

通信系统原理习题集

高等学校试用教材

北方交通大学 冯玉珉 主编

前 言

本习题集针对高等学校教材《通信系统原理》与教学中的基本概念、理论和基本分析方法与解题技巧,结合通信技术应用,收集了不同层次与各种类型的题目,其中包括各章例题、思考题、基本习题、增选习题,以及基本训练题目等,大约700个题目。旨在便于任课教师组织教学、备课与选配课外作业参考,同时更有助于学生全面理解与深入钻研教材内容,提高解题水平与运算技巧,并为以后分析与解决通信技术问题奠定了良好的基础。

为了达到上述要求,本书设计的基本构成特点为:

1. 各章以教材的章序排名,备有简短的教材内容提要,阐明各章教材的要点及主要运算公式,可为读者进行学习与回顾教材内容、理解有关题目,起到引路作用。
2. 各章备有适量例题,例题的选择着重于考虑一章的基本内容,并突出重点和分析问题的思路、解题技巧,同时也选择了少量难度较大和结合通信技术应用的题目。
3. 随后给出的一些思考性题目,旨在对一章内容基本掌握后,使读者从总体上及各部分关联上思考一些问题,以便加深理解所学内容,并引导读者联系一些实际应用来考虑问题。
4. 作为本书各章的主要部分是习题,其中,“基本习题”均按教材内容设置,是读者应完成的基本作业量;为了从各个侧面强调教材的基本点并抓住重点,又设有增选题目,可供读者选作。
5. 各章基本训练题目属于读者学完一章内容后的最低限自我检查题,体现要求掌握的最基本知识、分析方法,不追求全面反映一章内容,故不宜作为选用考试题目的依据。
6. 为了便于读者校对解答作业题的正确性,书后列出了各章习题及训练题的答案。对于一部分简单习题及需用图示回答的习题答案,这里一般从略。

本书由北方交通大学冯玉珉担任主编,并编写了大部分内容提要及选编了各章部分例题与习题,尚与该校张星合编第三、十、十一章;第一、四、八、十二章由兰州铁道学院杨秀芝编写;第二、五、九章由上海铁道学院张伯乾编写;第六、七两章由北方交通大学齐立心编写。张星同志校核了部分习题答案。

本书由张树京教授担任主审。

在本习题集的编写过程中,曾得到上海铁道学院、天津大学和北京邮电学院等院校的几位教授和有关教师的热情支持与帮助,值此,对他们表示衷心的感谢。

编 者

1991·5

目 录

第一章 绪 论	1
内容提要	1
习 题	2
第二章 信号分析与变换	4
内容提要	4
例 题	7
思考题	15
习 题	15
基本训练题	21
第三章 随机信号分析	24
内容提要	24
例 题	28
思考题	34
习 题	34
基本训练题	39
第四章 线性调制系统	41
内容提要	41
例 题	45
思考题	53
习 题	53
基本训练题	60
第五章 角度调制系统	61
内容提要	61
例 题	65
思考题	72
习 题	73
基本训练题	80
第六章 数字信号的基带调制	81
内容提要	81
例 题	83
思考题	90
习 题	90
基本训练题	94

第七章 数字信号的基带传输	96
内容提要	96
例 题	99
思考题	106
习 题	107
基本训练题	110
第八章 数字信号的频带调制	111
内容提要	111
例 题	115
思考题	128
习 题	126
基本训练题	134
第九章 信道复用原理	135
内容提要	135
例 题	138
思考题	141
习 题	142
基本训练题	145
第十章 差错控制编码	147
内容提要	147
例 题	150
思考题	158
习 题	158
基本训练题	166
第十一章 最佳接收原理	168
内容提要	168
例 题	171
思考题	179
习 题	179
基本训练题	182
第十二章 信息论的基本知识	183
内容提要	183
例 题	186
思考题	191
习 题	192
基本训练题	195
习题及基本训练题答案	196

第一章 绪 论

内 容 提 要

一、关于《通信系统原理》课程

随着信息科学和信息技术的发展，特别是计算机与通信相结合，数字化通信与数据通信发展方兴未艾。作为通信学科的基本理论基础——《通信系统原理》，在高校专业课程系列中具有更重要的地位与作用。本课教材的着重点不是以具体通信系统的电路结构与设计为研究目标，而是针对各种类型通信系统的特殊性，以调制或编码技术为核心，从基本原理上，着重介绍传输信号的形成和接收方式，进行理论分析与性能评价，并把模拟系统的噪声性能分析和数字传输系统的误码（符号）性能分析作为可靠性分析的重点。其次是讨论提高通信有效性问题，重点是各种复用传输方式。

