

吕洪生 曾新吾 编著

连续介质力学

流体力学与爆炸力学



国防科技大学出版社

033

L900

2

457582

连续介质力学

Continuum Mechanics

(中册)

流体力学与爆炸力学

Fluid Mechanics and Mechanics of Explosion

吕洪生 曾新吾 编著

36

国防科技大学出版社

长沙

内容简介

本书是《连续介质力学》中册,内容包括:流体力学基础、气体动力学基础、相似律与量纲理论、炸药与爆炸概论、爆轰波理论、爆轰产物的飞散与爆炸作用。

本书适合于爆炸力学、爆炸物理专业本科生和研究生作教材之用,亦可供一般力学、工程力学、爆炸加工等专业的本科生、研究生、科研人员作为教材和研修之用。

7208.05

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学. 中册,流体力学与爆炸力学/吕洪生,曾新吾编著. —长沙:国防科技大学出版社,1999. 10

ISBN 7-81024-592-9

I. 连… II. ①吕…②曾… III. ①连续介质力学②流体力学③爆炸力学 IV. O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 47856 号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681 邮政编码:410073

E-mail: gfkdcbs@ public. cs. hn. cn

责任编辑:何 晋 责任校对:黄八一

新华书店总店北京发行所经销

长沙交通学院印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张:28 字数:647 千

1999 年 10 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-1000 册

*

定价:40.00 元

序 言

连续介质力学(Continuum Mechanics),从广义上讲,它是以连续介质假设为基础的众多力学学科的总称,例如流体力学、水利力学、气体动力学、弹性力学、塑性力学、爆炸力学等均属于连续介质力学的范畴。它是一般的力学专业、工程力学专业、爆炸力学专业等最重要的共同基础或专业内容。

连续介质力学是经典理论力学的发展。作为力学,它当然是研究连续介质的宏观性状的,即研究物质的宏观机械运动,而不管物质的真实微观结构,尽管物质是由大量的分子组成。因此,连续介质不对物质的真实微观结构作任何探讨,但与物质结构理论并不矛盾,而是相辅相成的。物质结构理论研究的是物质微观情况,即研究物质的特殊结构,而连续介质力学则研究具有不同微观结构物质的共同性状。

连续介质力学的主要目的在于建立各种物质的力学模型,并给出各种物质的本构关系的数学表达式,同时在给定的初始条件和边界条件下求出问题的解。概括起来,它涉及如下基本内容:①变形几何学。研究连续介质变形的几何性质,确定变形所引起物质各部分空间位置和方向的变化,以及各邻近点相互距离的变化,即研究诸如运动、变形、变形梯度、变形张量等。②运动学。主要研究连续介质力学中各种物理量随时间的变化率,这包括速度梯度、变形速率、旋转速率等。③基本方程。根据适用于所有物质的守恒定律建立的方程,例如对于热力学连续介质力学建立有连续性方程、运动方程、能量方程、熵不等式等。④本构关系。⑤特殊理论。例如弹性理论、塑性理论、流体与气体动力学、粘性流体理论等。⑥问题的求解。

连续介质力学分为经典连续介质力学(Classical Continuum Mechanics)和近代连续介质力学(Modern Continuum Mechanics)。

1. 经典连续介质力学。它侧重研究两种典型的理想介质,即线弹性物质和线粘性物质。这两种物质模型能够很好地描述在工程技术上所处理的很多介质的特性,因此经典连续介质理论至今仍被广泛应用并将继续发挥解决实际问题的能力。

2. 近代连续介质力学。它是在二次大战以后发展起来的,它是经典连续介质力学的发展和扩充,具体表现在:①物体不必只看作是质点的集合;它可能是由具有微观结构的质点集合体。②运动不必总是光滑的,运动有激波、扩散等。③物体不必只受力的作用,它也可承受体力偶、力偶应力,以及电磁场所引起的效应等。④对本构关系进行更加概括的研究。⑤重点研究非线性问题。

近年来,近代连续介质力学在其深度和广度上都取得了很大进展,并出现了下述三个方向:①按照理性力学(Rational Mechanics)的观点和方法研究连续介质理论,从而发展成理性连续介质力学。②把近代连续介质力学和电子计算机结合起来,从而发展成为计算连续介质力学。③把近代连续介质力学的研究对象扩大,从而发展成为连续系统物理学(Continuum Physics)。

