高等学校教学用书

模糊集引论

·上册·

罗承忠 编著

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》基础上，参考国内外的有关著作，结合作者的教学实践而总结编写的. 全书共分上、下两册. 上册包括模糊集合的基本概念、模型识别、模糊关系、扩展原理和模糊数、模糊映射与模糊变换、模糊关系方程、模糊规划、模糊逻辑、模糊推理与模糊控制九章内容，每章后面都配备了一定的习题.

本书是模糊数学的基础教材，可供大专院校有关专业选用，也可作为数学专业研究生基础课教材，同时还可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考.

高等学校教学用书

模糊集引论(上册)

罗承忠 编著

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：16　字数：394 千

1989 年 5 月第 1 版　1989 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—4 000

ISBN 7-303-00418-1/O·87

定价：3.85 元

绪　论

模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学．所谓模糊性，主要是指客观事物在差异的中间过渡时所呈现的“亦此亦彼”性．

一个概念有其内涵与外延，所谓内涵是指符合此概念的对象所具有的共同属性；而外延是指符合此概念的对象组成的集合．集合可以表现概念，集合的运算和变换可以表现判断与推理．因此，建立在集合论基础上的现代数学成为可以描述和表现各门学科的形式的语言和系统．

但是经典集合论要求一个对象对于一个集合来说，要么属于、要么不属于，两者必居其一且仅居其一．这样就限定了经典集合只能表现确切的概念，只能表现“非此即彼”的现象．

一个模糊的概念没有明确的外延，例如“老人”就是一个模糊概念，对一个人来说，他是否属于“老人集”无法明确回答，他具有“亦此亦彼”的模糊性．因此模糊概念不能用经典集合来刻划，于是便产生了模糊集合论，它是由 L. A. Zadeh（查德）于 1965 年创立的，是经典集合论的扩充．这种扩充如同数系中有理数域扩充到实数域一样，既有其现实背景，又有严密的理论基础．

模糊数学在近代科学发展中有着积极的作用：它为软科学（如经济管理、人工智能、心理、教育、医学等等）提供了数学语言与工具．模糊数学的发展可以使计算机模仿人脑对复杂系统进行识别判决，提高自动化水平．

概率论的产生把数学应用范围从必然现象扩大到偶然现象的领域，模糊数学的产生则提供了把数学的应用范围从精确现象扩大到模糊现象的可能性．

前　　言

《模糊集引论》是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》(上海科技出版社)基础上，参考 D. Dubois、H. Prede《FUZZY SETS AND SYSTEMS》及浅居喜代治《模糊系统理论入门》(北京师范大学出版社)，结合作者的教学实践总结编写的．本书采用“集合套”观点来解释模糊集，因而使一些概念直观易懂，同时使得理论严密系统、便于与经典数学联系，具有适合教学的特点．由于“集合套”理论只适用 Zadeh 算子($\vee,\wedge$)，具有局限性，因此也介绍了其它广义算子($\vee^*,\wedge^*$)．

本书是模糊数学基础教材，可用作大专院校有关专业基础课或选课教材(适当选择部分章节)，也可用作数学专业研究生基础课教材，还可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考．考虑到不同读者数学基础的差异，本书内容分基础部分与选读部分．前六章中不带“*”号内容是基础(删去“*”号内容不影响其它部分的讲授)，内容较通俗易懂，一般工科院校学员可以接受，讲授30课时左右可以完成． 对工科院校，还可以选讲第七、九、十一等章节中不带“*”号有关内容．这里初步介绍了模糊规划、模糊控制、模糊系统、模糊概率与信息等联系实际的内容．第八章模糊逻辑的一些基本概念是学习模糊诊断的基础，也可供选用．书中带*号内容涉及的数学基础知识与基本训练较多，在数学上有一定难度，一般工科院校可以删去．对数学专业，本科生可讲授前六章包括带“*”内容，然后酌情选讲模糊规划、模糊控制等联系实际内容．第十二章到第十六章可列入数学专业研究生课程． 第十二章给出 L-Fnzzy 集理论、第十三、十四、十五、十六等章给出可能性理论、

Fuzzy 测度与积分、Fuzzy 拓扑、Fuzzy 群与 Fuzzy 范畴等理论基础，其中 Fuzzy 测度与积分主要参照国内王震源先生的科研成果，Fuzzy 拓扑参考了国内蒲保明、刘应明先生的工作．这部分内容是模糊数学理论工作基础，数学专业研究生尽量选用．

由于作者水平所限，书中一定存在不少缺点，恳请批评指正．

罗承忠

目　　录

第一章　模糊集合的基本概念

§1　预 备 知 识

一、经典集合及其运算

集合论是现代数学的基础，集合可以表现概念.

