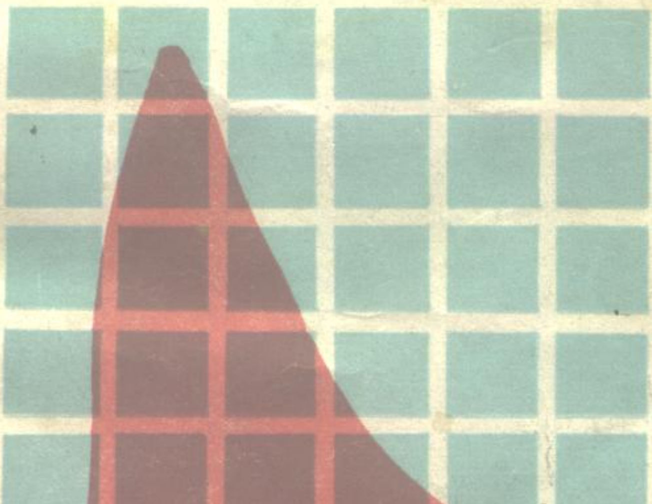
236

高等学校教学参考书

传热学专题讲座

西安交通大学　陈钟颀　主编



高等教育出版社

高等学校教学参考书

传热学专题讲座

西安交通大学　陈钟颀　主编

高等教育出版社

内容简介

本书是在杨世铭主编《传热学》教师讲习班讲义的基础上，参照该书第二版——杨世铭编《传热学》(第二版)编写而成的。

全书共18章。书中针对杨世铭编《传热学》(第二版)教材中的教学重点、难点分专题进行详细阐述，每章末附有详细的参考文献供进一步查阅。各专题均加宽加深了教材中的有关内容，对于广大教师、高年级大学生、研究生以及有关工程技术人员深入掌握这些内容大有裨益。还应该指出的是，传热学是一门实验性很强的学科，随着科学技术的进步，其理论、实验公式不断改进和完善。鉴于此，本书某些章节介绍了有关内容的历史发展情况，特别对大量的对流换热实验关系式做了历史的分析研究，对固体表面间辐射换热的几种计算方法做了分析比较，有利于这些内容的深入理解和牢固掌握。这种从历史发展角度研究传热学教材的方法对读者也是十分有益的。

高等学校教学参考书
传热学专题讲座
西安交通大学陈钟颀主编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本850×1168 1/32 印张 13.125 字数 320 000
1989年6月第1版 1989年6月 第1次印刷
印数 0001—1 660
ISBN 7-04-000864-5/TB·50
定价 3.50元

前　言

1984年暑假期间，为了提高广大传热学教师的教学水平，我们接受当时全国热工教材编审委员会的委托，举办了杨世铭主编《传热学》教材教师讲习班。参加讲习班的有40余所兄弟院校的近60名教师。为了办好这次讲习班，我们事先选择了一些专题，编写了讲义。这些专题大多是教学重点，对于加深加宽教师的知识，深入掌握基本内容，讲好课程，提高教学质量是大有帮助的。讲习班结束后，我们又根据参加讲习班教师的意见，并参照杨世铭主编《传热学》的修订版——杨世铭编《传热学》(第二版)对讲义作了补充和修改，形成了目前的这本《传热学专题讲座》。因此，这本书既是编者的劳动成果，也是参加讲习班全体同志心血的结晶。

这本书除了供从事传热学教学的教师参考外，也适宜作为学习传热学的大学生、研究生提高用，也可供有关工程技术人员参考。它不象一般的高层次传热学教材那样着重于讲述传热问题的数学解，而是侧重于传热问题的物理概念和计算方法的扩充和加深。因此，只要具备大学本科水平的高等数学知识，就可以顺利阅读本书。

本书第一、二、五、八章由陶文铨编写，第三章由吴键编写，第四、六章由吴清金编写，第七、十二、十三章由陈钟颀编写，第九、十章由杨杰辉编写，第十一、十八章由张惠华编写，第十四章由杨小琼编写，第十五、十六章由李妩编写，第十七章由王启杰编写。最后由陈钟颀统一修改定稿。