然而,本书“别具一格”、“与众不同”,它既非“经典”,又非“近代”。它介于经典与近代之间,它也不同于现已出版的众多的《连续介质力学》,这些书都是针对具有流体力学和固

体力学基础的读者的高级概论。本书主要是针对爆炸力学和爆炸物理专业的本科生和研究生的,它系统地给出:连续介质力学的数学基础、应力分析、运动与变形、基本物理规律、本构方程、不可压流体力学、气体动力学、爆轰学、爆炸作用、动载固体力学、应力波理论等。总之,它给出了该专业所需要的全部基础内容。所以从本书的结构体系和所述内容来看,它也不同业已出版的针对爆炸物理和爆炸力学专业的力学著作。本书既考虑到该专业的已往基础,又考虑到该学科的最新发展,如增加了动载固体力学、应力波理论和不可压流体力学、本构方程等内容;同时结合大型专题介绍了力学中的三大计算方法(特征法计算、有限差分法和有限元法)。

本书除了适用于本专业的本科生和研究生之外,它还可作为爆炸作用、强冲击载荷、材料动载响应、爆炸加工以及一般的力学专业的本科生、研究生和有关的科技人员的教材或参考书。

本书分成三册,上册为《连续介质力学基础》,其内容包括:序言、张量基础、场论初步、应力分析、运动与流动、守恒规律和本构关系等;中册为《流体力学与爆炸力学》,内容包括:流体力学基本方程组、流体静力学、不可压流动、位势理论与射流、气体动力学方程、冲击波与特征线理论、量纲理论、波的相互作用与具体应用、炸药与爆炸概论、爆轰波理论、爆轰产物的飞散与爆炸作用等;下册为《动载固体力学与应力波》,内容包括:应变分析、弹性、塑性、滑移线理论、粘弹、流体弹塑性理论与计算、有限元法、高压本构、应力波理论基础等。

本书是在作者为原电力部工程技术人员编著的《爆炸压接理论基础》的基础之上,以 G. E. Mase 的《Continuum Mechanics》为基本蓝图,并参照有关流体、固体与爆炸等方面的专著,扩充改编而成。由于内容较广、跨度较大,全书约 120 万字;更兼写作匆忙、作者学识有限,所以本书作为初次尝试,难免有缺点与不足,望多指正。

作者 1999 年 9 月

目 录

第六章 流体力学基础

一 流体力学基本方程

- 6.1 流体力学的重要用途·流体的性质 (1)
- 6.2 流体的本构关系 (3)
- 6.3 流体力学方程组·动量定理·动量矩定理 (6)

二 静止流体

- 6.4 流体静力学基本方程组 (14)
- 6.5 外力须满足的条件·自由面的形状 (15)
- 6.6 不可压缩重流体·液体静力学规律 (18)
- 6.7 阿基米德定律 (19)
- 6.8 大气的平衡·气状星球的平衡 (22)

三 理想正压流体的重要积分·动量定理的应用

- 6.9 理想正压流体的重要积分 (25)
- 6.10 动量定理的应用 (28)

四 理想不可压流体的平面无旋定常流动

- 6.11 速度势函数和流函数 (33)
- 6.12 复位势和复速度 (36)
- 6.13 基本流动 (38)
- 6.14 圆柱的有环量与无环量的绕流 (45)
- 6.15 保角变换·任意物体绕流问题·环量的确定 (48)
- 6.16 施瓦兹-克利斯托弗变换 (53)
- 6.17 自由射流流动 (60)
- 6.18 自由射流斜入射到刚壁上的流动 (63)

- 附录 6.1 各向同性张量 (70)

- 习题 (75)

- 参考文献 (77)

第七章 气体动力学基础

一 基本理论

- 7.1 经典气体动力学的基本假设和控制方程组 (78)
- 7.2 气体动力学控制方程的普遍积分 (80)
- 7.3 声波·马赫数 (83)