当我们讨论一个具体问题时，总是把自己的议题限制在一定的范围内. 例如讨论"男子"这一概念，可以把议题限制在"人"这个范围内，从人的集合 X 中挑选出所有男子，构成 X 的一个子集 A，A 便是"男子"这个概念的外延，即"男子"这个概念的集合表现.

给定论域 X（讨论范围），设 α 为某一概念，它的外延是 X 的一个子集 A，对于 X 中任一元素 x（讨论对象）来说，

$$x \text{ 符合概念 } \alpha \Longleftrightarrow x \in A \tag{1.1}$$

按照经典集合论要求，元素 x 与集合 A 之间，$x \in A$ 与 $x \notin A$ 两者必居其一且仅居其一. 因而 x 对于概念 α 来说，"x 符合概念 α"与"x 不符合概念 α"二者必居其一且仅居其一. 我们称这种概念为确切的.

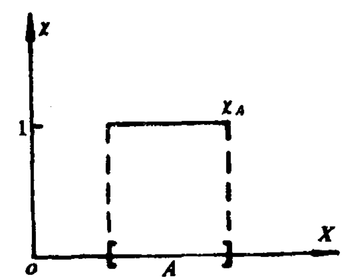

图 1.1

给定论域 X，子集 A 可由其特征函数 χ_A 唯一确定.

$$\chi_A:\ X \to \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \in A \\ 0 & \text{当 } x \notin A \end{cases} \tag{1.2}$$

令 $\mathscr{P}(X)$ 是 X 的所有子集组成的集合(称为 X 的幂集)，A、$B\in\mathscr{P}(X)$。称 A 包含 B（记作 $A\supseteq B$）当且仅当对任意 $x\in X$，都有

$$x\in B\Longrightarrow x\in A.$$

称 A、B 相等(记作 $A=B$)，当且仅当 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。
称 A 真包含 B（记作 $A\supset B$）当且仅当 $A\supseteq B$ 且 $A\neq B$。

用特征函数来表示，我们有

$$\left.\begin{array}{l}A\supseteq B\Longleftrightarrow \chi_A(x)\geqslant \chi_B(x)\quad (\forall x\in X)\\ A=B\Longleftrightarrow \chi_A(x)=\chi_B(x)\quad (\forall x\in X)\\ A\supset B\Longleftrightarrow\begin{cases}\text{对 } \forall x\in X,\chi_A(x)\geqslant\chi_B(x)\\ \text{且 } \exists x_0\in X,\ \chi_A(x_0)>\chi_B(x_0)\end{cases}\end{array}\right\}\tag{1.3}$$

设 $A,\ B\in\mathscr{P}(X)$，规定

$$\left.\begin{array}{r}A\cup B\triangleq\{x\mid x\in A\ \text{或}\ x\in B\}\\ A\cap B\triangleq\{x\mid x\in A\ \text{且}\ x\in B\}\\ A^c\triangleq\{x\mid x\notin A\}\end{array}\right\}\tag{1.4}$$

分别叫做 A 与 B 的并集、交集及 A 的余集。显然它们的特征函数满足

$$\left.\begin{array}{l}\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)\vee\chi_B(x)\\ \chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\wedge\chi_B(x)\\ \chi_{A^c}(x)=1-\chi_A(x)\end{array}\right\}\tag{1.5}$$

此处“$\vee$”表示上确界“sup”，“$\wedge$”表示下确界“inf”。

上述运算具有下列性质。

1) **幂等律**：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$。

2) **交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

3) **结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

4) **吸收律**：$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$。

5) **分配律**：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

6) X 与 $\varnothing$(空集)满足

$$A\cap X=A,\ A\cup X=X,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cup\varnothing=A.$$

7) **复原律**: $(A^c)^c=A$.