南京工学院戴锅生、姚扬猷等同志对全书作了仔细的审阅，提出了许多宝贵的修改建议，我们谨表示衷心的感谢。

出版这样一本既不同于教材，又不同于专著的专题讲座，对我们来说是一个尝试，欢迎读者提出批评意见。

编　者

1987年7月

目 录

第一章　一维导热问题的数值计算

在对热传递现象进行定量描述时，首先需要在所研究的区域内建立起一组微分方程式及相应的初、边值条件，然后进行求解。由于数学上的困难，只有一些简单的情形能获得微分方程的精确解。而对于许多具有实用意义的传热问题，常采用把微分方程转换成一组代数方程再求解的方法。这种方法求解的结果是所研究区域内一些代表性点上未知量的值，而不是未知量与其它变量间的函数关系，故称为数值解。随着计算技术及电子计算机的发展，传热问题的数值求解方法在最近 20 年中获得了迅速的发展，目前它已经成为研究传热问题的一种有效手段。用数值计算方法研究传热问题的有关内容称为数值传热学或计算传热学。数值传热学所涉及的计算方法很多，应用范围遍及传热学的各个分支领域，本章及下一章将就导热问题中最常用的一种方法，即有限差分法开展讨论，而第十章将把这种方法进一步推广应用于求解管槽内层流充分发展的对流换热问题。读者如欲进一步了解各种数值计算方法在求解不同传热问题中的应用，可参阅文献[1～4]。

§ 1-1　建立离散方程的方法

在进行物理问题的数值求解时，需把原来由微分方程描述的在空间坐标、时间坐标上均连续的物理量场(如速度场、温度场)，用所研究区域内有限个点(称为节点)上这些物理量的值的集合来代替，并按一定方法建立起一组在给定节点上规定这些物理量的值之间关系的代数方程式(称为离散方程)。然后，求解这组代数方程就可以获得各节点上物理量的具体数值。这种数值求解物理

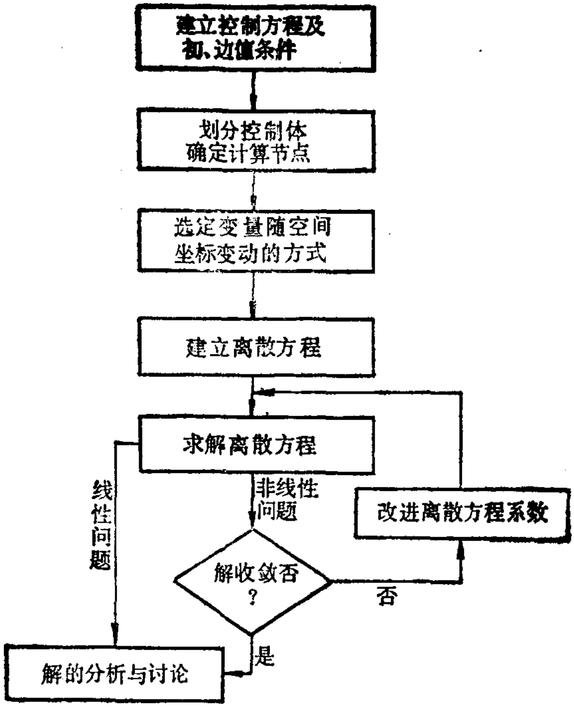


图 1-1 数值求解物理问题的基本步骤

问题的步骤大致可用图 1-1 表示。

对于同一物理问题来说，不同数值解法间的主要区别在于区域离散化(即图 1-1 的第二框)、形状函数的选择(即图1-1中的第三框）及离散方程的建立这三步。本章将针对一维导热问题，较详细地介绍采用有限差分法时各个步骤的实施细节，并在下一章中把这个方法应用到多维问题中去。

常物性的一维非稳态导热问题的控制方程式为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{S}{\rho c} \tag{1-1}$$

式中，t 为温度，τ、x 分别为时间坐标与空间坐标，ρ、c 分别为密度与比热容，S 为内热源强度。为进行数值求解，先要对时间区域、空间区域离散化。设把所要求解的空间区域($0\sim x_e$)及时间区域按图 1-2 所示的方法进行划分，且空间步长 Δx 与时间步长 $\Delta\tau$ 分别保持为常数。划分空间区域与时间区域的网格线的交点就是节点。在任一节点(n,i)处的温度为 $t(n\Delta x, i\Delta\tau)$，简记为 $t_{n,i}$。