7.4	亚音速气流与超音速气流的性质	(87)
7.5	一维定常的气体管流	(89)
7.6	冲击波相容条件	(90)
7.7	冲击波相容性条件的各种形式·冲击绝热曲线	(94)
7.8	穿过冲击波阵面物理量的变化	(103)
7.9	激波极线	(109)
7.10	多方气体的一维不定常流动	(116)
7.11	一维流动的简单波与冲击波的形成	(123)
7.12	多方气体的平面定常超音速流动	(132)
7.13	平面定常等熵无旋超音速流动的特征线·外摆线	(134)
7.14	平面定常等熵无旋超音速流动的分类·简单波	(137)
7.15	平面定常等熵超音速均匀气流绕壁流动	(141)

二 具体应用

7.16	平面喷管射流	(144)
7.17	超、亚音速流动与碰撞射流的产生	(146)
7.18	正激波在固壁上的反射	(151)
7.19	两波相互作用的一般分析	(154)
7.20	两个冲击波的相互作用	(161)
7.21	冲击波与分界面的相互作用	(169)
7.22	稀疏波相互作用·关于两波作用后是否存在分界面问题	(173)
7.23	稀疏波与分界面的相互作用	(176)
7.24	冲击波与稀疏波的相互作用	(180)
7.25	黎曼问题——初始间断的分解	(184)
7.26	活塞推动气体运动	(193)
7.27	冲击波的形成	(200)
7.28	高压气体推动弹丸运动	(206)
7.29	敞口内弹道问题	(208)
7.30	闭口内弹道问题	(214)
	附录 7.1 关于不定线法的特征线定义与经典气动中的定义等价	(220)
	附录 7.2 正激波数据	(224)
	习题	(228)
	参考文献	(230)

第八章 相似律与量纲理论

8.1	相似概念	(231)
8.2	量纲理论的基础知识	(239)
8.3	量纲基本定理及其简单应用	(242)
	附录 8.1 关于量纲公式的证明	(247)

附录 8.2 π 定理的证明	(250)
参考文献	(253)

第九章 炸药与爆炸概论

9.1 爆炸与炸药	(254)
9.2 炸药的感度	(260)
9.3 影响炸药感度的各种因素	(271)
9.4 起爆机理	(274)
附录 9.1 爆炸作业中的火工品	(284)
参考文献	(292)

第十章 爆轰波理论

10.1 关于爆热的计算	(294)
10.2 爆轰波(爆燃波)的基本守恒关系式	(302)
10.3 雨贡纽曲线·C—J 条件	(304)
10.4 爆轰波阵面内反应区的状态	(307)
10.5 多方气体爆轰波阵面上物理量的计算	(309)
10.6 真实气体爆轰波阵面上的物理量	(314)
10.7 凝聚炸药爆轰产物的状态方程	(318)
10.8 凝聚炸药爆轰参数的计算	(322)
10.9 用 BKW 方程计算凝聚炸药的爆轰参数	(324)
10.10 计算凝聚炸药爆轰参数的半经验方法	(326)
10.11 爆速的测量	(330)
10.12 爆轰波阵面形状的控制	(335)
附录 10.1 炸药爆轰产物的生成热	(340)
附录 10.2 按 BKW 状态方程计算的爆轰参数与实测值比较	(343)
附录 10.3 按康姆莱特公式计算的 p_H 、 D 与实验值的比较	(345)
习题	(346)
参考文献	(347)

第十一章 爆轰产物的飞散与爆炸作用

11.1 爆轰产物一维飞散的解	(348)
11.2 在几种特殊条件下爆轰产物的一维平面等熵流动	(351)
11.3 爆轰产物的侧向飞散	(357)
11.4 在空气中爆轰产物的飞散	(363)
11.5 点爆炸理论·自模拟运动	(367)
11.6 一维爆轰对迎面刚壁的冲击作用	(374)
11.7 一维刚管中爆轰对侧壁的冲击作用	(379)

11.8	爆轰产物对物体一维抛射的若干理论.....	(381)
11.9	一维平面爆轰波在界面反射之初的参量.....	(394)
11.10	斜入射的爆轰波在刚壁上反射时的参量	(401)
11.11	斜入射的爆轰波在非刚壁上反射时的参量	(406)
11.12	二维抛掷中的泰勒公式	(412)
11.13	二维抛板的理论模型与数值计算	(415)
11.14	简化的空气中二维抛板模型	(429)
11.15	二维抛板极限速度的相似性与修正的古尼公式	(434)
	附录 11.1 平面曲线的曲率半径	(438)
	习题.....	(439)
	参考文献.....	(440)

