線性代數

原理及題解

方世榮 譯

含600個問題及解答

曉園出版社
世界圖書出版公司

線性代數

原理及題解

方世[illegible] 譯

含600個問題及解答

曉園出版社
世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

内 容 简 介

本书为美国《肖姆氏概论丛书》之一．本书阐述了线性代数的基本原理，每一章中除有实例说明外，还有大量的习题及解答，适合学生自学．

线性代数原理及题解

（美）西摩、利普舒茨　著

方世荣　译

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司 重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993 年 6 月第　一　版　　开本 787×1245　1/20

1993 年 6 月第一次印刷　　印张：23.4

印数：0001－1600　　字数：37.4 万字

ISBN：7－5062－1607－8/O·71

定价：13.90 元　（W_B9303/9）

序　言

本書為美國Schaum's outline series科技精簡叢書之一，該叢書是將美國各大學所用各類教科書綜合後，摘其精要編寫而成。

線性代數近年來已被廣泛引用於數學、物理學、電機、化工、生態工程學等基礎與應用自然科學以及管理學、社會學與經濟學等人文科學之領域；它也逐漸成為專科學校以上並擴及研修應用數學課程必備之學科。

本書乃針對補充正式課程所使用的教科書之不足而設計的。無論讀者的專業領域為何，均可由本書中獲得線性代數的基本觀念及應用。此外，本書的一大特色為，它比一般初等教材包含更多的內容。因此，本書顯得更具彈性，更富參考價值，並且更可激發讀者對此學科產生興趣。

本書的另一大特色是，在每一章開始對其重要的觀念與定理、定義都有精要且明晰的說明，並附有許多實例加以解說。其後為進階性的解答題與補充題。解答題是用來說明與擴大理論的應用，並把讀者繼續進修所需的重要觀念明確地提列出來。此外，對基本原理的重覆練習更可提高學習效率，至於補充題則是將每一章內容作完整的複習。

由於本書所列的練習極其豐富，讀者不妨多花一點時間仔細地作過每個練習，則對於線性代數之課程將可奠下更深厚的基礎。

方世榮

目　　錄

第一章　在R^n與C^n中的向量　1

第二章　線性方程式　23

第三章　矩　陣　45

第四章　向量空間與子空間　83

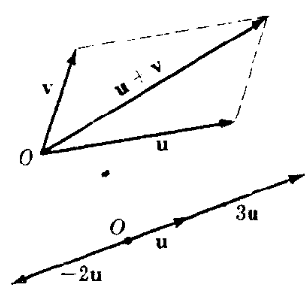
第五章　基底與維度　115

第一章
在R^n與C^n中的向量

1.1 介紹

在衆多物理學應用中，似乎有某些量如溫度與速率只有「大小」（magnitude）之分。這些量可用實數來表示並稱之爲**純量**（scalar）。另外，還有一些量諸如力與速度同時具有「大小」與「方向」（direction）之特質。這些量通常都以箭頭來表示（具有適當的大小與方向且從某一已知的參考點O劃出），並稱之爲**向量**（vector）。在本章中我們將詳細地探討此類向量的性質。

首先，我們考慮下列向量的運算：



(1) **加法**（Addition）：二個向量**u**與**v**的合向量**u** + **v**可由所謂的**平行四邊形法則**（parallelogram law）得到，亦即，**u** + **v**是由**u**與**v**所構成之平行四邊形的對角線，如右圖所示。

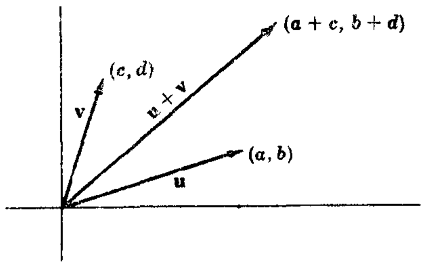
(2) **純量乘法**（Scalar multiplication）：一實數k乘上向量**u**的乘積$k\mathbf{u}$，可由將**u**的大小乘上k而得，並且若$k \geq 0$則保持與**u**同方向；否則，若$k < 0$，則與**u**反方向，如右圖所示。

現在，我們假定讀者熟悉實數的**有序對**（ordered pair）以點在平面上的表示方式。如果把座標軸上的原點選擇在如上所述的參考點O上，則每個向量便可由其終點的座標唯一決定。上面所談過的運算與終點之間的關係，如下所述。