通信的可靠与有效性问题是一个广义概念。现代通信的发展，特别是数字通信技术和计算机数据通信技术的发展以及传输媒质的现代化，大大提高了可靠性与有效通信的全面质量指标，但是这一切的基本原理及基本分析方法，却主要是靠通信系统原理来奠定的。

二、《通信系统原理》教材构成特点

《通信系统原理》教材的内容结构大致分为三大部分：

1. 数学理论基础

确知信号与随机信号（和噪声）的数学分析，是进行通信系统与信号分析的基本数学工具。

设计一个通信系统，包括信号方式、变换、处理方法，抑制传输噪声和干扰，以及信号的接收、分路与提取（检测或解调），最后对系统性能评价，都是以系统、信号和噪声的数学分析、计算作为理论基础的，并且以傅里叶理论奠定的时-频域变换分析贯穿于全书。

2. 调制与解调

模拟与数字通信的调制与解调技术及其性能分析，是教材的主体与核心。教材首先讲解模拟调制方式，在介绍传统通信方式的过程中，向读者讲授通信的基础知识；随着通信的发展，数字信号的基带调制（即编码）、频带调制以及数字信号在两种频段中的传输等理论，在通信系统原理中逐渐占据了显著的地位。

3. 最佳接收及信息论的基本知识

在讨论了调制与解调为核心的通信系统知识后，设置“最佳接收”与“信息论基本知识”这两章内容。

通信系统最佳化是现代通信系统发展的一个主攻方向，它主要包括三方面的内容：一是信源最佳编码，利用压缩或紧致编码技术，以提高源码的有效性；二是为解决传输问题，抑

制噪声与干扰的抗干扰编码,实行差错控制,以提高可靠性。目前正在研究信源与信道组合编码技术,其基本思想是将信源的冗余度通过某种算法处理,直接转为差错控制码的保护位;三是致力于最佳信号波形设计,利用超正交信号矢量,在接收端采用最佳接收,即利用适当的最佳准则,针对接收信号与噪声干扰的特点采取最佳接收方式,包括二元信号的检测,多值信号的估值和连续波形的最佳过滤,以使判决的误差率达到最小。一般在通信原理中只介绍信号检测部分,并主要着重于高斯信道。

信息论是通信的基本理论与方向,在了解了通信系统基本原理之后,再学习一些信息论基本知识,对信息、信息传输及质量分析将会有有一个系统而深入的理解,从而明确提高通信质量的方向和目标。

另外,信道及其统计特征以及信道的复用原理,也是通信系统课程应包括的内容,前者的研究是为分析通信可靠性,后者则为提高有效性。由于信道与干扰特别是无线信道的统计特性较为复杂,一般另设课程或由专著进行讨论。

三、关于频率资源的开发

1. 通信使用的频段

由于通信的发展,至今各种通信类型枚不胜数,应用的领域也极其广泛。实现通信的手段是首先产生一定频率的电信号(电磁波)或光信号(光波)形式,并称为载波,它的某种或某些参量反映需传输信息的变化规律,称为已调(载)波,然后通过发信设备在适当电平发往信道。信道即传输媒质,是提供一定特性具有适当带宽的物理实体,这种媒质大体分两大类,即有界媒质(有线信道)和无界媒质(无线信道)。

对通信频段的选择或分配主要考虑是要确保特定信息传输所需的信道允许速度、容量和保真度等,归结起来就是所选择或分配的信道频段必须与载荷信息的信号形式相匹配。

2. 频率资源的开发与利用

通信的发展史,就是频率资源由低到高的开发与利用的历史,目前已达到毫米波以下,即上百个GHz($1\text{GHz}=1000\text{MHz}$)以上的频段。解决这种特高频波段实际通信技术的问题主要有两个因素:一是能提供这种频段的稳定工作的振荡器件及进行信号变换与发送的相应通信设备;二是能提供适用于这种特高频信号传输性能的信道媒质,微波中继和光纤,特别是光纤链路在理论上可以满足直至上百THz($1\text{THz}=1000\text{GHz}$)的通信频段。但目前实际应用光纤传输的信号频率仅为 $1\sim 2\text{GHz}$,随着微电子业及通信设备以及信道媒质制造工艺的飞速发展,频率资源开发将加快步伐。

习 题

1-1 试指出下列频率各处于什么频段(名称),可能用于何种通信?