第六章 流体力学基础

一 流体力学基本方程

流体(fluid)包括液体(liquid)和气体(gas),研究流体宏观运动的科学称作流体力学(Fluid Mechanics),本章主要研究理想不可压流体,有关气体流动的研究放在下一章。

6.1 流体力学的重要用途·流体的性质

6.1.1 流体力学的广泛用途

作为连续介质力学的重要组成部分——流体力学是一个非常重要的学科,它在科学研究和工程技术中有着极其广泛、且举足轻重的作用和地位,可以毫不夸张地说,目前已很难找到一个科技部门,它与流体力学没有或多或少的联系,航空工程和造船工业(aviation engineering and shipbuilt industry)中的基本问题,如飞机及舰船的外形设计、操纵性、稳定性等等就是流体力学要研究的课题;在水利工程(water conservancy project)中,如大型的水利枢纽、水库、水力发电站的设计和建造、洪峰的预报、河流的泥沙问题都与流体力学紧密地联系在一起;流体力学的研究对于动力机械制造工业(dynamic machine building)也具有重要意义,如提高水力及蒸气透平(water-power turbine, steam turbine)、喷气发动机(jet turbine)、压缩机(compressor)和水泵(water pump)等动力机械的性能与正确设计,需要流体力学;现代气象学(modern meteorology)中的基本问题——天气预报也离不开流体力学;甚至在天文学(astronomy)上也有着流体力学的广阔天地,例如研究星系的螺旋结构、研究组成星云的气状物质的运动、研究气云的膨胀及其相互作用等都属于宇宙气体动力学(cosmic gasdynamics)的内容;流体力学在爆炸与冲击(explosion and shock waves)的研究中亦是十分关键,高技术武器(high-technique weapons)与常规武器(conventional weapons)的设计和效应、工程爆破和爆炸加工(engineering blasting and explosive working)等均均以流体力学(气体动力学)为主要的学科基础,并且形成了以气体动力学为主体的爆炸力学(mechanics of explosion)。

近年来,由于科学技术的飞速发展,流体力学和其他学科相互渗透,形成了一系列的边缘学科(frontier science),例如电磁流体力学(electromagnetical fluid mechanics)、化学流体力学(chemical fluid mechanics)、高温气体动力学(high-temperature gasdynamics)、生物流体力学(bioactivity-fluid mechanics)和地球流体力学(earth-fluid mechanics)等等,随着科学技术的发展,与流体力学交织众多学科必将不断涌现。

6.1.2 流体的性质

流体的宏观性质主要是易流性、粘性、可压缩性和导热性。

1. 易流性(easy-flowability)

我们知道,固体在静止时可以承受剪应力。当固体受到切向力作用时,在一般情况下

沿力作用方向将发生微小的变形,而后达到平衡状态,变形停止,但是物体本身则要承受着切向作用力。所以静止的固体,既可能存在法向应力,也可能存在切向应力。与此相反,流体在静止时,不能承受切向应力,不管切向应力多么小,只要持续地施加都能使流体发生任意的大变形——这就是易流性。正由于这种易流性,才使之流体没有一定的形状,它的形状随容器的形状而定。流体在静止时,只有法向应力,而无切向应力。

流体和固体的区别当然不是绝对的,有些物质它们的性质介乎在流体和固体之间,即具有固体和流体的双重性质,如橡胶和油漆(rubber and paint)等。以沥青(asphalt)为例,正常情况下它像固体,用锤子敲它它会破裂,放在地面它也具有一定的形状,但是在重力的作用下,它会缓慢地变形逐渐向四周摊开,故它的行为又像流体。就同一材料而言,在常温常压下它呈现固体行为,但在高温高压下却表现出流体行为。关于物质的三态行为解释如下:

物质的宏观性质与分子结构以及分子间的作用力直接相关,图 6.1 画出了未形成化学键的两个孤立分子的相互作用力 f 和它们之间距离 l 的关系, $f > 0$ 表示两个分子间的作用力为斥力(repelling force); $f < 0$ 表示两分子间的作用力为引力(attraction); l_0 为两分子间的平衡距离($l_0 \approx (3 \sim 4) \times 10^{-8} \text{cm}$)。显然,当温度较低时,分子运动不剧烈,分子间的距离与 l_0 同量阶(equal order of magnitude),这时分子间的作用力是量子型(quantum type)的强作用力,数值很大,因此分子只能在各自的平衡位置