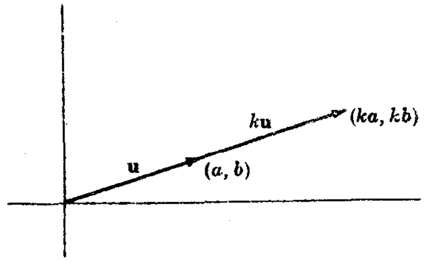
(1) **加法**：若(a, b)與(c, d)爲向量**u**與**v**的終點，則$(a+c, c+d)$爲**u**+**v**的終點，如下面的圖(a)所示。

(2) **純量乘法**：若(a, b)爲向量**u**的終點，則(ka, kb)爲向量$k\mathbf{u}$的終點，如下面的圖(b)所示。

在數學上，我們把向量與其終點視爲一體；也就是說，我們稱實數的有序對(a, b)爲一向量。事實上，我們可把此種記號一般化，而稱實數的n-元組(n-tuple)



圖(a)



圖(b)

$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$爲一向量。此外，我們亦可再一般化，允許$n$－元組的座標爲複數，而不只是限定爲實數。最後，我們將在第四章對這些n－元組的性質做個摘要，並正式定義爲數學系統，此稱爲**向量空間**（vector space）。

我們假定讀者已熟悉實數體（real number field）（以**R**表示）的一些基本性質。

1.2 R^n中的向量

所有實數n－元組的集合，以$\mathbf{R}^n$表示，稱爲n維空間（n-space）。$\mathbf{R}^n$中的某個特定的n－元組，如

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

稱爲一點（point）或向量（vector）；實數u_i則稱爲向量u的分量（component）（或座標（coordinate））。此外，當我們討論空間$\mathbf{R}^n$時，我們使用純量這術語作爲R的元素，亦即是實數。

例題 1.1

考慮下列向量：

$$(0, 1),\quad (1, -3),\quad (1, 2, \sqrt{3}, 4),\quad (-5, \tfrac{1}{2}, 0, \pi)$$

前二個向量含有二個分量，因而是$\mathbf{R}^2$中的點；後二個向量含有四個分量，所以是$\mathbf{R}^4$中的點。

二向量u與v，若含有相同數目的分量（亦即，屬於相同的空間），並且若其對應的分量皆相等，則稱此二向量相等（equal），寫成$u = v$。由此可知，向量（1，2，3）與（2，3，1）不相等，因爲其對應的分量不相等。

例題 1.2

假設（$x-y$，$x+y$，$z-1$）=（4，2，3），由向量相等的定義可知

$$\begin{aligned} x-y &= 4 \\ x+y &= 2 \\ z-1 &= 3 \end{aligned}$$

求解上面的聯立方程組可得 $x=3$，$y=-1$，$z=4$。

1.3 向量加法與純量乘法

設 u 與 v 為 $\mathbf{R}^n$ 中的向量：

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{與} \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

u 與 v 的和，寫成 $u+v$，是依據對應分量相加而得到的向量：

$$u + v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)$$

實數 k 與向量 u 的乘積，寫成 ku，是依據 u 的每個分量乘上 k 而得到的向量：

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

因而，我們可觀察出 $u+v$ 與 ku 亦為 $\mathbf{R}^n$ 中的向量。又，我們也定義

$$-u = -1u \quad \text{與} \quad u - v = u + (-v)\text{。}$$

此外，含有不同數目的分量之向量的加法無法定義。

例題 1.3

設 $u=(1,-3,2,4)$ 與 $v=(3,5,-1,-2)$，則

$$\begin{aligned} u + v &= (1+3, -3+5, 2-1, 4-2) = (4, 2, 1, 2) \\ 5u &= (5\cdot 1, 5\cdot(-3), 5\cdot 2, 5\cdot 4) = (5, -15, 10, 20) \\ 2u - 3v &= (2, -6, 4, 8) + (-9, -15, 3, 6) = (-7, -21, 7, 14) \end{aligned}$$

例題 1.4

向量（0，0，……，0）屬於 $\mathbf{R}^n$，以 $\mathbf{0}$ 表示，稱為**零向量**（zero vector）。其性質與純量 0 很相似，亦即，對任意向量 $u=(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)$ 而言，下式恒成立，

$$u + 0 = (u_1+0, u_2+0, \ldots, u_n+0) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = u$$

