

線性代數

原理及題解

方世榮譯

含600個問題及解答

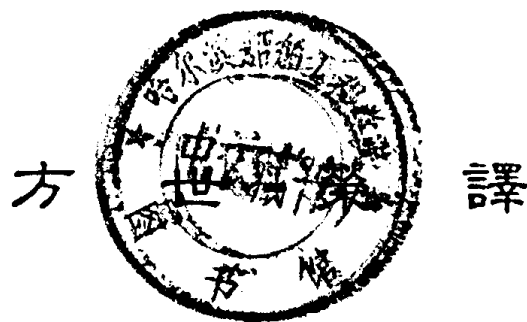
曉園出版社

世界圖書出版公司

369577

線性代數

原理及題解



含 600 個問題及解答

曉園出版社

世界圖書出版公司

北京·廣州·上海·西安

内 容 简 介

本书为美国《肖姆氏概论丛书》之一。本书阐述了线性代数的基本原理。每一章中除有实例说明外，还有大量的习题及解答，适合学生自学。

01077/34

线性代数原理及题解

(美) 西摩·利普舒茨 著

方世荣 译

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司 重印

北京朝阳门内大街137号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1993年6月第一版 开本 787×1245 1/20

1993年6月第一次印刷 印张: 23.4

印数: 0001-1600 字数: 37.4万字

ISBN: 7-5062-1607-8/O·71

定价: 13.90元 (W₉9303/9)

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向台湾晓园出版社购得重印权
限国内发行

序 言

本書為美國 Schaum's outline series 科技精簡叢書之一，該叢書是將美國各大學所用各類教科書綜合後，摘其精要編寫而成。

線性代數近年來已被廣泛引用於數學、物理學、電機、化工、生態工程學等基礎與應用自然科學以及管理學、社會學與經濟學等人文科學之領域；它也逐漸成為專科學校以上並擴及研修應用數學課程必備之學科。

本書乃針對補充正式課程所使用的教科書之不足而設計的。無論讀者的專業領域為何，均可由本書中獲得線性代數的基本觀念及應用。此外，本書的一大特色為，它比一般初等教材包含更多的內容。因此，本書顯得更具彈性，更富參考價值，並且更可激發讀者對此學科產生興趣。

本書的另一大特色是，在每一章開始對其重要的觀念與定理、定義都有精要且明晰的說明，並附有許多實例加以解說。其後為進階性的解答題與補充題。解答題是用來說明與擴大理論的應用，並把讀者繼續進修所需的重要觀念明確地提列出來。此外，對基本原理的重複練習更可提高學習效率，至於補充題則是將每一章內容作完整的複習。

由於本書所列的練習極其豐富，讀者不妨多花一點時間仔細地作過每個練習，則對於線性代數之課程將可奠下更深厚的基礎。

方世榮

目 錄

第一章 在 R^n 與 C^n 中的向量 1

1. 介紹 1 / 2. R^n 中的向量 2 / 3. 向量加法與純量乘法 3
/ 4. 點積 4 / 5. R^n 中的模數與距離 5 / 6. 複數 6 / 7. C^n
中的向量 8 / 習題與解答 9 / 補充題 19 / 補充題解答 21

第二章 線性方程式 23

1. 介紹 23 / 2. 線性方程式 23 / 3. 線性聯立方程組 25 /
4. 線性聯立方程組的解 25 / 5. 線性齊次方程組的解 30 / 習題
與解答 32 / 補充題 42 / 補充題解答 44

第三章 矩 陣 45

1. 介紹 45 / 2. 矩陣 45 / 3. 矩陣加法與純量乘法 47 / 4.
矩陣乘法 48 / 5. 轉置 51 / 6. 矩陣與線性聯立方程組 51 /
7. 列梯形矩陣 53 / 8. 列同義與基本的列運算 54 / 9. 方阵
55 / 10. 方阵的代數 57 / 11. 可逆矩陣 57 / 12. 分區矩陣
59 / 習題與解答 60 / 補充題 76 / 補充題解答 79