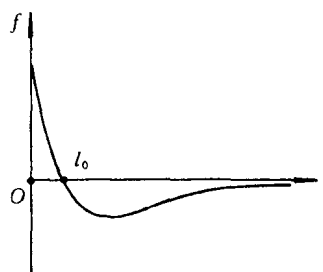


图 6.1

做微小的振动,此时物质表现为固体状态,固体具有一定的形状和体积。当温度升高时,分子运动变得剧烈了,分子间距离增大,分子间作用力变为量子型和经典型混合的中等作用力(这时分子间的距离 $l \approx 10^{-7} \sim 10^{-6} \text{cm}$)。当温度达到一定程度时,分子间的作用力已不再能维持分子在固定的平衡位置附近作微小的振动,但还能维持分子不能分散远离,此时物质表现为液体状态,作为液体其分子无固定的平衡位置,因而整物体的形状不能维持,但仍然有一定的体积。当温度再升高时,分子运动的激烈程度加剧,在分子间的距离达到 $10l_0$ 左右时,分子间只有非常微弱的作用力,此时分子可以相互分散远离,分子的运动接近于自由运动,这时,物质便表现为气体状态,气体既然可自由运动,因此没有固定的形状和大小。

从上面的论述可以看出,固体中分子间的作用力较强,有固定的平衡位置,因而不仅具有一定的体积,而且具有一定的形状。当外界有力作用在固体时,它可以作微小的变形,然后承受住切应力等不再变形。而在液体和气体状态时,分子间的作用力较弱或很弱,很小的切应力都可使它们产生任意大的变形。

2. 粘性(viscosity)

流体虽然在静止时不能承受剪应力,但在运动时却对于相邻两层流体间的相对运动(即相对滑动)有抵抗作用,这种抵抗作用力——称为粘性力。流体这种抵抗两层间彼此相对滑动的性质——称为粘性。粘性应力的大小与粘性系数和速度梯度有关。

当液体的粘性很小时,且其运动的相对速度也不大时,则所产生的粘性应力比其他类型的力如惯性力(inertial force)小得多,可以忽略不计,此时,我们可以把这样的流体视作无粘性,这种无粘性的流体称作理想流体(ideal fluid),我们实际上所遇到的最重要的流体——空气和水(air and water)其粘性都很小。十分明显,理想流体对于切向变形没有任何抗拒能力。当然考虑粘性的流体则称作粘性流体(viscous fluid),粘性流体又分为牛顿流体(Newtonian fluid),即粘性力与速度梯度成线性关系,和非牛顿流体(non-Newtonian fluid),即粘性力与速度梯度成非线性关系,如血液就是为非牛顿流体。

3. 可压缩性(Compressibility)

流体在运动过程中,由于压力和温度等因素的改变,流体的体积或密度也要发生变化。就压力而言,当它增加时,流体的体积就减小而密度增加。流体的体积随压力而减小的性质——称作可压缩性。

真实的流体都是可以压缩的,它的压缩程度依赖于流体的性质以及外界的条件。液体在通常的压力和温度下,压缩性很小。例如,水在100个大气压下,容积只缩小0.5。因此,在一般情况下,液体可以近似看做不可压缩;但是如果压力极高,例如在水中爆炸,则必须将水作为可压缩的。忽略其可压缩性的流体——称作不可压缩流体(incompressible fluid);考虑可压缩性的流体——称作可压缩性流体(compressible fluid),我们经常所碰到的气体,如空气,它的压缩性就很大,压力增加一点点,它的体积则可能发生显著地变化,所以在一般的气体流动的研究中都把气体作为可压缩的,特别是对于爆炸气体产物的流动。

4. 导热性(thermal conductivity)