- (1) 50Hz ; (2) 15kHz ; (3) 820kHz ;
(4) 100MHz ; (5) 470MHz ; (6) 600MHz 。

1-2 若规定 $535\text{kHz}\sim 1605\text{kHz}$ 频段为民用调幅广播电台专用,每个电台需占用 10kHz 有效带宽,试问同时有多少个广播节目可供各地听众选听?在一个地区的听众能否任意选听到所有广播节目?为什么?

1—3 在你的调频收音机或录音机上标有频率范围为88~108MHz, 若每个电台占用180kHz带宽, 试问听众最多能同时收到多少个节目? 从一般概念上来考虑, 为什么在适当距离内它比调幅台有更好的收听质量。

1—4 若规定54~72、76~88、174~216MHz频段(VHF)以及470~806MHz频段(UHF)为电视广播专用, 每台需占6MHz有效带宽, 试问每个频段内最多能容纳多少电视节目? 以上所有频段共有多少节目?

1—5 若用100kHz频率发送导航信号, 收发相距80km, 试问收到的信号与发端信号相比较相位延迟是多少(以“模 2π ”计算)。

1—6 讨论电子通信中的信息、消息及信号的含义和相互联系。

1—7 试举出两种你最熟悉的通信系统, 并按通信系统的构成框图来说明它们的构成情况、各部分功能。

1—8 试举一、二个你所接触到的最新通信系统, 并介绍其基本特点及应用。

1—9 试述通信系统使用的频段是根据什么来划分的。

1—10 试述计算机与通信结合, 对于通信及通信系统、通信网的发展的重大意义和通信发展前景。

第二章 信号分析与变换

本章是作为通信系统分析的数学工具,从确知信号的角度讨论信号和噪声的分析方法。信号可由(时域)数学表达式傅氏级数一类的正交展开式及傅氏频谱来表示。本章基本内容是复习先行课有关内容,并着重掌握信号的时、频域表示法,以及卷积、相关和功率谱、能量谱分析,同时介绍了另一种正交变换——希氏变换及其频域分析方法。

内 容 提 要

一、常用的信号函数

1. 冲激函数 $\delta(t)$

$$\text{定义: } \delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases} \quad (2-1)$$

及
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1$$

取样特性:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (2-3)$$

冲激序列:
$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (2-4)$$

频 谱: 傅氏变换对为

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (2-5)$$

及
$$A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \longleftrightarrow \omega_0 A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (2-6)$$

式中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ —— 周期为 T 的冲激序列对应的角频。

2. 矩形函数

数字通信所用的方波及其傅氏频谱为

$$A \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) \longleftrightarrow A\tau \text{Sa}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega t_0} \quad (2-7)$$

式中 $A \text{rect}(\cdot)$ —— 幅度为 A 的方波;

τ —— 方波脉冲宽度;

$\text{Sa}(\cdot)$ —— 取样函数, $\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$ 。

3. 其它常用信号及其频谱函数见教材中表 2-1 及表 2-2。

二、卷积与相关

1. 卷 积

定义: $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$ (2-8)

时域卷积及其频谱为:

$$f_1(t) * f_2(t) \quad F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (2-9)$$

频域卷积及其时域表达式为:

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \quad \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (2-10)$$

任意函数与冲激卷积:

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

任意函数之间求卷积, 要分为三段卷积运算, 教材已有具体例题, 这里不再列出这部分内容。

2. 相 关

定义: 函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的两种互相关为:

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t+\tau) d\tau = R_{21}(-t) \quad (2-11)$$

及

$$R_{21}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t+\tau) d\tau = R_{12}(-t) \quad (2-12)$$

函数 $f(t)$ 的自相关为:

$$R_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) R_f(t+\tau) d\tau \quad (2-13)$$

相关与卷积关系:

$$R_{12}(t) = f_1(-t) * f_2(t) \quad (2-14)$$

$$R_{21}(t) = f_2(-t) * f_1(t) \quad (2-15)$$

$$R_f(t) = f(-t) * f(t)$$

若 $f_1(t)$ [或 $f_2(t)$] 为偶函数, 则

$$R_{12}(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad [\text{或} \quad R_{21}(t) = f_1(t) * f_2(t)]$$

若二函数均为偶函数, 则

$$R_{12}(t) = R_{21}(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

三、信号的功率谱和能量谱密度

1. 信号 $f(t)$ 的自相关的傅氏变换为功率谱或能量谱

即 $R_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t+\tau) d\tau \quad E_f(\omega) \quad (f(t) \text{ 为能量信号}) \quad (2-16)$