第四章 向量空間與子空間 83

1. 介紹 83 / 2. 向量空間的例子 84 / 3. 子空間 85 / 4. 線
性組合, 線性展式 87 / 5. 矩陣的列空間 89 / 6. 和與直和
90 / 習題與解答 92 / 補充題 108 / 補充題解答 113

第五章 基底與維度 115

1. 介紹 115 / 2. 線性相依 115 / 3. 基底與維度 118 / 4.
維度與子空間 120 / 5. 矩陣的秩 121 / 6. 線性方程組的應用
122 / 7. 座標 124 / 習題與解答 127 / 補充題 154 / 補

充題解答 160

第六章 線性映射 163

1. 映射 163 / 2. 線性映射 167 / 3. 線性映射的核與像 170
/ 4. 奇異與非奇異映像 172 / 5. 線性映射與線性聯立方程組 173
/ 6. 線性映射的運算 173 / 7. 線性算子的代數 175 / 8. 可逆的
算子 176 / 習題與解答 178 / 補充題 198 / 補充題解答
202

第七章 矩陣與線性算子 205

1. 介紹 205 / 2. 線性算子的矩陣代表式 205 / 3. 基底的轉換
209 / 4. 相似性 212 / 5. 矩陣與線性映射 213 / 6. 注意
215 / 習題與解答 216 / 補充題 228 / 補充題解答 231

第八章 行列式 233

1. 介紹 233 / 2. 排列 233 / 3. 行列式 235 / 4. 行列式的
性質 237 / 5. 子行列式與餘因式 238 / 6. 古典伴隨矩陣 239
/ 7. 線性方程組的應用 241 / 8. 線性算子的行列式 242 / 9. 多
重線性與行列式 243 / 習題與解答 244 / 補充題 262 / 補
充題解答 265

第九章 特徵值與特徵向量 267

1. 介紹 267 / 2. 矩陣與線性算子的多項式 267 / 3. 特徵值與特
徵向量 268 / 4. 對角線化與特徵向量 271 / 5. 特徵多項式, 凱
利-漢密爾頓定理 272 / 6. 最低多項式 275 / 7. 線性算子的特
徵多項式與最低多項式 276 / 習題與解答 277 / 補充題 294
/ 補充題解答 298

第十章 典型形式 301

1. 介紹 301 / 2. 三角形形式 301 / 3. 不變性 302 / 4. 不變
的直和分解 303 / 5. 質因式分解 305 / 6. 冪零運算子 306
/ 7. 約旦典型形式 307 / 8. 循環子空間 308 / 9. 有理典型形式

309 / 10. 商空間 311 / 習題與解答 312 / 補充題 332
/ 補充題解答 336

第十一章 線性泛函數與對偶空間 339

1. 介紹 339 / 2. 線性泛函數與對偶空間 339 / 3. 對偶基底
340 / 4. 第二對偶空間 342 / 5. 零化群 342 / 6. 線性映射的
轉置 343 / 習題與解答 344 / 補充題 352 / 補充題解答
354

第十二章 雙線性形式，二次形式與厄米特形式 355

1. 雙線性形式 355 / 2. 雙線性形式與矩陣 356 / 3. 交錯的雙
線性形式 357 / 4. 對稱雙線性形式，二次形式 358 / 5. 實對稱
雙線性形式，慣性定律 360 / 6. 厄米特形式 361 / 習題與解答
363 / 補充題 373 / 補充題解答 377

第十三章 內積空間 379

1. 介紹 379 / 2. 內積空間 379 / 3. 歌西 - 舒瓦茲不等式
381 / 4. 正交 382 / 5. 正規集合 384 / 6. 格拉姆 - 席米
特正交化過程 385 / 7. 線性泛函數與伴隨運算子 386 / 8.
 $A(V)$ 與 C 間的相似，特定運算子 388 / 9. 正交與單式運算子
389 / 10. 正交與單式矩陣 390 / 11. 正交基底的變換 392 /
12. 正運算子 392 / 13. 歐幾里德空間內的對角線化與典型形式
393 / 14. 單式空間內的對角線化與典型形式 395 / 15. 分譜定理
396 / 習題與解答 397 / 補充題 418 / 補充題解答 425