在向量的加法與純量乘法的運算之下，$\mathbf{R}^n$中的向量之基本性質以下面的定理來說明。

定理 1.1：對$\mathbf{R}^n$中的任意向量u，v，w與$\mathbf{R}$中的任意純量k，k'而言：

(i) $(u+v)+w = u+(v+w)$　　(v) $k(u+v) = ku+kv$

(ii) $u+0 = u$　　(vi) $(k+k')u = ku+k'u$

(iii) $u+(-u) = 0$　　(vii) $(kk')u = k(k'u)$

(iv) $u+v = v+u$　　(viii) $1u = u$

補註：假設向量u，v皆屬於$\mathbf{R}^n$，對某些$\mathbf{R}$中的非零純量k而言，使得$u=kv$，則當$k>0$時，u與v爲同方向；否則，當$k<0$時，u與v反方向。

1.4 點　積

設向量u與v皆屬於$\mathbf{R}^n$：

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad 與 \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

u與v的**點積**（dot product）或**內積**（inner product），以$u \cdot v$表示，是將其相對應的分量作乘積而後加總所得到的純量：

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

若向量u，v的點積爲0，亦即$u \cdot v = 0$，則稱u與v爲**正交**（orthogonal）或**垂直**（perpendicular）。

例題 1.5

設$u=(1,-2,3,-4)$，$v=(6,7,1,-2)$與$w=(5,-4,5,7)$。則

$$u \cdot v = 1 \cdot 6 + (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) = 6 - 14 + 3 + 8 = 3$$
$$u \cdot w = 1 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 7 = 5 + 8 + 15 - 28 = 0$$

因此，u與w爲正交。

$\mathbf{R}^n$中的點積之基本性質敍述如下。

定理 1.2：對$\mathbf{R}^n$中的任意向量u，v，w與$\mathbf{R}$中的任意純量k而言：

(i) $(u+v) \cdot v = u \cdot w + v \cdot w$　　(iii) $u \cdot v = v \cdot u$

(ii) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$　　(iv) $u \cdot u \geq 0$，且$u \cdot u = 0$若且唯若$u = 0$

補註：具有上面所談過的向量加法，純量乘法與點積等運算的空間 $\mathbf{R}^n$ 通常稱爲歐氏 n 維空間（Euclidean n-space）。

1.5 R^n 中的模數與距離

設向量 u 與 v 屬於 $\mathbf{R}^n$：$u=(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)$ 與 $v=(v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n)$。點 u 與 v 之間的距離（distance），寫成 $d(u, v)$，定義爲

$$d(u,v) = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}$$

向量 u 的模數（norm）或長度（length），寫成 $\|u\|$，定義爲 $u\cdot u$ 之非負的平方根：

$$\|u\| = \sqrt{u\cdot u} = \sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$$

依據定理 1.2 知 $u\cdot u \geq 0$，所以此平方根存在。須注意的是，

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

例題 1.6

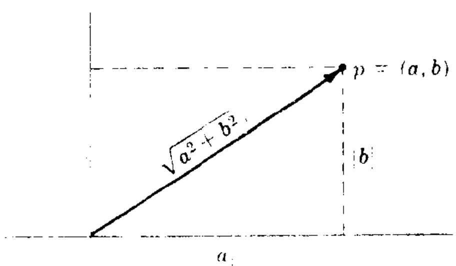
設 $u=(1,-2,4,1)$ 與 $v=(3,1,-5,0)$ 則

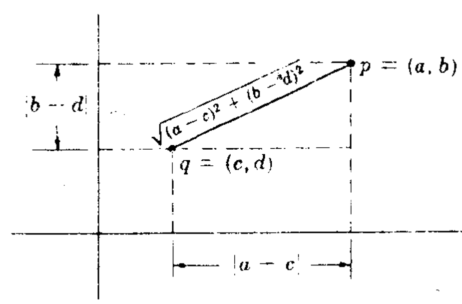
$$d(u,v) = \sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2+(4+5)^2+(1-0)^2} = \sqrt{95}$$
$$\|v\| = \sqrt{3^2+1^2+(-5)^2+0^2} = \sqrt{35}$$