8) **补余律**: $A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\varnothing$.

9) **对偶律** (Demogan 律):

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

这些性质可直接从 $\cup$、$\cap$,c 定义推出,也可用特征函数证明. 例如对偶律的证明:

证法 1 $x\in(A\cup B)^c\Longleftrightarrow x\notin A\cup B\Longleftrightarrow x\notin A$且 $x\notin B$

$\Longleftrightarrow x\in A^c$ 且 $x\in B^c\Longleftrightarrow x\in A^c\cap B^c$.

证法 2 $\chi_{(A\cup B)^c}(x)=1-\chi_{A\cup B}(x)=1-(\chi_A(x)\vee\chi_B(x))$

$=(1-\chi_A(x))\wedge(1-\chi_B(x))=\chi_{A^c}(x)\wedge\chi_{B^c}(x)$

$=\chi_{A^c\cap B^c}(x)$.

集合的并、交运算可推广到任意多个集合的并、交运算.

$$\left.\begin{aligned}&\bigcup_{t\in T}A^{(t)}\triangleq\{x\mid x\in X,\exists t\in T\ 使\ x\in A^{(t)}\}\\&\bigcap_{t\in T}A^{(t)}\triangleq\{x\mid x\in X,\forall t\in T,\ 恒有\ x\in A^{(t)}\}\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

它们的特征函数

$$\left.\begin{aligned}&\chi_{\bigcup_{t\in T}A^{(t)}}(x)=\bigvee_{t\in T}\chi_{A^{(t)}}(x)\\&\chi_{\bigcap_{t\in T}A^{(t)}}(x)=\bigwedge_{t\in T}\chi_{A^{(t)}}(x)\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

易证

$$\left.\begin{aligned}&A\cap\Big(\bigcup_{t\in T}A^{(t)}\Big)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A^{(t)})\\&A\cup\Big(\bigcap_{t\in T}A^{(t)}\Big)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A^{(t)})\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\bigcup_{t\in T} A^{(t)}\right)^c &= \bigcap_{t\in T}\left(A^{(t)}\right)^c\\ \left(\bigcap_{t\in T} A^{(t)}\right)^c &= \bigcup_{t\in T}\left(A^{(t)}\right)^c\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

二、格

给定集合 L，如果对它的元素定义了一种关系"$\leqslant$"，满足

$$\left.\begin{array}{l}\text{1) 反身性: } \alpha\leqslant\alpha(\forall\alpha\in L)\\ \text{2) 反对称性: } \alpha\leqslant\beta,\ \beta\leqslant\alpha\Longrightarrow\alpha=\beta\\ \text{3) 传递性: } \alpha\leqslant\beta,\ \beta\leqslant\gamma\Longrightarrow\alpha\leqslant\gamma\end{array}\right\}\tag{1.10}$$

那么，称"$\leqslant$"是 L 的一个偏序，$(L,\leqslant)$ 叫做一个偏序集．若还有

4）可比较性：$\forall\alpha,\beta\in L$，$\alpha\leqslant\beta$ 与 $\beta\leqslant\alpha$ 必有一成立．

则称 $(L,\leqslant)$ 是一个全序集（也可称为线性序集）．

易见 $(\mathscr{P}(X),\subseteq)$ 是偏序集．

设 $(L,\leqslant)$ 是一个偏序集，$A\subseteq L$，若对任意 $\alpha\in A$，均有 $\alpha\leqslant\gamma$ 则称 γ 为 A 的一个上界．若 γ_0 是 A 的上界中最小者，则称 γ_0 为 A 的上确界．记作

$$\gamma_0=\sup\{\alpha\mid\alpha\in A\}\tag{1.11}$$

若对任意 $\alpha\in A$，均有 $\gamma\leqslant\alpha$，则称 γ 为 A 的一个下界．若 γ_0 是 A 的下界中最大者，则称 γ_0 为 A 的下确界，记作

$$\gamma_0=\inf\{\alpha\mid\alpha\in A\}\tag{1.12}$$

现在我们介绍格的两种定义．

定义 1.1 设 $(L,\leqslant)$ 为一个偏序集，若对任意 $\alpha,\beta\in L$，$\{\alpha,\beta\}$ 的上、下确界均存在，则称 $(L,\leqslant)$ 为一个格．

定义 1.1′ 一个集合 L，在其中定义了两种运算"$\vee$"与"$\wedge$"，满足下列性质

$(L.1)$ 幂等律：$\alpha\vee\alpha=\alpha$，$\alpha\wedge\alpha=\alpha$．

$(L.2)$ 交换律：$\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha$，$\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$．

(L.3) 结合律：$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$，

$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.