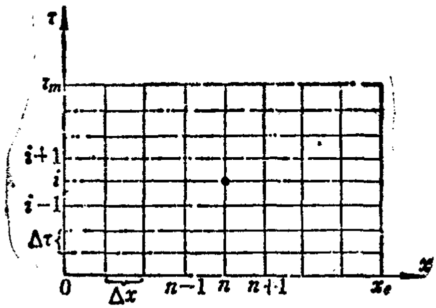


图 1-2 一维非稳态问题的时、空网格

为了建立有限差分的离散方程式，通常可以采用两种方法，即泰勒（Taylor）展开法及控制体积分法。以下分别介绍这两种方法。

1．泰勒展开法

在图 1-2 所示区域中的任一内节点(n, i)上，式(1-1)可以写为

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_{n,i}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{n,i}+\left(\frac{S}{\rho c}\right)_{n,i} \tag{1-2}$$

将温度 t 在点$(n+1,i)$及$(n-1,i)$的值对点(n,i)作泰勒展开，然后相加，可得

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{n,i}=\frac{t_{n+1,i}-2t_{n,i}+t_{n-1,i}}{(\Delta x)^2}+O[(\Delta x)^2] \tag{a}$$

式中，$O[(\Delta x)^2]$是关于 Δx 的二阶小量。类似地可得

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_{n,i}=\frac{t_{n,i+1}-t_{n,i}}{\Delta\tau}+O(\Delta\tau) \tag{b}$$

将以上二式代入式(1-2)得

$$\frac{t_{n,i+1}-t_{n,i}}{\Delta\tau}=a\frac{t_{n+1,i}-2t_{n,i}+t_{n-1,i}}{(\Delta x)^2}+\left(\frac{S}{\rho c}\right)_{n,i}+\text{HOT} \tag{1-3}$$

式中,HOT 代表未写出的各高阶项之和,阶数为 $O[\Delta\tau,(\Delta x)^2]$。

注意,式(1-3)是严格成立的,其中 $t_{n,i}$ 代表式(1-1)的分析解在节点(n,i)的值。要使式(1-3)转化为关于节点温度值的代数方程式,需要略去 HOT 项。显然,略去该项后要使式(1-3)仍然成立,就应以各节点温度的近似解来代替其精确解。把节点(n,i)上的近似值记为 t_n^i,则这些近似值满足以下代数方程:

$$\frac{t_n^{i+1}-t_n^i}{\Delta\tau}=a\frac{t_{n+1}^i-2t_n^i+t_{n-1}^i}{(\Delta x)^2}+\left(\frac{S}{\rho c}\right)_n^i \tag{1-4}$$

这就是与式(1-1)相对应的有限差分离散方程。式(1-4)也可通过把式(1-1)中的两个导数用相应的差分式代替而得出。由于导数的差分表达式可以通过泰勒展开得到,所以上述导出式(1-4)的方法称为泰勒展开法。文献中,如文献[5],常把式(1-4)称为式(1-1)的 FTCS 格式(Forward Time and Central Space),即时间向前差分、空间坐标中心差分的差分格式。

2. 控制体积分法

采用这种方法导出离散方程时,把节点看成是一个控制体的代表。对于均分网格,节点永远位于控制体的中心。对于所求解的变量,选定其依空间坐标及时间坐标的变化规律(即选定其形状函数或型线),然后把控制方程式对控制体积分,利用所选定的型线求出各项积分值,从而导出规定各节点上变量值之间关系的代数方程式。对于图 1-2 所示网格系统中同一时间层上相邻的三个节点 W、P、E(相当于 $n-1$, n 及 $n+1$),其各自的控制体如图 1-3 中的虚线所示。图中,用符号 Δx 表示控制体的宽度,而用 δx 表示相邻两节点间的距离。为一般化起见,设导热系数 k 为变量,则

式(1-1)可改写成为

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial t}{\partial x}\right)+S \tag{1-5}$$