附錄 A 集合與關係 427

附錄 B 代數結構 435

附錄 C 佈於體內的多項式 445

索引 451

第一章

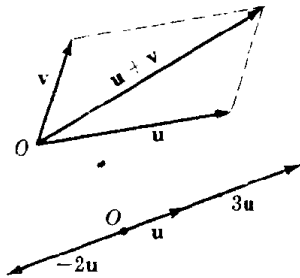
在 R^n 與 C^n 中的向量

1.1 介紹

在衆多物理學應用中，似乎有某些量如溫度與速率只有「大小」(magnitude)之分。這些量可用實數來表示並稱之為純量(scalar)。另外，還有一些量諸如力與速度同時具有「大小」與「方向」(direction)之特質。這些量通常都以箭頭來表示(具有適當的大小與方向且從某一已知的參考點 O 劃出)，並稱之為向量(vector)。在本章中我們將詳細地探討此類向量的性質。

首先，我們考慮下列向量的運算：

- (1) 加法 (Addition)：二個向量 u 與 v 的合向量 $u + v$ 可由所謂的平行四邊形法則 (parallelogram law) 得到，亦即， $u + v$ 是由 u 與 v 所構成之平行四邊形的對角線，如右圖所示。



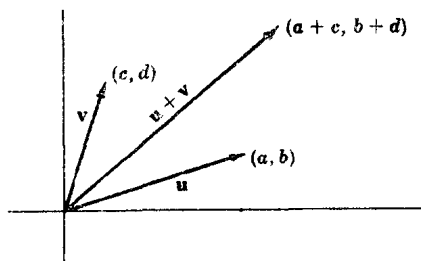
- (2) 純量乘法 (Scalar multiplication)：一實數 k 乘上向量 u 的乘積 ku ，可由將 u 的大小乘上 k 而得，並且若 $k \geq 0$ 則保持與 u 同方向；否則，若 $k < 0$ ，則與 u 反方向，如右圖所示。

現在，我們假定讀者熟悉實數的有序對 (ordered pair) 以點在平面上的表示方式。如果把座標軸上的原點選擇在如上所述的參考點 O 上，則每個向量便可由其終點的座標唯一決定。上面所談過的運算與終點之間的關係，如下所述。

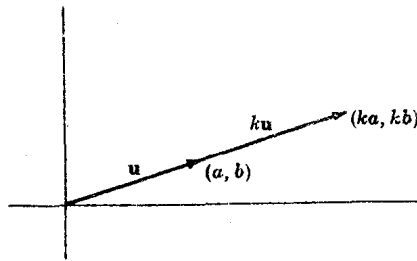
- (1) 加法：若 (a, b) 與 (c, d) 為向量 u 與 v 的終點，則 $(a + c, b + d)$ 為 $u + v$ 的終點，如下面的圖(a)所示。
- (2) 純量乘法：若 (a, b) 為向量 u 的終點，則 (ka, kb) 為向量 ku 的終點，如下面的圖(b)所示。

在數學上，我們把向量與其終點視為一體；也就是說，我們稱實數的有序對 (a, b) 為一向量。事實上，我們可把此種記號一般化，而稱實數的 n -元組 (n -tuple)

2 第一章 在 \mathbb{R}^n 與 \mathbb{C}^n 中的向量



圖(a)



圖(b)

(a_1, a_2, \dots, a_n) 爲一向量。此外，我們亦可再一般化，允許 n -元組的座標爲複數，而不只是限定爲實數。最後，我們將在第四章對這些 n -元組的性質做個摘要，並正式定義爲數學系統，此稱爲向量空間 (vector space)。

我們假定讀者已熟悉實數體 (real number field) (以 \mathbb{R} 表示) 的一些基本性質。

1.2 \mathbb{R}^n 中的向量

所有實數 n -元組的集合，以 \mathbb{R}^n 表示，稱爲 n 維空間 (n -space)。 \mathbb{R}^n 中的某個特定的 n -元組，如