接着，若我們考慮平面 $\mathbf{R}^2$ 中的二點，$p=(a, b)$ 與 $q=(c, d)$，則

$$\|p\| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad 與 \qquad d(p,q) = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

這也就是說，通常 $\|p\|$ 就相當於箭頭從原點到 p 點的歐氏長度，而 $d(p, q)$ 則相當於 p 點與 q 點之間的歐氏距離，如下圖所示：





對於直線 $\mathbf{R}$ 上與空間 $\mathbf{R}^3$ 內的點而言，上面類似的結果亦可成立。

補註：任一向量e，若其模數為1：$\|e\|=1$，則稱為單位向量（unit vector）。
注意，對$\mathbf{R}^n$中的任意非零向量u而言，向量$e_u=u/\|u\|$為與a同方向的單位向量。

以下我們說明大家所熟知的歌西－舒瓦茲不等式（Cauchy-Schwarz inequality）之基本性質。

定理1.3（歌西－舒瓦茲）：對$\mathbf{R}^n$中的任意向量u，v而言，$|u\cdot v|\le\|u\|\|v\|$。

利用上面的不等式，我們可定義任意二個$\mathbf{R}^n$中的非零向量u，v之間的夾角

$$\cos\theta=\frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

注意，若$u\cdot v=0$，則$\theta=90°$（或者$\theta=\pi/2$），此乃符合我們前面對於正交的定義。

1.6 複數

複數（complex number）的集合以$\mathbf{C}$表示之。形式上，複數乃為一實數的有序對（a，b）；複數的相等，加法與乘法之定義如下：

$$\begin{aligned}(a,b)&=(c,d)\text{ 若且唯若 } a=c\quad\text{且}\quad b=d\\(a,b)+(c,d)&=(a+c,b+d)\\(a,b)(c,d)&=(ac-bd,ad+bc)\end{aligned}$$

我們可把實數a與複數（a，0）視為相同：

$$a\leftrightarrow(a,0)$$

事實上這是可能的，因為實數的加法與乘法之運算在對應關係之下是保持不變的：

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)\qquad\text{與}\qquad(a,0)(b,0)=(ab,0)$$

因此，只要在方便與可能的情況下，我們可把$\mathbf{R}$視為$\mathbf{C}$的子集合，並以（a，0）替代a。

複數（0，1），以i表示，具有下列重要的性質

$$i^2=ii=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1\qquad\text{或}\qquad i=\sqrt{-1}$$

此外，利用下面的事實

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \qquad 與 \qquad (0, b) = (b, 0)(0, 1)$$

我們可得

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

符號 $a+bi$ 比 (a, b) 更方便。舉例來說，複數的和與乘積可簡單地藉着結合律與分配律以及 $i^2 = -1$ 等性質而得到：

$$(a+bi) + (c+di) = a + c + bi + di = (a+c) + (b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

複數 $z = (a, b) = a + bi$ 的**共軛複數**(conjugate)，可表示與定義爲

$$\bar{z} = a - bi$$

(注意：$z\bar{z} = a^2 + b^2$) 在加法中，若 $z \neq 0$，則 z 的倒數 z^{-1} 與以 z 除的運算，可表示爲

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i \qquad 與 \qquad \frac{w}{z} = wz^{-1}$$

其中 $w \in \mathbf{C}$。我們亦定義

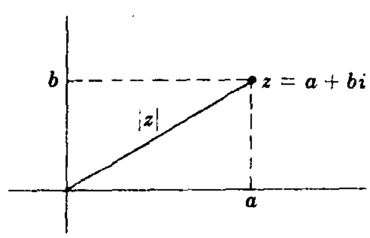
$$-z = -1z \qquad 與 \qquad w - z = w + (-z)$$

例題 1.7

假設 $z = 2 + 3i$ 與 $w = 5 - 2i$ 則

$$z + w = (2+3i) + (5-2i) = 2 + 5 + 3i - 2i = 7 + i$$
$$zw = (2+3i)(5-2i) = 10 + 15i - 4i - 6i^2 = 16 + 11i$$
$$\bar{z} = \overline{2+3i} = 2 - 3i \qquad 與 \qquad \bar{w} = \overline{5-2i} = 5 + 2i$$
$$\frac{w}{z} = \frac{5-2i}{2+3i} = \frac{(5-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{4-19i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{19}{13}i$$