在本章及第二、八章中，k 表示导热系数，而以符号 λ 表示特征值。将此式对控制体 P 作时间与空间坐标的积分，得

$$\rho c\int_{w}^{e}(t)_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}dx=\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left(k\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{w}^{e}d\tau+\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\int_{w}^{e}S\,dx\,d\tau \tag{c}$$

为了把上式中的三个积分计算出来，需选定 t 在该控制体内随 x 及 τ 变化的规律(即型线)。常见的两种型线是阶跃式与分段线性两种(图 1-4)。下面分别采用这两种型线对以上三项积分作计算。

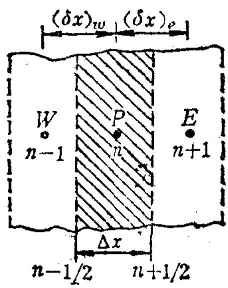


图 1-3　一维问题的控制体

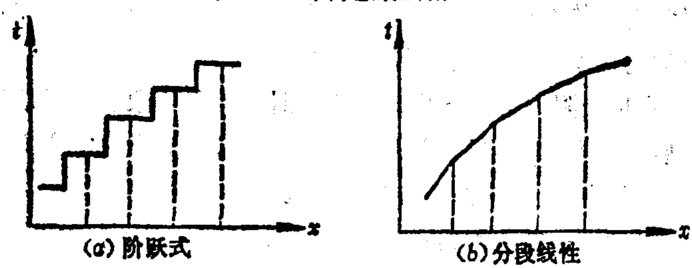


图 1-4　两种型线

1．非稳态项　取该项内 t 对 x 为阶跃式变化，即同一控制体内 t 为常数，并取为节点 P 之值，则有

$$\rho c\int_{w}^{e}(t)_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}dx=\rho c(t_P^{\tau+\Delta\tau}-t_P^{\tau})\Delta x \tag{d}$$

2. 扩散项　设$k\dfrac{\partial t}{\partial x}$对时间作显式阶跃式变化，即在$\tau$到$\tau+\Delta\tau$的时间间隔内均以$\tau$时刻的值作为计算依据，并取$t$对$x$为分段线性变化，则有

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left(k\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{w}^{e}d\tau=\left[\left(k\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{e}^{\tau}-\left(k\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{w}^{\tau}\right]\Delta\tau$$

$$=\left[k_e\frac{t_E-t_P}{(\delta x)_e}-k_w\frac{t_P-t_W}{(\delta x)_w}\right]^{\tau} \tag{e}$$

其中k_e、k_w为控制体界面e、w上的当量导热系数值。

3. 源项　无论对于时间或空间，源项均取为阶跃式变化，则显式格式的结果为

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\int_{w}^{e}S\,dx\,d\tau=S^{\tau}\Delta x\Delta\tau \tag{f}$$

式中，S取P点上之值。

将式(d)、(e)、(f)代入式(c)，经整理后可得

$$\rho c\frac{t_P^{\tau+\Delta\tau}-t_P^{\tau}}{\Delta\tau}=\frac{1}{\Delta x}\left[k_e\frac{t_E-t_P}{(\delta x)_e}-k_w\frac{t_P-t_W}{(\delta x)_w}\right]^{\tau}+S^{\tau} \tag{1-6}$$

显然，对于均分网格$[(\delta x)_e=(\delta x)_w=\Delta x]$，且当$k$为常数时，式(1-6)与用泰勒展开法导出的式(1-4)相同。

在用有限差分法导出离散方程时，一般不象有限元法那样强调型线问题，但实际上总是按一定的型线来建立离散方程的。以一维非稳态、无内热源的导热问题为例，三种常见的格式为：

显式——在这种格式中，对空间坐标的二阶导数以所研究时间间隔开始时刻的值计算，而有

$$\frac{t_n^{i+1}-t_n^{i}}{\Delta\tau}=a\frac{t_{n+1}^{i}-2t_n^{i}+t_{n-1}^{i}}{(\Delta x)^2}$$