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

稱爲一點 (point) 或向量 (vector)；實數 u_i 則稱爲向量 u 的分量 (component) (或座標 (coordinate))。此外，當我們討論空間 \mathbb{R}^n 時，我們使用純量這術語作爲 \mathbb{R} 的元素，亦即是實數。

例題 1.1

考慮下列向量：

$$(0, 1), (1, -3), (1, 2, \sqrt{3}, 4), (-5, \frac{1}{2}, 0, \pi)$$

前二個向量含有二個分量，因而是 \mathbb{R}^2 中的點；後二個向量含有四個分量，所以是 \mathbb{R}^4 中的點。

二向量 u 與 v ，若含有相同數目的分量 (亦即，屬於相同的空間)，並且若其對應的分量皆相等，則稱此二向量相等 (equal)，寫成 $u = v$ 。由此可知，向量 $(1, 2, 3)$ 與 $(2, 3, 1)$ 不相等，因爲其對應的分量不相等。

例題 1.2

假設 $(x - y, x + y, z - 1) = (4, 2, 3)$ ，由向量相等的定義可知

$$\begin{aligned}x - y &= 4 \\x + y &= 2 \\z - 1 &= 3\end{aligned}$$

求解上面的聯立方程組可得 $x = 3$ ， $y = -1$ ， $z = 4$ 。

1.3 向量加法與純量乘法

設 u 與 v 為 \mathbf{R}^n 中的向量：

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{與} \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

u 與 v 的和，寫成 $u + v$ ，是依據對應分量相加而得到的向量：

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

實數 k 與向量 u 的乘積，寫成 ku ，是依據 u 的每個分量乘上 k 而得到的向量：

$$ku = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

因而，我們可觀察出 $u + v$ 與 ku 亦為 \mathbf{R}^n 中的向量。又，我們也定義

$$-u = -1u \quad \text{與} \quad u - v = u + (-v)。$$

此外，含有不同數目的分量之向量的加法無法定義。

例題 1.3

設 $u = (1, -3, 2, 4)$ 與 $v = (3, 5, -1, -2)$ ，則

$$\begin{aligned}u + v &= (1+3, -3+5, 2-1, 4-2) = (4, 2, 1, 2) \\5u &= (5 \cdot 1, 5 \cdot (-3), 5 \cdot 2, 5 \cdot 4) = (5, -15, 10, 20) \\2u - 3v &= (2, -6, 4, 8) + (-9, -15, 3, 6) = (-7, -21, 7, 14)\end{aligned}$$

例題 1.4

向量 $(0, 0, \dots, 0)$ 屬於 \mathbf{R}^n ，以 $\mathbf{0}$ 表示，稱為零向量 (zero vector)。其性質與純量 0 很相似，亦即，對任意向量 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 而言，下式恒成立，

$$u + \mathbf{0} = (u_1 + 0, u_2 + 0, \dots, u_n + 0) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = u$$

4 第一章 在 \mathbf{R}^n 與 \mathbf{C}^n 中的向量

在向量的加法與純量乘法的運算之下， \mathbf{R}^n 中的向量之基本性質以下面的定理來說明。

定理 1.1：對 \mathbf{R}^n 中的任意向量 u, v, w 與 \mathbf{R} 中的任意純量 k, k' 而言：

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (u+v)+w = u+(v+w) & \text{(v)} & k(u+v) = ku+kv \\ \text{(ii)} & u+0 = u & \text{(vi)} & (k+k')u = ku+k'u \\ \text{(iii)} & u+(-u) = 0 & \text{(vii)} & (kk')u = k(k'u) \\ \text{(iv)} & u+v = v+u & \text{(viii)} & 1u = u \end{array}$$

補註：假設向量 u, v 皆屬於 \mathbf{R}^n ，對某些 \mathbf{R} 中的非零純量 k 而言，使得 $u = kv$ ，則當 $k > 0$ 時， u 與 v 為同方向；否則，當 $k < 0$ 時， u 與 v 反方向。