或 $R_f(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) f(t+\tau) d\tau \quad S_f(\omega) \quad (f(t) \text{ 为功率信号}) \quad (2-17)$

式中 $R_f(t)$ 、 $E_f(\omega)$ ——分别为能量信号 $f(t)$ 的自相关函数与能量谱;

$S_f(\omega)$ ——是当 $f(t)$ 为功率信号时的功率谱。

2. 一定形状的周期性波形序列的功率谱

如果 $g(t)$ 为一定形状, 周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, 则其自相关与功率谱构成的傅氏变换对为

$$R_g(t) = |C_n|^2 e^{j n \omega_0 t} \quad 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \quad (2-18)$$

式中 $|C_n|^2 = C_n \cdot C_n^*$.

3. 非周期信号即能量信号自相关与其能量谱

$$R_f(t) \quad E_f(\omega) = |F(\omega)|^2 \quad (2-19)$$

式中 $|F(\omega)|^2 = F(\omega) \cdot F^*(\omega)$ ——信号频谱 $F(\omega)$ 的模值平方。

4. 信号的功率或能量——帕氏定理

帕氏定理: 信号 $f(t)$ 的功率或能量可以直接在时域求出, 也可以利用其频域(功率谱或能量谱)或用相关函数来求得, 其表达式为

$$E_f = R_f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (2-20)$$

或 $P_f = R_f(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (2-21)$$

四、希氏 (Hilbert) 变换

1. 希氏变换

定义: 希氏变换是在同一域内进行的一种正交变换。希氏变换网的特性为

$$\text{冲激响应: } h_h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (2-22)$$

$$\text{传递函数: } H_h(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} j & \omega < 0 \\ -j & \omega \geq 0 \end{cases} \quad (2-23)$$

则有傅氏变换对

$$\frac{1}{\pi t} \rightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

希氏变换运算: 信号 $f(t)$ 的希氏变换 $\hat{f}(t)$ 表达式为

$$H\{f(t)\} = \hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (2-24)$$

$$\text{且} \quad \hat{\hat{f}}(t) = \hat{f}(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau = -f(t)$$

式中 $\hat{\hat{f}}(t) = H[H\{f(t)\}]$ ——信号 $f(t)$ 希氏变换 $\hat{f}(t)$ 的希氏变换。

2. 希氏变换 $\hat{f}(t)$ 的频谱特性

$f(t)$ 的希氏变换 $\hat{f}(t)$ 的频谱为 $\hat{F}(\omega)$, 且为

$$H[f(t)] = \hat{f}(t) \rightarrow \hat{F}(\omega) = [-j \operatorname{sgn}(\omega)] F(\omega) \quad (2-25)$$

式中 $H[\cdot]$ ——为希氏变换算子。

因此看出, 信号 $f(t)$ 的希氏频谱 $\hat{F}(\omega)$ 是其本身频谱 $F(\omega)$ 的负频域正向扭转 $\frac{\pi}{2}$ 相位, 而正频域负向扭转 $\frac{\pi}{2}$ 相位。

五、信号通过线性系统

1. 系统响应及其频谱

信号 $f(t)$ 通过冲激响应为 $h(t)$, 传递函数为 $H(\omega)$ 的线性非时变系统的响应 $y(t)$ 为:

$$y(t) = f(t) * h(t) \quad (2-26)$$

其响应频谱为: $G(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega) \quad (2-27)$

2. 响应相关函数与功率谱 (能量谱)

若输入激励信号 $f(t)$ 自相关函数为 $R_f(t)$, 功率谱为 $S_f(\omega)$, 则通过系统的响应自相关 $R_g(t)$ 及功率谱 $S_g(\omega)$ 为

$$R_g(t) = R_f(t) * R_h(t) \quad (2-28)$$

$$S_g(\omega) = S_f(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \quad (2-29)$$

式中 $R_h(t) = h(t) * h(-t)$ ——系统冲激 (响应) 自相关,

$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega)$ ——系统的功率传递函数。

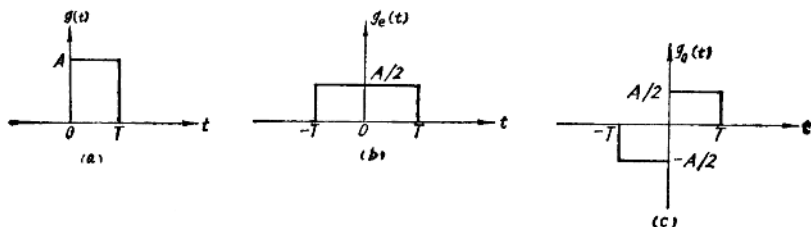
例 题

【例 2-1】写出矩形脉冲 $g(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$ 的偶部与奇部, 并求此脉冲的偶部及奇部的傅氏变换是什么?