流体同固体一样,也有传热性。但气体的导热性一般比较差,尤其是对于快速脉冲过程——炸药爆炸,其爆炸产物流动一般作为绝热流动而略去热传导。

如上所述为流体的一些主要性质,至于其他性质与我们所研究的问题关系不大,故在此从略。

6.2 流体的本构关系

根据第五章的论述,对于流体介质,其本构关系应遵循(5.133)式所示的普遍函数形式,它的具体实用的形式如何,将是本节所讨论的内容。

6.2.1 具体本构函数的引出

按(5.133)式和(4.106)式,则有

$$\Sigma = \hat{\Sigma}(\mathbf{B}, \rho, T) \quad \text{或} \quad \Sigma = \hat{\Sigma}(\mathbf{B}, p, T) \quad (6.1)$$

式中 ρ, p, T 为密度、压力和温度,而变形速率张量 $\mathbf{B} = \{B_{ij}\}$ 为

$$\mathbf{B} = \{B_{ij}\} \quad , \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{在直角坐标系中}) \quad (6.2)$$

式(6.1)恰恰是流体粘性的体现,为了使这种关系具体化,1687年牛顿(I. Newton)做了一个简单但极为著名的实验,见图6.2,实验是这样:在两块间距为 h 的很长平行平板之间充满粘性流体,下板不动,上板以 U 速度匀速拉动,测量拉动上板所用的力。

经过测量,得出拉动上板时,在单位面积上所用的力 τ 有如下的近似关系式

$$\tau = \mu \frac{U}{h} \quad (6.3)$$

其中 μ 为粘性系数(viscosity constant), 亦称作动力学粘性系数(kinetic viscosity constant)。而式中的 U/h 相当于: 两板间的流体在上板拉动的带动下, 其 x 向的速度 u 沿 y 向按线性分布(见图 6.2), 即

$$u = u(y) = \frac{U}{h}y \quad (6.4)$$

从而推出

$$U/h = \frac{du}{dy} \quad (6.5)$$

作为普遍情形, 两板间的速度并不成线性分布, 而如图 6.3 所示, 这时在 x 向产生的剪应力(shear) τ 由(6.3)式的形式改为

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (6.6)$$

粘性系数 μ 的数值大小依赖于流体的性质, 对于粘性较小的流体, μ 当然一般较小。例如, 水在一个大气压下, 温度为 20°C 时, μ 为:

$$\mu \approx 0.01 (\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (6.7)$$

在上述条件下, 对于空气其 μ 为

$$\mu \approx 1.9 \times 10^{-4} (\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (6.8)$$

粘性系数 μ 对温度变化比较敏感, 而压力对它影响不大。可是温度 T 对 μ 的影响对于气

体和液体完全相反。对于液体, 当 T 升高时, μ 减小; 对于气体, 当 T 升高时, μ 增大。气体粘性系数随温度变化的近似表达式很多, 其中之一如下

$$\mu = 1.745 \times 10^{-4} + 5.02 \times 10^{-7}T, (\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, T \text{ 的单位为 } ^\circ\text{C}) \quad (6.9)$$

对于粘性很大的流体, 粘性系数可达到很高的值, 它可比水的粘性系数大几千倍, 如甘油在 3°C 时

$$\mu = 42.20 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (6.10)$$

在实际应用中, 我们还可能碰到另一种粘性系数——运动学粘性系数 ν (kinematic viscosity constant), 它定义作

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (6.11)$$

牛顿实验给出粘性应力(6.3)或(6.6)式仅适用于最简单的剪切流动, 然而实际流动很复杂, 要推出(6.1)式所指导下的本构关系必须将牛顿给出的规律推广, 即得到适用一般情形的广义牛顿定律(generalized Newton's law)。为此, 我们做如下几个基本假定:

1. 假定运动流体的应力张量在运动停止后趋于静止流体的应力张量, 并把应力张量 Σ 分成两部分之和

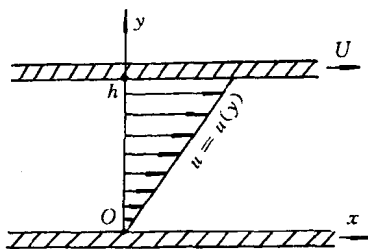


图 6.2

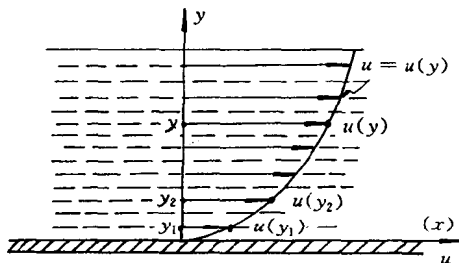


图 6.3

$$\Sigma = -p_* \mathbf{I} + \Sigma_* \quad (6.12.1)$$

即

$$\sigma_{ij} = -p_* \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (6.12.2)$$