隐式——在这种格式中，对空间坐标的二阶导数以所研究时

间间隔终了时刻的值计算，而有

$$\frac{t_n^{i+1}-t_n^i}{\Delta\tau}=a\frac{t_{n+1}^{i+1}-2\,t_n^{i+1}+t_{n-1}^{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

克兰克-尼克松 (Crank-Nicolson) 格式——在这种格式中，对空间坐标的二阶导数以所研究时间间隔的初始与终了时刻的算术平均值计算，而有

$$\frac{t_n^{i+1}-t_n^i}{\Delta\tau}=\frac{a}{2}\left(\frac{t_{n+1}^{i+1}-2\,t_n^{i+1}+t_{n-1}^{i+1}}{(\Delta x)^2}+\frac{t_{n+1}^i-2\,t_n^i+t_{n-1}^i}{(\Delta x)^2}\right)$$

以上三种格式中，非稳态项的型线均为分段线性，而扩散项中 t 对时间的型线分别是阶跃(显式)、阶跃 (隐式) 及分段线性(C-N)的变化，见图 1-5。

控制体积分法与一般教材 (如文献[6]) 中的热平衡法实质上是一致的，但采用热平衡法时不能揭示出在建立离散方程的过程中对未知量型线所作的假设。用控制体积分法及热平衡法导出离散方程的优点是：无论网格多么稀疏，所得出的解总是满足守恒定律的，且离散方程中各系数的物理意义明确 (将在下节中说明)。而用泰勒展开法导出的离散方程易于进行误差及一些其它数学方面的分析，但不能保证离散方程的解满足守恒定律。在工程传热问题的数值计算中，广泛应用以控制体积分导出离散方程的方法。

§ 1-2　一维导热问题的通用控制方程及其离散形式

实际问题的数值计算都要由计算机来完成。为使所编写的程序具有一定的通用性，首先应使据以导出离散方程的控制方程式具有一定的通用性。这可以从两个方面着手，即把描述不同物理现象的控制方程通用化，以及把同一物理过程在不同坐标系中的控制方程化成同一形式。一维导热问题是后一类通用化的简单例子。

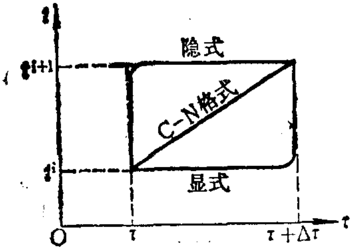


图 1-5　变量对时间的三种型线

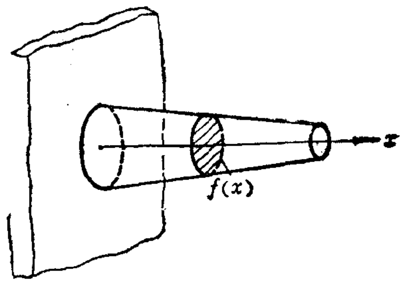


图 1-6　一维变截面导热问题

在直角坐标、圆柱坐标、球坐标中,对于一般的变截面一维导热问题(图 1-6),稳态时的通用控制方程可表示成为

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}\left[kf(x)\frac{df}{dx}\right]+S=0 \qquad (1\text{-}7)$$

式中 x 为与热量传递方向平行的广义坐标,对于圆柱与球 x 为半径。$f(x)$为与导热面积有关的因子。对于直角坐标的等截面问题 $f(x)=1$;对于圆柱坐标 $f(x)=x$;对于球坐标 $f(x)=x^2$;对于一般变截面问题 $f(x)$为 x 处的导热面积。S 是广义源项。之所以称为广义源项,是因为它未必具有物理上源项的意义。从数值计算的角度而言,在稳态导热的控制方程中,除了扩散项(即导热项)外,其余均属源项。k 为广义扩散系数,在不少情形下它并不等于所研究问题的实际导热系数。

下面用控制体积分法来导出式(1-7)的离散形式。采用图 1-3 中的符号,以 $f(x)$乘式(1-7)两边,并将所得结果对控制体 P 作积分,得

$$\int_w^e \frac{d}{dx}\left[kf(x)\frac{dt}{dx}\right]dx+\int_w^e Sf(x)dx=0 \qquad (a)$$

取扩散项中的 t 对空间坐标为分段线性,则扩散项的积分为