1.4 點積

設向量 u 與 v 皆屬於 \mathbf{R}^n ：

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{與} \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

u 與 v 的點積 (dot product) 或內積 (inner product)，以 $u \cdot v$ 表示，是將其相對應的分量作乘積而後加總所得到的純量：

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

若向量 u, v 的點積為 0，亦即 $u \cdot v = 0$ ，則稱 u 與 v 為正交 (orthogonal) 或垂直 (perpendicular)。

例題 1.5

設 $u = (1, -2, 3, -4)$ ， $v = (6, 7, 1, -2)$ 與 $w = (5, -4, 5, 7)$ 。則

$$\begin{aligned} u \cdot v &= 1 \cdot 6 + (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) = 6 - 14 + 3 + 8 = 3 \\ u \cdot w &= 1 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 7 = 5 + 8 + 15 - 28 = 0 \end{aligned}$$

因此， u 與 w 為正交。

\mathbf{R}^n 中的點積之基本性質敘述如下。

定理 1.2：對 \mathbf{R}^n 中的任意向量 u, v, w 與 \mathbf{R} 中的任意純量 k 而言：

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (u+v) \cdot v = u \cdot v + v \cdot v & \text{(iii)} & u \cdot v = v \cdot u \\ \text{(ii)} & (ku) \cdot v = k(u \cdot v) & \text{(iv)} & v \cdot u \geq 0, \text{ 且 } u \cdot u = 0 \text{ 若且唯若 } u = 0 \end{array}$$

補註：具有上面所談過的向量加法，純量乘法與點積等運算的空間 \mathbf{R}^n 通常稱為歐氏 n 維空間 (Euclidean n -space)。

1.5 \mathbf{R}^n 中的模數與距離

設向量 u 與 v 屬於 \mathbf{R}^n ： $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 與 $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 。點 u 與 v 之間的距離 (distance)，寫成 $d(u, v)$ ，定義為

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

向量 u 的模數 (norm) 或長度 (length)，寫成 $\|u\|$ ，定義為 $u \cdot u$ 之非負的平方根：

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

依據定理 1.2 知 $u \cdot u \geq 0$ ，所以此平方根存在。須注意的是，

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

例題 1.6

設 $u = (1, -2, 4, 1)$ 與 $v = (3, 1, -5, 0)$ 則

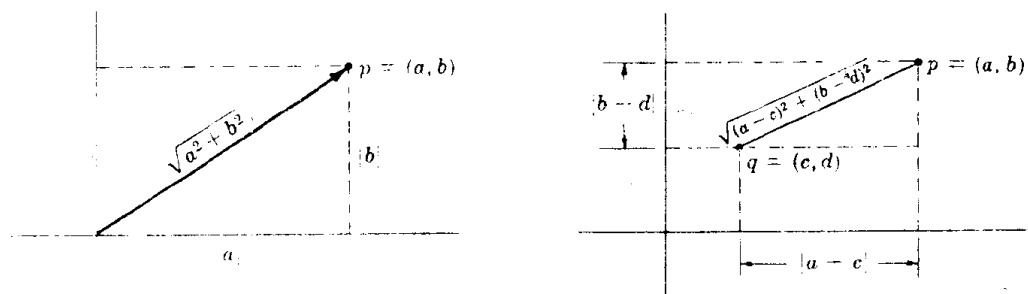
$$d(u, v) = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-1)^2 + (4+5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{95}$$

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2 + 0^2} = \sqrt{35}$$

接着，若我們考慮平面 \mathbf{R}^2 中的二點， $p = (a, b)$ 與 $q = (c, d)$ ，則

$$\|p\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{與} \quad d(p, q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

這也就是說，通常 $\|p\|$ 就相當於箭頭從原點到 p 點的歐氏長度，而 $d(p, q)$ 則相當於 p 點與 q 點之間的歐氏距離，如下圖所示：



對於直線 \mathbf{R} 上與空間 \mathbf{R}^3 內的點而言，上面類似的結果亦可成立。

補註：任一向量 e ，若其模數為 1： $\|e\| = 1$ ，則稱為單位向量 (unit vector)。

注意，對 \mathbb{R}^n 中的任意非零向量 u 而言，向量 $e_u = u / \|u\|$ 為與 u 同方向的單位向量。

以下我們說明大家所熟知的歌西 - 舒瓦茲不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) 之基本性質。