正如實數可表示爲線上的一點一樣，複數亦可被表示爲平面上的一點。特別是，我們可令平面上的點 (a, b) 代表複數 $z = a + bi$，亦即，其**實數部分**(real-part)爲 a，而**虛數部分**(imaginary part)爲 b。z 的**絕對值**(absolute value)，寫成 $|z|$，被定義爲從 z 到原點的距離：



$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

須注意到，$|z|$ 相等於向量 (a, b) 的模數。又，$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$。

例題 1.8

假設 $z = 2+3i$ 與 $w = 12-5i$ 則

$$|z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \qquad \text{與} \qquad |w| = \sqrt{144+25} = 13$$

補註：在附錄 B 中，我們將定義一種代數結構，叫做**體**（field）。我們將強調下面的論點：含有上面所談過的加法與乘法的運算之複數集合 C 是一個體。

1.7 C^n 中的向量

所有複數 n－元組之集合，以 C^n 表示，稱爲**複數 n 維空間**（complex n-space）。正如實數的情況一樣，C^n 的元素稱爲**點**或**向量**，C 的元素稱爲純量，而且在 C^n 中的向量加法與純量乘法可表示爲

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) = (z_1+w_1, z_2+w_2, \ldots, z_n+w_n)$$
$$z(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (zz_1, zz_2, \ldots, zz_n)$$

其中 $z_i, w_i, z \in \mathbf{C}$。

例題 1.9

$$(2+3i, 4-i, 3) + (3-2i, 5i, 4-6i) = (5+i, 4+4i, 7-6i)$$
$$2i(2+3i, 4-i, 3) = (-6+4i, 2+8i, 6i)$$

茲設 u 與 v 皆爲 C^n 中的任意向量：

$$u = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad v = (w_1, w_2, \ldots, w_n), \qquad z_i, w_i \in \mathbf{C}$$

u 與 v 的**點積**或**內積**被定義爲：

$$u \cdot v = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \cdots + z_n\bar{w}_n$$

要注意的是，此定義可化爲前面所提到的實數情況，因爲當 w_i 爲實數時，$w_i = \bar{w}_i$。u 的模數可表示爲

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_n} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

注意，當 $u \neq 0$ 時，$u \cdot u$ 與 $\|u\|$ 皆爲實數且爲正，而當 $u = 0$ 時，$u \cdot u$ 與 $\|u\|$ 皆

爲 0 。

例題 1.10

設 $u = (2+3i, 4-i, 2i)$ 與 $v = (3-2i, 5, 4-6i)$ 則

$$
\begin{aligned}
u \cdot v &= (2+3i)(\overline{3-2i}) + (4-i)(\overline{5}) + (2i)(\overline{4-6i}) \\
&= (2+3i)(3+2i) + (4-i)(5) + (2i)(4+6i) \\
&= 13i + 20 - 5i - 12 + 8i = 8 + 16i \\
u \cdot u &= (2+3i)(\overline{2+3i}) + (4-i)(\overline{4-i}) + (2i)(\overline{2i}) \\
&= (2+3i)(2-3i) + (4-i)(4+i) + (2i)(-2i) \\
&= 13 + 17 + 4 = 34 \\
\|u\| &= \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{34}
\end{aligned}
$$

具有上面向量加法，純量乘法與點積之運算的空間 $\mathbf{C}^n$ 稱爲**複數歐氏 n 維空間**（complex Euclidean n-space）。

補註：若 $u \cdot v$ 被定義爲 $u \cdot v = z_1 w_1 + \cdots\cdots + z_n w_n$ ，則即使 $u \neq 0$ ，$u \cdot u = 0$ 仍是有可能的，例如，$u = (1, i, 0)$ 。事實上，$u \cdot u$ 有可能不爲實數。

習題與解答

$\mathbf{R}^n$ 中的向量

1.1 計算：(i) $(3, -4, 5) + (1, 1, -2)$; (ii) $(1, 2, -3) + (4, -5)$; (iii) $-3(4, -5, -6)$; (iv) $-(-6, 7, -8)$.

答 (a) 將對應的分量相加：$(3, -4, 5) + (1, 1, -2) = (3+1, -4+1, 5-2) = (4, -3, 3)$.

