}{2} \Delta t + \alpha_k,$$

.....

$$I_1 = \alpha_0 = \int_0^{\infty} [\varphi(\infty) - \varphi(t)] dt =$$

$$= \frac{(\varphi_n - \varphi_1) + (\varphi_n - \varphi_0)}{2} \Delta t + \alpha_1,$$

$$\nu_n = 0$$

$$\nu_{n-1} = \int_{t=(n-1)\Delta t}^{\infty} \int_t^{\infty} [\varphi(\infty) - \varphi(t)] dt^2 = \frac{\alpha_{n-1}}{2} \Delta t,$$

.....

$$\nu_k = \int_{t=k\Delta t}^{\infty} \int_t^{\infty} [\varphi(\infty) - \varphi(t)] dt^2 = \left[\frac{1}{2} \alpha_k + \sum_{i=n-1}^{k-1} \alpha_i \right] \Delta t,$$

$$v_{k-1} = \int_{t=(k-1)\Delta t}^{\infty} \int_t^{\infty} [\varphi(\infty) - \varphi(t)] dt^2 = \frac{\alpha_{k-1} + \alpha_k}{2} \Delta t + v_k,$$

.....

$$I_2 = v_0 = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} [\varphi(\infty) - \varphi(t)] dt^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \Delta t + v_1$$

等等,

逐次积分时, 由于在确定飞升曲线纵座标的过程中所产生的误差, 当 t 值较大时, 会给积分的计算带来很大误差, 而且积分次数愈多, 准确度也愈低. 故此种方法只适用于不高于三阶方程的对象.

式(6)和(8)中的积分 S_k 和 S_{k+1}^* 可用单重积分求得, 计算时, 建议利用表格进行数值积分. 仍然是把实验曲线用时间间隔 Δt 分成 n 等分, 并把各点的座标值 t_i, φ_i 填在表中. 再确定被调量于上述各点时对于稳态值的偏差 $\varphi(\infty) - \varphi(t) = \varphi_n - \varphi_i$ 或 $\varphi(t) - \varphi(\infty) = \varphi_i - \varphi_n$. 积分值为:

$$S_1 = \left[\frac{\varphi_n - \varphi_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_n - \varphi_i) \right] \Delta t,$$

$$S_1^* = \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_i - \varphi_n) \Delta t,$$

也就是把表中相应列中的数值加起来. 为了确定积分 S_2 或 S_2^* , 须确定相应的被积函数 $\frac{a_1}{a_0} - t_i$ 或 t_i , 然后确定乘积: $(\varphi_n - \varphi_i) \cdot$

$\left(\frac{a_1}{a_0} - t_i \right)$ 或 $(\varphi_i - \varphi_n) t_i$ 并按下式积分:

$$S_2 = \left[\frac{(\varphi_n - \varphi_0) \frac{a_1}{a_0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_n - \varphi_i) \left(\frac{a_1}{a_0} - t_i \right) \right] \Delta t$$

或

$$S_2^* = \Delta t \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_i - \varphi_n) t_i,$$

也就是把表中相应列中的数值相加.

为了确定积分 S_3 或 S_3^* , 須确定被积函数: $\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} t_i + \frac{t_i^2}{2}$ 或 $\frac{t_i^2}{2} - a_1 t_i$; 然后确定乘积 $(\varphi_n - \varphi_i) \cdot \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} t_i + \frac{t_i^2}{2} \right)$ 或 $(\varphi_i - \varphi_n) \left(\frac{t_i^2}{2} - a_1 t_i \right)$ 并按下式积分:

$$S_3 = \left[\frac{(\varphi_n - \varphi_0) \frac{a_2}{a_0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_n - \varphi_i) \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} t_i + \frac{t_i^2}{2} \right) \right],$$

$$S_3^* = \Delta t \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_n - \varphi_i) \left(\frac{t_i^2}{2} - a_1 t_i \right),$$

也就是把表中相应列中的数值相加, 其他积分依此类推。

积分 S_k 和 S_{k+1}^* 的准确度取决于数值积分和实验曲线的准确度。按式(6)和(8)计算的结果, 要比按式(5)和(7)计算来得准确, 但计算的工作量却大大增多了。

为确定方程(4)的系数, 須用图解法对实验飞升曲线进行微分。用时间间隔 Δt 把飞升曲线分为 n 等分 ($n = 10-20$), 并确定每段中被调量的增量 $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \Delta\varphi_4, \dots, \Delta\varphi_n$, $\Delta\varphi_i = \varphi(i\Delta t) - \varphi[(i-1)\Delta t]$; 于是 $\varphi' \left(i\Delta t - \frac{\Delta t}{2} \right) = \frac{\Delta\varphi_i}{\Delta t}$, 也就是

表 3

	$i\Delta t$	$\Delta\varphi$	$\frac{\Delta\varphi_i}{\Delta t}$	$i\Delta t - \frac{\Delta t}{2}$
1	Δt	$\varphi(\Delta t) - \varphi(0)$	$\frac{\varphi(\Delta t) - \varphi(0)}{\Delta t}$	$\frac{\Delta t}{2}$
2	$2\Delta t$	$\varphi(2\Delta t) - \varphi(\Delta t)$	$\frac{\varphi(2\Delta t) - \varphi(\Delta t)}{\Delta t}$	$\frac{3}{2} \Delta t$
3	$3\Delta t$	$\varphi(3\Delta t) - \varphi(2\Delta t)$	$\frac{\varphi(3\Delta t) - \varphi(2\Delta t)}{\Delta t}$	$\frac{5}{2} \Delta t$
•	•••••	•••••	•••••	•••••
n	$n\Delta t$	$\varphi(n\Delta t) - \varphi[(n-1)\Delta t]$	$\frac{\varphi(n\Delta t) - \varphi[(n-1)\Delta t]}{\Delta t}$	$\left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta t$