定理 1.3 (歌西 - 舒瓦茲)：對 \mathbb{R}^n 中的任意向量 u, v 而言， $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$ 。

利用上面的不等式，我們可定義任意二個 \mathbb{R}^n 中的非零向量 u, v 之間的夾角

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

注意，若 $u \cdot v = 0$ ，則 $\theta = 90^\circ$ (或者 $\theta = \pi/2$)，此乃符合我們前面對於正交的定義。

1.6 複數

複數 (complex number) 的集合以 \mathbb{C} 表示之。形式上，複數乃為一實數的有序對 (a, b) ；複數的相等，加法與乘法之定義如下：

$$\begin{aligned} (a, b) &= (c, d) \text{ 若且唯若 } a = c \text{ 且 } b = d \\ (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

我們可把實數 a 與複數 $(a, 0)$ 視為相同：

$$a \leftrightarrow (a, 0)$$

事實上這是可能的，因為實數的加法與乘法之運算在對應關係之下是保持不變的：

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{與} \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

因此，只要在方便與可能的情況下，我們可把 \mathbb{R} 視為 \mathbb{C} 的子集合，並以 $(a, 0)$ 替代 a 。

複數 $(0, 1)$ ，以 i 表示，具有下列重要的性質

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad \text{或} \quad i = \sqrt{-1}$$

此外，利用下面的事實

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \quad \text{與} \quad (0, b) = (b, 0)(0, 1)$$

我們可得

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

符號 $a + bi$ 比 (a, b) 更方便。舉例來說，複數的和與乘積可簡單地藉着結合律與分配律以及 $i^2 = -1$ 等性質而得到：

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

複數 $z = (a, b) = a + bi$ 的共軛複數 (conjugate)，可表示與定義為

$$\bar{z} = a - bi$$

(注意： $z\bar{z} = a^2 + b^2$) 在加法中，若 $z \neq 0$ ，則 z 的倒數 z^{-1} 與以 z 除的運算，可表示為

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \quad \text{與} \quad \frac{w}{z} = wz^{-1}$$

其中 $w \in \mathbb{C}$ 。我們亦定義

$$-z = -1z \quad \text{與} \quad w - z = w + (-z)$$

例題 1.7

假設 $z = 2 + 3i$ 與 $w = 5 - 2i$ 則

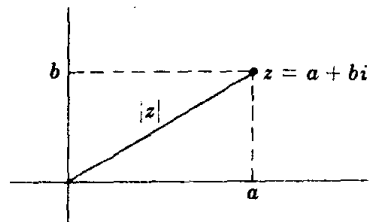
$$z + w = (2 + 3i) + (5 - 2i) = 2 + 5 + 3i - 2i = 7 + i$$

$$zw = (2 + 3i)(5 - 2i) = 10 + 15i - 4i - 6i^2 = 16 + 11i$$

$$\bar{z} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i \quad \text{與} \quad \bar{w} = \overline{5 - 2i} = 5 + 2i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{5 - 2i}{2 + 3i} = \frac{(5 - 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{4 - 19i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{19}{13}i$$

正如實數可表示為線上的一點一樣，複數亦可被表示為平面上的一點。特別是，我們可令平面上的點 (a, b) 代表複數 $z = a + bi$ ，亦即，其實數部分 (real-part) 為 a ，而虛數部分 (imaginary part) 為 b 。 z 的絕對值 (absolute value)，寫成 $|z|$ ，被定義為從 z 到原點的距離：



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

須注意到， $|z|$ 相等於向量 (a, b) 的模數。又， $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ 。

例題 1.8

假設 $z = 2 + 3i$ 與 $w = 12 - 5i$ 則

$$|z| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad \text{與} \quad |w| = \sqrt{144 + 25} = 13$$