(L.4) 吸收律：$(\alpha\vee\beta)\wedge\alpha=\alpha$，$(\alpha\wedge\beta)\vee\alpha=\alpha$.

则称 L 是一个格，记作 $(L,\vee,\wedge)$.

给出满足定义 1.1 的格 $(L,\leqslant)$，规定 $\alpha\vee\beta=\sup\{\alpha,\beta\}$，$\alpha\wedge\beta=\inf\{\alpha,\beta\}$，可以证明 $(L,\vee,\wedge)$ 是满足定义 1.1′ 的格；反之，给出满足定义 1.1′ 的格 $(L,\vee,\wedge)$，在 L 中规定关系 $\leqslant$，满足 $\alpha\leqslant\beta\Longleftrightarrow\alpha\wedge\beta=\alpha$，可以证明 $(L,\leqslant)$ 是满足定义 1.1 的格(见 § 2)。所以定义 1.1 与定义 1.1′ 是等价的.

定义 1.2 1) 设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个格，如果它还满足：

(L.5) 分配律：$(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma=(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$

$(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma=(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$

那么称 $(L,\vee,\wedge)$ 为分配格.

2) 若格 $(L,\vee,\wedge)$ 满足：

(L.6) 在 L 中存在两个元素 0 与 1 满足：

$$\alpha\vee 0=\alpha,\ \alpha\wedge 0=0,\ \alpha\vee 1=1,\ \alpha\wedge 1=\alpha.$$

则称 $(L,\vee,\wedge)$ 有最小元 0 与最大元 1.

3) 若在一个具有最小元 0 与最大元 1 的分配格 $(L,\vee,\wedge)$ 中规定一种余运算 c，满足：

(L.7) 复原律：$(\alpha^c)^c=\alpha$

(L.8) 补余律：$\alpha\vee\alpha^c=1$，$\alpha\wedge\alpha^c=0$

则称 $(L,\vee,\wedge,c)$ 为一个布尔代数.

4) 若在一个具有最小元 0 与最大元 1 的分配格 $(L,\vee,\wedge)$ 中规定一种余运算 c，满足：

(L.7) 复原律：$(\alpha^c)^c=\alpha$

(L.9) 对偶律：$(\alpha\vee\beta)^c=\alpha^c\wedge\beta^c$，，$(\alpha\wedge\beta)^c=\alpha^c\vee\beta^c$.

则称 $(L,\vee,\wedge,c)$ 为一个软代数.

例 1.1 令 $L_0=\{0,1\}$，规定 $\vee,\wedge,c$ 如下

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

α	α^c
0	1
1	0

易验证 $(\{0, 1\}, \vee, \wedge, c)$ 是布尔代数.

例 1.2 令 $L_1 = [0, 1]$，规定:

$$\alpha \vee \beta \triangleq \sup\{\alpha, \beta\}, \quad \alpha \wedge \beta \triangleq \inf\{\alpha, \beta\},$$
$$\alpha^c \triangleq 1 - \alpha.$$

易验证 $([0, 1], \vee, \wedge, c)$ 是软代数. 但不是布尔代数,因为补余律不满足,如 $0.2^c = 0.8$, $0.2 \wedge 0.2^c = 0.2 \neq 0$.

可以证明布尔代数中对偶律成立,因而布尔代数是软代数(见§2).

定义 1.3 设 $(L, \vee, \wedge, c)$ 为软代数，1) 若 $\forall A \subseteq L$,

$$\left.\begin{aligned} \vee\{\alpha|\alpha \in A\} \triangleq \sup\{\alpha|\alpha \in A\} \\ \wedge\{\alpha|\alpha \in A\} \triangleq \inf\{\alpha|\alpha \in A\} \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

均存在,则称 L 是完全的.