其中

$$\Sigma_* = \{\tau_{ij}\} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (6.13.1)$$

显然,由于按 § 4.3 的论述,在无分布力矩的情况下,应力张量是对称的: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, 所以 Σ_* 也是对称的

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (6.13.2)$$

在这里,应力偏量 Σ_* 是与粘性有关的应力张量,即同运动有关的张量,而 p_* 是个“纯人为假定的量”,它与(2.119)式所定义的流体静压力 p ,只有在一定的假定的条件下才相等,不过在流动停止或不可压(见后面论述)情况下 p_* 与 p 还是相等的,即这时 p_* 为流体静压力。

2. 假定应力偏量各分量 τ_{ij} 只是速度梯度各分量的线性齐次函数(linear homogeneous function),即(6.6)式的推广,在直角坐标系中有

$$\tau_{ij} = C_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \quad (6.14)$$

其中 C_{ijk} 是表征流体粘性系数的,相当于(6.6)式中的 μ ,但 $\{C_{ijk}\}$ 一般是各向异性张量(anisotropic tensor),其分量在不同方向取不同值。上式亦相当 τ_{ij} 作为 $\frac{\partial v_k}{\partial x_l}$ 的函数,在 $\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = 0$ 处展开,并取一阶近似。

3. 假定流体是各向同性的(isotropic),各向同性的意思是指流体的粘性、热传导等性质在每个点的各个方向上都相同,即流体的性质不依赖于方向或坐标系的转换。流体中的气体都是各向同性的;大部分简单液体(如水)也是各向同性的。但含有长链状分子的悬浮液(suspension liquid)或溶液(solution)可能呈现出某种方向性,这不在我们的考虑之列。

由于介质是各向同性的,所以粘性系数张量 $\{C_{ijk}\}$ 也是各向同性的,对于各向同性张量,据附录 6.1 的(30)式则有

$$C_{ijk} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.15)$$

其中 λ 和 μ 是常数,将(6.14)式的速度梯度按(3.41.2)式作和分解,即(在直角坐标系中)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= B_{ij} + Z_{ij} \end{aligned} \quad (6.16)$$

将以上两式代进(6.14)式则推出(参看 12.10 节)

$$\tau_{ij} = \lambda B_{kk} \delta_{ij} + 2\mu B_{ij} \quad (6.17)$$

把上式代进(6.12)式中给出

$$\sigma_{ij} = (-p_* + \lambda B_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu B_{ij} \quad (6.18)$$

引进第二粘性系数 μ' , 定义作

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (6.19)$$

利用 μ' , 式(6.18)可以改写成

$$\sigma_{ij} = -p_* \delta_{ij} + 2\mu \left(B_{ij} - \frac{1}{3} B_{kk} \delta_{ij} \right) + \mu' B_{kk} \delta_{ij} \quad (6.20.1)$$

或

$$\sigma_{ij} = -p_* \delta_{ij} + 2\mu \left(B_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} \right) + \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} \quad (6.20.2)$$

其中

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = B_{kk} \quad (6.21)$$

式(6.20)便是各向同性流体的本构方程,但在一般的应用中,还须加上一定的假设。

6.2.2 斯托克斯假设

在上面所引出的本构关系中有一个量 p_* , 它在一般情况下与流体的静压力 p 不等。按式(2.119)式 p 的定义,可由(6.20)式推出 p 与 p_* 的关系为

$$p = p_* - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (6.22)$$

从上式看出,当流体静止时即 $\mathbf{v} = 0$, 亦即 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ 情形,则有

$$p = p_* \quad (6.23)$$

同样,若流体是不可压的,即 $\frac{d\rho}{dt} = 0$, 亦即 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ 情形,则亦有 $p = p_*$ 。