補註：在附錄 B 中，我們將定義一種代數結構，叫做體 (field)。我們將強調下面的論點：含有上面所談過的加法與乘法的運算之複數集合 C 是一個體。

1.7 C^n 中的向量

所有複數 n -元組之集合，以 C^n 表示，稱為複數 n 維空間 (complex n -space)。正如實數的情況一樣， C^n 的元素稱為點或向量， C 的元素稱為純量，而且在 C^n 中的向量加法與純量乘法可表示為

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, \dots, z_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) &= (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n) \\ z(z_1, z_2, \dots, z_n) &= (zz_1, zz_2, \dots, zz_n) \end{aligned}$$

其中 $z_i, w_i, z \in C$ 。

例題 1.9

$$\begin{aligned} (2 + 3i, 4 - i, 3) + (3 - 2i, 5i, 4 - 6i) &= (5 + i, 4 + 4i, 7 - 6i) \\ 2i(2 + 3i, 4 - i, 3) &= (-6 + 4i, 2 + 8i, 6i) \end{aligned}$$

茲設 u 與 v 皆為 C^n 中的任意向量：

$$u = (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad v = (w_1, w_2, \dots, w_n), \quad z_i, w_i \in C$$

u 與 v 的點積或內積被定義為：

$$u \cdot v = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

要注意的是，此定義可化為前面所提到的實數情況，因為當 w_i 為實數時， $w_i = \bar{w}_i$ 。 u 的模數可表示為

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

注意，當 $u \neq 0$ 時， $u \cdot u$ 與 $\|u\|$ 皆為實數且為正，而當 $u = 0$ 時， $u \cdot u$ 與 $\|u\|$ 皆

為 0。

例題 1.10

設 $u = (2 + 3i, 4 - i, 2i)$ 與 $v = (3 - 2i, 5, 4 - 6i)$ 則

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (2 + 3i)\overline{(3 - 2i)} + (4 - i)\overline{5} + (2i)\overline{(4 - 6i)} \\ &= (2 + 3i)(3 + 2i) + (4 - i)(5) + (2i)(4 + 6i) \\ &= 13i + 20 - 5i - 12 + 8i = 8 + 16i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \cdot u &= (2 + 3i)\overline{(2 + 3i)} + (4 - i)\overline{(4 - i)} + (2i)\overline{(2i)} \\ &= (2 + 3i)(2 - 3i) + (4 - i)(4 + i) + (2i)(-2i) \\ &= 13 + 17 + 4 = 34 \end{aligned}$$

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{34}$$

具有上面向量加法，純量乘法與點積之運算的空間 \mathbb{C}^n 稱為複數歐氏 n 維空間 (complex Euclidean n -space)。

補註：若 $u \cdot v$ 被定義為 $u \cdot v = z_1 w_1 + \dots + z_n w_n$ ，則即使 $u \neq 0$ ， $u \cdot u = 0$ 仍是有可能的，例如， $u = (1, i, 0)$ 。事實上， $u \cdot u$ 有可能不為實數。

習題與解答

\mathbb{R}^n 中的向量

1.1 計算：(i) $(3, -4, 5) + (1, 1, -2)$; (ii) $(1, 2, -3) + (4, -5)$; (iii) $-3(4, -5, -6)$; (iv) $-(-6, 7, -8)$ 。

- 答 (a) 將對應的分量相加： $(3, -4, 5) + (1, 1, -2) = (3+1, -4+1, 5-2) = (4, -3, 3)$ 。
 (b) 因為此兩個向量含有不同數目的分量，所以此加法是無法定義的。
 (c) 將每一分量乘上一純量： $-3(4, -5, -6) = (-12, 15, 18)$ 。
 (d) 將每一分量乘上 -1 ： $-(-6, 7, -8) = (6, -7, 8)$ 。

1.2 設 $u = (2, -7, 1)$ ， $v = (-3, 0, 4)$ ， $w = (0, 5, -8)$ 求出 (i) $3u - 4v$ ，(ii) $2u + 3v - 5w$ 。