【解】矩形脉冲 $g(t)$ 可以分解为如例图 2-1 所示的偶部 $g_e(t)$ 与奇部 $g_o(t)$ 组成, 它的偶部 $g_e(t)$ 可以写成 $g_e(t) = \frac{1}{2}[g(t) + g(-t)]$

由 $g(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$ 可得

$$g_e(t) = \frac{A}{2} \left[\text{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) \right]$$



例图 2-1 例 2-1 图

$g(t)$ 的奇部 $g_o(t)$ 定义为

$$g_o(t) = \frac{1}{2}[g(t) - g(-t)] = \frac{A}{2} \left[\text{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) - \text{rect}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) \right]$$

偶部的傅氏变换为 $G_e(\omega) = AT \text{Sa}(\omega T)$

奇部的傅氏变换为 $G_o(\omega)$ 为:

$$\begin{aligned} G_o(\omega) &= \frac{AT}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega \frac{T}{2}} - \frac{AT}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{j\omega \frac{T}{2}} \\ &= -\frac{AT}{j} \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

【例 2—2】利用傅氏变换的性质, 求下列傅氏变换

(1) $(t-6)f(t-3)$; (2) $(t-2)f(t)e^{j\omega_0(t-3)}$;

(3) $\int_{-\infty}^{t+6} f(t')dt'$; (4) $3f(t) + 6\frac{df(t)}{dt} + 2f(t-1)$ 。

【解】 (1) $(t-6)f(t-3) = tf(t-3) - 6f(t-3)$

$$\therefore f(t) \longleftrightarrow F(\omega), F[-jtf(t)] = \frac{dF(\omega)}{d\omega}, \quad tf(t) \longleftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}, \quad tf(t-3) \longleftrightarrow j\frac{dF(\omega)e^{-j3\omega}}{d\omega}; \quad 6f(t-3) \longleftrightarrow 6F(\omega)e^{-j3\omega}.$$

$$\therefore F[(t-6)f(t-3)] = j\frac{dF(\omega)e^{-j3\omega}}{d\omega} - 6F(\omega)e^{-j3\omega}$$

(2) $(t-2)f(t)e^{j\omega_0(t-3)} = tf(t)e^{j\omega_0(t-3)} - 2f(t)e^{j\omega_0(t-3)}$

$$\therefore f(t) \longleftrightarrow F(\omega), \quad tf(t) \longleftrightarrow (t)j\frac{dF(\omega)}{d\omega}, \quad tf(t)e^{j\omega_0(t-3)} \longleftrightarrow e^{-j3\omega_0} \cdot j\frac{dF(\omega-\omega_0)}{d\omega},$$

$$2f(t)e^{j\omega_0(t-3)} \longleftrightarrow 2e^{-j3\omega_0}F(\omega-\omega_0).$$

$\therefore$ 该傅氏变换对为

$$(t-2)f(t)e^{j\omega_0(t-3)} \longleftrightarrow e^{-j3\omega_0} \left[j\frac{dF(\omega-\omega_0)}{d\omega} - 2F(\omega-\omega_0) \right]$$

(3) $\int_{-\infty}^{t+6} f(t')dt'$

$$\therefore \int_{-\infty}^{t+6} f(t')dt' = \varphi(t+6) \quad \text{这里假定 } f(-\infty) = 0.$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{t+6} f(t')dt' \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega)e^{j6\omega}$$

(4) $3f(t) + 6\frac{df(t)}{dt} + 2f(t-1)$

$$\therefore f(t) \longleftrightarrow F(\omega), \quad \frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega), \quad f(t-1) \longleftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega}.$$

$$\therefore 3f(t) + 6\frac{df(t)}{dt} + 2f(t-1) \longleftrightarrow 3F(\omega) + j6\omega F(\omega) + 2F(\omega)e^{-j\omega}$$

【例 2—3】求下列函数的傅氏变换

(1) $f(t) = ke^{-\alpha(t-t_0)} \sin \omega_0 t u(t)$; (2) $f(t) = ke^{-(\frac{t}{t_0})^2}$;