2) 若

$$\alpha \wedge \left(\bigvee_{t \in T} \alpha_t\right) = \bigvee_{t \in T} (\alpha \wedge \alpha_t), \quad \alpha \vee \left(\bigwedge_{t \in T} \alpha_t\right) = \bigwedge_{t \in T} (\alpha \vee \alpha_t) \tag{1.14}$$

成立,则称 L 为可无限分配的.

3) 若对 $\forall \alpha, \beta \in L$, $\alpha < \beta$, $\exists \gamma \in L$ 使得 $\alpha < \gamma < \beta$. 则称 L 为稠密的.

称稠密的、可无限分配的、完全的软代数为优软代数.

可以验证 $([0, 1], \vee, \wedge, c)$ 是优软代数.

三、$(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, c)$

由前面列举的集合的 $\cup, \cap, c$ 运算性质, $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, c)$ 构成布尔代数.

令 $\{0,1\}^X=\{\chi\mid\chi:X\to\{0,1\}\}$

$T:\mathscr{P}(X)\to\{0,1\}^X,\ A\longmapsto T(A)=\chi_A$

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in A\\ 0 & \text{当 } x\notin A\end{cases}\tag{1.15}$$

可以证明T是 $(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,c)$ 到 $(\{0,1\}^X,\vee,\wedge,c)$ 的同构映射．即T是 $\mathscr{P}(X)$ 到 $\{0,1\}^X$ 的一一映射，且保持运算

$$\left.\begin{array}{l}T(A\cup B)=T(A)\vee T(B),\ T\left(\bigcup\limits_{t\in T}A^{(t)}\right)=\bigvee\limits_{t\in T}T(A^{(t)})\\ T(A\cap B)=T(A)\wedge T(B),\ T\left(\bigcap\limits_{t\in T}A^{(t)}\right)=\bigwedge\limits_{t\in T}T(A^{(t)})\\ T(A^c)=(T(A))^c\end{array}\right\}\tag{1.16}$$

即

$$\left.\begin{array}{l}\chi_{A\cup B}=\chi_A\vee\chi_B,\ \chi_{\bigcup\limits_{t\in T}A^{(t)}}=\bigvee\limits_{t\in T}\chi_{A^{(t)}}\\ \chi_{A\cap B}=\chi_A\wedge\chi_B,\ \chi_{\bigcap\limits_{t\in T}A^{(t)}}=\bigwedge\limits_{t\in T}\chi_{A^{(t)}}\\ \chi_{A^c}=1-\chi_A\end{array}\right\}\tag{1.17}$$

由于同构的代数系统可以看作完全一样，因此可以把集合A与其特征函数χ_A看作是同一的，采用下面方便的记号

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{P}(X)=\{A\mid A:X\to\{0,1\}\}\\ \forall x\in X,\ \ A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}\end{array}\right\}\tag{1.18}$$

$A(x)$ 称为x对集合A的隶属度．当x属于A时，隶属度 $A(x)=1$，当x不属于A时，其隶属度 $A(x)=0$．同样采用下列写法．

$$\left.\begin{array}{l}(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x),\ \left(\bigcup\limits_{t\in T}A^{(t)}\right)(x)=\bigvee\limits_{t\in T}A^{(t)}(x)\\ (A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x),\ \left(\bigcap\limits_{t\in T}A^{(t)}\right)(x)=\bigwedge\limits_{t\in T}A^{(t)}(x)\\ A^c(x)=1-A(x)\end{array}\right\}\tag{1.19}$$

*§2 格与代数系统

一、格与代数系统:

定义 1.4 $(L, \leqslant)$ 为偏序集，若对 $\forall\alpha,\ \beta\in L$，上确界 $\sup\{\alpha, \beta\}$ 与下确界 $\inf\{\alpha, \beta\}$ 均存在,则称 $(L, \leqslant)$ 是格.

在 L 中规定运算 $\vee$ 与 $\wedge$,对 $\forall\alpha,\ \beta\in L$

$$\alpha\vee\beta=\sup\{\alpha, \beta\},\ \alpha\wedge\beta=\inf\{\alpha, \beta\}$$

则称 $(L, \vee, \wedge)$ 是格 $(L, \leqslant)$ 诱导的代数系统.