答 首先完成純量乘法的運算，然後再作向量加法。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad 3u - 4v &= 3(2, -7, 1) - 4(-3, 0, 4) = (6, -21, 3) + (12, 0, -16) = (18, -21, -13) \\ \text{(ii)} \quad 2u + 3v - 5w &= 2(2, -7, 1) + 3(-3, 0, 4) - 5(0, 5, -8) \\ &= (4, -14, 2) + (-9, 0, 12) + (0, -25, 40) \\ &= (4-9+0, -14+0-25, 2+12+40) = (-5, -39, 54) \end{aligned}$$

1.3 若 $(x, 3) = (2, x+y)$ ，試求出 x 與 y 。

答 因為此兩向量相等，因此其分量對應相等：

$$x = 2, \quad 3 = x + y$$

10 第一章 在 \mathbb{R}^n 與 \mathbb{C}^n 中的向量

以 $x = 2$ 代入第二個方程式可得 $y = 1$ ，因此 $x = 2$ ， $y = 1$ 。

1.4 若 $(4, y) = x(2, 3)$ ，試求出 x 與 y 。

圖 先作等式右邊的純量乘法，可得 $(4, y) = x(2, 3) = (2x, 3x)$ 。

設定對應分量彼此相等： $4 = 2x$ ， $y = 3x$ 。

求解 x 與 y 的線性方程式，可得： $x = 2$ ， $y = 6$ 。

1.5 若 $(2, -3, 4) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0)$ ，試求出 x ， y 與 z 。

圖 首先將純量 x ， y ， z 分別乘入，然後相加：

$$\begin{aligned} (2, -3, 4) &= x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0) \\ &= (x, x, x) + (y, y, 0) + (z, 0, 0) \\ &= (x + y + z, x + y, x) \end{aligned}$$

設定對應分量彼此相等：

$$x + y + z = 2, \quad x + y = -3, \quad x = 4$$

求解此聯立方程組，將 $x = 4$ 代入第二個方程式可得 $4 + y = -3$ 或者 $y = -7$ 。然後再將 x 與 y 之值代入第一個方程式，可得 $z = 5$ 。因此 $x = 4$ ， $y = -7$ ， $z = 5$ 。

1.6 證明定理 1.1：對 \mathbb{R}^n 中的任意向量 u, v, w 與 \mathbb{R} 中的任意純量 k, k' 而言，

- (i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (v) $k(u + v) = ku + kv$
- (ii) $u + 0 = u$ (vi) $(k + k')u = ku + k'u$
- (iii) $u + (-u) = 0$ (vii) $(kk')u = k(k'u)$
- (iv) $u + v = v + u$ (viii) $1u = u$

圖 設 u_i, v_i, w_i 分別是 u, v, w 的第 i 個分量。

(i) 依據定義， $u_i + v_i$ 是 $u + v$ 的第 i 個分量，而 $(u_i + v_i) + w_i$ 是 $(u + v) + w$ 的第 i 個分量。另一方面， $v_i + w_i$ 是 $v + w$ 的第 i 個分量，而且 $u_i + (v_i + w_i)$ 是 $u + (v + w)$ 的第 i 個分量。但是， u_i, v_i 與 w_i 皆為實數，因此結合律成立，亦即是

$$(u_i + v_i) + w_i = u_i + (v_i + w_i) \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

因而， $(u + v) + w = u + (v + w)$ ，因為他們的對應分量相等。

(ii) 因為， $0 = (0, 0, \dots, 0)$ ；因此

$$\begin{aligned} u + 0 &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (u_1 + 0, u_2 + 0, \dots, u_n + 0) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = u \end{aligned}$$

(iii) 因為 $-u = -1(u_1, u_2, \dots, u_n) = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$ 所以

$$\begin{aligned} u + (-u) &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \\ &= (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \dots, u_n - u_n) = (0, 0, \dots, 0) = 0 \end{aligned}$$

(iv) 依據定義， $v_i + u_i$ 是 $u + v$ 的第 i 個分量，而 $v_i + u_i$ 是 $v + u$ 的第 i 個分量。但是， u_i, v_i 皆為實數，因此交換律成立，亦即是，