(3) $f(t) = k\frac{t}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} u(t)$; (4) $f(t) = ke^{-\alpha(t+t_0)} \sin \omega_0 t u(t)$ 。

【解】 (1) $f(t) = ke^{-\alpha(t-t_0)} \sin \omega_0 t u(t) = ke^{\alpha t_0} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t u(t)$

$$\therefore F[f(t)] = ke^{\alpha t_0} \frac{\omega_0}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

(2) $f(t) = ke^{-(\frac{t}{t_0})^2} = ke^{-\frac{t^2}{t_0^2}}$

$$\text{设 } t_0^2 = 2\sigma^2 \quad \sigma = \frac{t_0}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore F[k e^{-\frac{t^2}{t_0^2}}] &= F[k e^{-t^2/2\sigma^2}] = k \sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2 \omega^2/2} \\ &= k \frac{t_0}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{t_0^2}{2} \omega^2/2} = k t_0 \sqrt{\pi} e^{-\frac{(t_0 \omega)^2}{2}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad f(t) = k \frac{t}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} u(t) = \frac{k}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} t u(t)$$

$$\therefore F[f(t)] = \frac{k}{t_0} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{t_0} + j\omega\right)^2} = \frac{k t_0}{(1 + j t_0 \omega)^2}$$

$$(4) \quad f(t) = k e^{-\alpha(t+t_0)} \sin \omega_0 t u(t) = k e^{-\alpha t_0} \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t u(t)$$

$$\therefore F[f(t)] = k e^{-\alpha t_0} \frac{\omega_0}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

【例 2—4】已知下列定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

其中 $f(t_0)$ 是 $t = t_0$ 处的任意函数，试证明，单位脉冲函数 $\delta(t)$ 必是偶函数。

$$\text{【解】由定义 } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

当 $t_0 = 0$ 时 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$ ，设 $f(t)$ 为实单边函数，可分成偶、奇两个部分，即

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

代入上式，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \delta(t) dt = f_e(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_o(t) \delta(t) dt = f_o(0)$$

因为奇函数 $f_o(t)$ 具有 $f_o(0) = 0$ 的特性，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_o(t) \delta(t) dt = f_o(0) = 0$$

由上可知， $f_o(0) \cdot \delta(t)$ 一定是 t 的奇函数。由于 $f_o(t)$ 已被定义为奇函数，所以 $\delta(t)$ 一定是 t 的偶函数，否则 $f_e(t) \cdot \delta(t)$ 就不为奇函数。

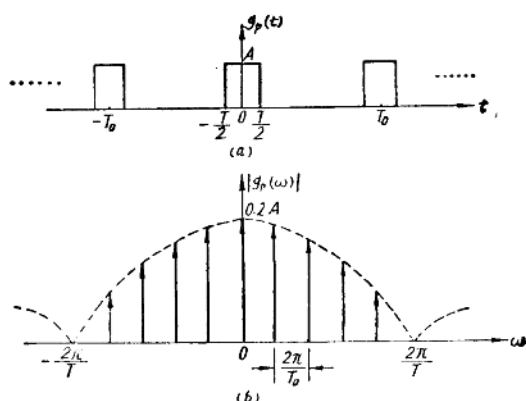
【例 2—5】幅度为 A 、周期为 T_0 、宽为 T 的脉冲序列 $g_p(t)$ ，如例图 2—2 (a) 所示，试确定

(1) $g_p(t)$ 总平均功率；

(2) 在 $-\frac{2\pi}{T}$ 到 $\frac{2\pi}{T}$ 范围内的 $g_p(t)$ 的各谐波所持功率占总功率的百分比（设占空系数 $\frac{T}{T_0} = 0.2$ ）。

【解】(1) $g_p(t)$ 的平均功率为

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = \frac{A^2 T}{T_0} = 0.2 A^2$$



例图 2-2 例 2-5 图

(2) 周期信号 $g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= -\frac{A}{T_0 j n \omega_0} [e^{-jn\omega_0 t}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{n\pi} \sin n\omega_0 \frac{T}{2}$$

$$= \frac{AT}{T_0} \cdot \text{Sa} n\pi \frac{T}{T_0} = 0.2A \text{Sa}(0.2n\pi)$$

$$g_p(\omega) = F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}\right] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$g_p(\omega)$ 的包络由 C_n 决定, 当 $n\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 时, $C_n = 0$, 可求出 $n = \frac{T_0}{T} = 5$, 当 $n\omega_0 = -\frac{2\pi}{T}$ 时, 得 $n = -5$, 故在 $-\frac{2\pi}{T}$ 到 $\frac{2\pi}{T}$ 范围内, $-5 \leq n \leq 5$, 有 9 个冲激函数, 见频谱图例图 2-2 (b)。各次谐波所持功率可求得