定理 1.1 设 $(L, \vee, \wedge)$ 为格 $(L, \leqslant)$ 诱导的代数系统，则满足:

$(L.1)$ 幂等律: $\alpha\vee\alpha=\alpha,\ \alpha\wedge\alpha=\alpha.$

$(L.2)$ 交换律: $\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha,\ \alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha.$

$(L.3)$ 结合律: $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma),$

$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).$

$(L.4)$ 吸收律: $\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)=\alpha,\ \alpha\vee(\alpha\wedge\beta)=\alpha.$

证明 按照上、下确界定义,我们有:

1) $\alpha\leqslant\alpha\Longrightarrow\alpha\vee\alpha=\sup\{\alpha,\alpha\}=\alpha,\ \alpha\wedge\alpha=\inf\{\alpha,\alpha\}=\alpha.$

2) $\sup\{\alpha, \beta\}=\sup\{\beta, \alpha\},\ \inf\{\alpha, \beta\}=\inf\{\beta, \alpha\}$

$\Longrightarrow\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha,\ \alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha.$

3) $$\left.\begin{array}{l}(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\leqslant\alpha\wedge\beta\leqslant\beta\\(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\leqslant\gamma\end{array}\right\}\Longrightarrow(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\leqslant\beta\wedge\gamma$$

又

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\leqslant\alpha\wedge\beta\leqslant\alpha$$

于是

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\leqslant\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$

同理

$$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)\leqslant(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$$

由反对称性：

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$

同样可证

$$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$$

4) $\alpha\leqslant\alpha$ 且 $\alpha\wedge\beta\leqslant\alpha$. 因而$\alpha$是$\alpha\wedge\beta$与$\alpha$的上界. 又对$\alpha\wedge\beta$与$\alpha$的任何上界$\gamma$来说，$\alpha\leqslant\gamma$. 所以$\alpha$是$\alpha\wedge\beta$与$\alpha$的上确界(最小上界). 即 $\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)=\alpha$. 同样可证 $\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)=\alpha$. □

引理 1.1 若代数系统 $(L, \vee, \wedge)$ 满足吸收律，则幂等律也成立.

证明 $\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)=\alpha$, $\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)=\alpha$

$$\Longrightarrow\alpha\wedge\alpha=\alpha\wedge(\alpha\vee(\alpha\wedge\beta))=\alpha$$

$$\alpha\vee\alpha=\alpha\vee(\alpha\wedge(\alpha\vee\beta))=\alpha$$

□

定理 1.2 若代数系统 $(L, \vee, \wedge)$ 满足交换律、结合律、吸收律，则存在一个格 $(L, \leqslant)$，其诱导的代数系统就是 $(L, \vee, \wedge)$，而且满足

$$\alpha\leqslant\beta\Longleftrightarrow\alpha\wedge\beta=\alpha\Longleftrightarrow\alpha\vee\beta=\beta$$

证明 在L上定义关系 $\leqslant$ 如下:

$$\alpha\leqslant\beta\Longleftrightarrow\alpha\wedge\beta=\alpha.$$

1) 往证“$\leqslant$”是L上的偏序关系:

i) $\alpha\wedge\alpha=\alpha\Longrightarrow\alpha\leqslant\alpha$ (自反性成立)

ii) $\alpha\leqslant\beta$, $\beta\leqslant\alpha\Longrightarrow\alpha\wedge\beta=\alpha$, $\alpha\wedge\beta=\beta\Longrightarrow\alpha=\beta$ (对称性成立)

iii) $\alpha\leqslant\beta$, $\beta\leqslant\gamma\Longrightarrow\alpha\wedge\beta=\alpha$, $\beta\wedge\gamma=\beta$

$\Longrightarrow\alpha\wedge\gamma=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\alpha\wedge\beta=\alpha$

$\Longrightarrow\alpha\leqslant\gamma$ (传递性成立)

2) 往证 $\alpha\wedge\beta=\alpha\Longleftrightarrow\alpha\vee\beta=\beta$,

$\alpha\wedge\beta=\alpha\Longrightarrow\alpha\vee\beta=(\alpha\wedge\beta)\vee\beta=\beta$ (利用吸收律)