(b) 因爲此兩個向量含有不同數目的分量，所以此加法是無法定義的。

(c) 將每一分量乘上一純量：$-3(4, -5, -6) = (-12, 15, 18)$.

(d) 將每一分量乘上 -1 ：$-(-6, 7, -8) = (6, -7, 8)$.

1.2 設 $u = (2, -7, 1)$, $v = (-3, 0, 4)$, $w = (0, 5, -8)$ 求出 (i) $3u - 4v$, (ii) $2u + 3v - 5w$.

答 首先完成純量乘法的運算，然後再作向量加法。

(i) $3u - 4v = 3(2, -7, 1) - 4(-3, 0, 4) = (6, -21, 3) + (12, 0, -16) = (18, -21, -1$

(ii)
$$
\begin{aligned}
2u + 3v - 5w &= 2(2, -7, 1) + 3(-3, 0, 4) - 5(0, 5, -8) \\
&= (4, -14, 2) + (-9, 0, 12) + (0, -25, 40) \\
&= (4 - 9 + 0, -14 + 0 - 25, 2 + 12 + 40) = (-5, -39, 54)
\end{aligned}
$$

1.3 若 $(x, 3) = (2, x+y)$ ，試求出 x 與 y。

答 因爲此兩向量相等，因此其分量對應相等：

$$x = 2, \quad 3 = x + y$$

以$x=2$代入第二個方程式可得$y=1$，因此$x=2$，$y=1$。

1.4 若$(4,y)=x(2,3)$，試求出x與y。

圏 先作等式右邊的純量乘法，可得$(4,y)=x(2,3)=(2x,3x)$。

設定對應分量彼此相等：$4=2x$，$y=3x$。

求解x與y的線性方程式，可得：$x=2$，$y=6$。

1.5 若$(2,-3,4)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)$，試求出$x$，$y$與$z$。

圏 首先將純量x，y，z分別乘入，然後相加：

$$\begin{aligned}(2,-3,4) &= x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)\\ &= (x,x,x)+(y,y,0)+(z,0,0)\\ &= (x+y+z,x+y,x)\end{aligned}$$

設定對應分量彼此相等：

$$x+y+z=2,\quad x+y=-3,\quad x=4$$

求解此聯立方程組，將$x=4$代入第二個方程式可得$4+y=-3$或者$y=-7$。然後再將x與y之值代入第一個方程式，可得$z=5$。因此$x=4$，$y=-7$，$z=5$。

1.6 證明定理 1.1：對R^n中的任意向量u，v，w與R中的任意純量k，k'而言，

(i) $(u+v)+w=u+(v+w)$　　(v) $k(u+v)=ku+kv$

(ii) $u+0=u$　　(vi) $(k+k')u=ku+k'u$

(iii) $u+(-u)=0$　　(vii) $(kk')u=k(k'u)$

(iv) $u+v=v+u$　　(viii) $1u=u$

圏 設u_i，v_i，w_i分別是u，v，w的第i個分量。

(i) 依據定義，u_i+v_i是$u+v$的第i個分量，而$(u_i+v_i)+w_i$是$(u+v)+w$的第i個分量。另一方面，v_i+w_i是$v+w$的第i個分量，而且$u_i+(v_i+w_i)$是$u+(v+w)$的第i個分量。但是，u_i，v_i與w_i皆爲實數，因此結合律成立，亦即是

$$(u_i+v_i)+w_i=u_i+(v_i+w_i)\quad;\quad i=1,\ldots,n$$

因而，$(u+v)+w=u+(v+w)$，因爲他們的對應分量相等。

(ii) 因爲，$0=(0,0,\cdots\cdots,0)$；因此

$$\begin{aligned}u+0 &= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+(0,0,\ldots,0)\\ &= (u_1+0,u_2+0,\ldots,u_n+0)=(u_1,u_2,\ldots,u_n)=u\end{aligned}$$

(iii) 因爲$-u=-1(u_1,u_2,\ldots,u_n)=(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n)$所以

$$\begin{aligned}u+(-u) &= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n)\\ &= (u_1-u_1,u_2-u_2,\ldots,u_n-u_n)=(0,0,\ldots,0)=0\end{aligned}$$

(iv) 依據定義，u_i+v_i是$u+v$的第i個分量，而v_i+u_i是$v+u$的第i個分量。但是，u_i，v_i皆爲實數，因此交換律成立，亦即是，