流体在静止或不可压的特殊情况, $p_* = p$ 。但在一般情况上,由于 μ' 的存在, p_* 不等于流体静压力 p 。对于 μ' 的出现,曾有种种不同的微观解释,但斯托克斯(G. G. Stokes)认为“ p_* 与 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 有关不合理”,于是他假定

$$\mu' = 0 \quad (6.24)$$

这个假设称作斯托克斯假设 (Stokes' hypothesis),它在分子运动论中已得到近似证明,除了高温等极端情形之外。

在(6.24)式的假设下,我们便得到实用的流体本构方程

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{B} - \frac{1}{3} B_{kk} \mathbf{I} \right) \quad (6.25.1)$$

或

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(B_{ij} - \frac{1}{3} B_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (6.25.2)$$

式(6.25)和(6.20)均称作:广义牛顿定律。

6.3 流体力学方程组 · 动量定理 · 动量矩定理

6.3.1 微分形式的基本方程组

描述连续介质运动的质量守恒、动量守恒和能量守恒的(5.1)式以及(5.3)式,加上本构关系(6.25)式,再加上 $p = f(\rho, T)$ 等形式的状态方程,则构成了描述流体流动的如下形式的封闭方程组(在这里将随体微商符 D/Dt 仍写成 d/dt , 因以下论述中,这样做不会产生混淆;同时为了避免同其他符号混淆,将单位质量的辐射能符号由 g 改为 g_Δ)。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\
\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} \\
\rho \frac{de}{dt} &= \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{B} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho g_{\Delta} \\
\boldsymbol{\Sigma} &= -p \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{B} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{v}) \\
\mathbf{B} &= \{B_{ij}\} \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{在直角坐标系中}) \\
p &= p(\rho, T)
\end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

如下引进耗散函数(dissipation function) Φ .

在(6.26)式的能量方程中 $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{B}$ 可化成

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{B} &= -p \mathbf{I} : \mathbf{B} + 2\mu(\mathbf{B} : \mathbf{B} - \frac{1}{3} \mathbf{I} : \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v}) \\
&= -p \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{B} : \mathbf{B} \\
&= -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \Phi
\end{aligned} \quad (6.27)$$

其中

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2\mu \mathbf{B} : \mathbf{B} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \\
&= \frac{2\mu}{3} [3B_{ij}B_{ij} - B_{kk}^2] \\
&= \frac{2\mu}{3} [6(B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2) + 2B_{11}^2 + 2B_{22}^2 + 2B_{33}^2 - 2B_{11}B_{22} - 2B_{11}B_{33} - 2B_{22}B_{33}] \\
&= \frac{2\mu}{3} [6(B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2) + (B_{11} - B_{22})^2 + (B_{22} - B_{33})^2 + (B_{33} - B_{11})^2] \\
&\geq 0
\end{aligned} \quad (6.28)$$

由上式可知耗损函数 Φ 永不为负值, 它与粘性系数 μ 有关。

将(6.27)式代进(6.26)式的能量方程中则给出

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho g_{\Delta} \quad (6.29)$$

根据热力学第一定律和连续性方程有

$$\left. \begin{aligned}
TdS_* &= de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \\
\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

利用(6.30)式, (6.29)式可以改写(在上式中, S_* 为比熵):

$$\rho T \frac{dS_*}{dt} = \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho g_{\Delta} \quad (6.31)$$

将上式代替(6.26)式中的能量方程, 并将(6.26)式改写, 则给出

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + 2\operatorname{div}(\mu \mathbf{B}) - \frac{2}{3} \operatorname{grad}(\mu \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ \rho T \frac{dS_*}{dt} &= \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho g_\Delta \\ p &= f(\rho, T) \\ \Sigma &= -p \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{B} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

这就是常用的流体基本方程组的另一种形式。如下考虑几种特殊情况下的流体流动方程组。

1. 粘性不可压流体

如果流体是不可压缩的(且在直角坐标系中表述),即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (6.33)$$

于是从连续性方程推得

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.34)$$

利用上式可以推出

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.35)$$

如果在(6.32)式中,还假定: $\mu = \text{const}$, 则推出如下形式的粘性不可压流动方程组

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{b} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \rho T \frac{dS_*}{dt} &= \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho g_\Delta \\ \Sigma &= -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

2. 理想不可压流体

如果流体既是不可压又是理想的,即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \mu = 0$$

于是控制方程写成

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{b} - \operatorname{grad} p \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$