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{n=-5}^5 |C_n|^2 = 0.04A^2 \sum_{n=-5}^5 \text{Sa}^2(0.2\pi n) \\ &= 0.04A^2 [1 + 2\text{Sa}^2(0.2\pi) + 2\text{Sa}^2(0.4\pi) + 2\text{Sa}^2(0.6\pi) \\ &\quad + 2\text{Sa}^2(0.8\pi)] \\ &= 0.04A^2 [1 + 1.75038 + 1.14557 + 0.50914 + 0.1094] \\ &= 0.1805A^2 \end{aligned}$$

所持功率占总功率的百分比为 90.28%。

【例 2-6】已知信号 $s(t) = 10 \sin 500t$, 分别用时域、频域方法计算 $s(t)$ 的平均功率。

【解】时域:

$$P_s = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 10^2 \sin^2 500t dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 100 \times \frac{1}{2} dt = 50 \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = 50$$

频 域:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{10}{2j} [e^{j500t} - e^{-j500t}]$$

$$s(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_1)$$

由 $s(t)$ 式可见, $n=+1$ 时, $C_n = \frac{10}{2j} = -5j$,

$$n=-1 \text{ 时, } C_n = -\frac{10}{2j} = 5j。$$

$$\therefore s(\omega) = 2\pi \times 25 \delta(\omega - \omega_1) + 2\pi \times 25 \delta(\omega + \omega_1) \\ = 50\pi \delta(\omega - \omega_1) + 50\pi \delta(\omega + \omega_1)$$

$$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) d\omega \\ = \frac{1}{2\pi} \times 50\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_1) d\omega + \frac{1}{2\pi} \times 50\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_1) d\omega \\ = 25 + 25 = 50$$

时域和频域分析所得结果一致, 证明了帕氏定理的正确性。除了上述二种方法外, 还可以用求自相关函数的方法得平均功率, 即 $R_s(0) = P_s$ 。

$$R_s(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(\tau) \cdot s(t+\tau) d\tau \\ = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 10 \sin 500\tau \times 10 \sin 500(t+\tau) d\tau \\ = \frac{100}{2} \cdot \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 500t d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(1000\tau + 500t) d\tau \right] \\ = 50 \times \cos 500t \times \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau + 0 \\ = 50 \cos 500t$$

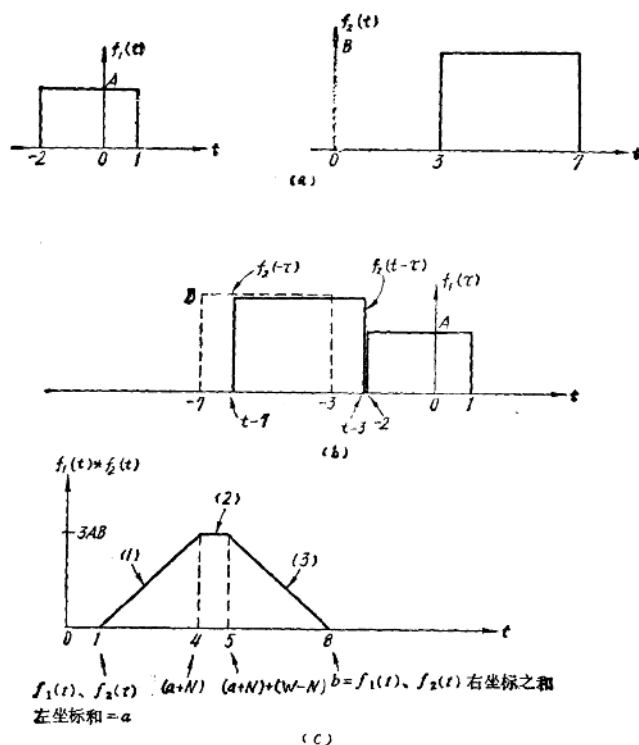
当 $t=0$ 时, 则 $s(t)$ 的归一化功率 (负载电阻 $R=1\Omega$) 为

$$P_s = R_s(0) = 50W$$

【例 2-7】利用图解-解析法求例图 2-3 (a) 所示的波形 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积。

【解】可按以下步骤进行。

首先进行准备工作: 任意选定两者之一为固定波形 (这里选 $f_1(t)$ 为固定图形), 另一个作为“折迭-位移”波形。此间将 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 中的 t 用 τ 置换, 并将折迭后的 $f_2(-\tau)$ 赋予参变量 t , 得 $f_2(t-\tau)$, 以便卷积后仍是时间 t 的函数。[图(b)]由于有了 t 参量, 就可将 $f_2(t-\tau)$ 放在 $f_1(\tau)$ 左方, 首尾正好相接, 这样就产生了卷积式中的被积函数 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ 。然后开始分段卷积。若二者底宽 $N \neq W$ (N ——窄波形宽度; W ——宽波形宽度) 分三段卷积; 若 $N=W$, 则为两段。本题为三段:

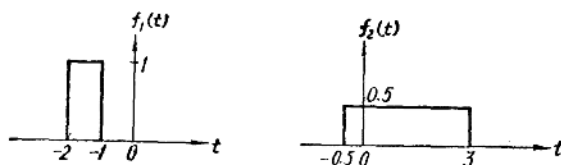


例图 2-8 例 2-7 图

- 上限—— $f_2(t-\tau)$ 最右点坐标
- (1)
$$\int_{-2}^{t-1} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-2}^{t-1} AB d\tau = AB(t-1)$$
- 下限—— $f_1(\tau)$ 左坐标
- $a=1 \leq t \leq a+N=4$ (a —— $f_1(t), f_2(t)$ 最左坐标之和)
- 上限——窄波形 $f_1(\tau)$ 右坐标
- (2)
$$\int_{-2}^1 f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-2}^1 AB d\tau = 3AB$$
- 下限—— $f_1(\tau)$ 左坐标
- $(N=3)$
- $4 \leq t \leq 4+(W-N)=5$
- 上限——固定波形 $f_1(\tau)$ 右坐标
- (3)
$$\int_{t-7}^1 f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{t-7}^1 AB d\tau = AB(8-t)$$
- 下限——折迭位移波形 $f_2(t-\tau)$ 左坐标
- $5 \leq t \leq 5+N=8$

以上三段积分结果图形见图 (c)，从结果看，(1)卷积后的波形左边坐标值 a 等于两波形最左坐标之和，(2) 右边坐标值等于二者右坐标之和，(3) 底宽， $(c-a)$ 等于二者底宽之和，即 $(c-a)=N+W$ 。

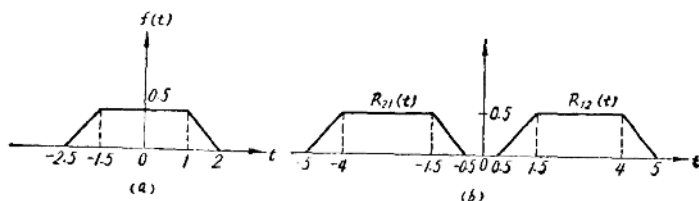
【例 2-8】用图解法直接给出例图 2-4 所示的两个图形的卷积和互相关图形，并标明各坐标值。



例图 2-4 例 2-8 图

【解】 (1) 先求卷积, $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 按上例步骤可直观地得到, 如例图 2-5 (a) 所示。

(2) 相关: $R_{12}(t) = f_1(-t) * f_2(t)$, 为此只要先将 $f_1(t)$ 折迭, 然后与 $f_2(t)$ 卷积即可 [图 2-5 (b)]。



例图 2-5 例 2-8 图

由 $R_{21}(t) = R_{12}(-t)$, 将图 (b) 中的 $R_{12}(t)$ 折迭后即可得 $R_{21}(t)$ 。

【例 2-9】求单个脉冲信号 $f(t)$ 的能量谱密度和能量。

$$(1) \quad f(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right); \quad (2) \quad f(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{\tau}\right)$$

【解】 (1) $f(t) = A \operatorname{rect}(t/\tau)$

$$F(\omega) = F[f(t)] = A\tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

能量谱密度 $E_f(\omega) = |F(\omega)|^2$

$$\therefore E_f(\omega) = A^2\tau^2 \operatorname{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

能量 $E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$

$$f(t) = \begin{cases} A & \left(-\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$E_f = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A^2 dt = A^2 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = A^2\tau$$

$$(2) \quad f(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{\tau}\right) = \begin{cases} A & \left(T - \frac{\tau}{2} \leq t \leq T + \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$F(\omega) = F[f(t)] = A\tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega T}$$

$$E_f(\omega) = |F(\omega)|^2 = A^2\tau^2 \operatorname{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$