複变函数的几何理论

Г. М. 戈魯辛

科學出版社

複變函數的幾何理論

Г. М. Голузин 著
陳　建　功　譯

科　學　出　版　社
1 9 5 6

Г. М. ГОЛУЗИН

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Гостехиздат, 1952

複變函數的幾何理論

戈魯辛 原著　陳建功 翻譯

*

科學出版社出版　(北京朝陽門大街 117 號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

上海中科藝文聯合印刷廠印刷　新華書店總經售

*

書號：0611　字數：440,000

開本：850×1168 1/32　印張：16 5/8　插頁：3

1956 年 11 月第一版　1956 年 11 月第一次印刷

(滬) 0001－6985　定價：(11) 3.80 元

內 容 介 紹

幾何函數論的產生是在二十世紀之初，由德 (Koebe 等)、英 (Littlewood 等)、美 (Gronwall 等)、蘇 (Леьи) 等開其端，到了 1923 年樓五納 (Löwner) 把它推進了一大步，但是把這個學問發揚光大而且把它和實用數學聯繫起來的，應該推到本書著者戈魯辛。著者於 1952 年逝世，1952 年以前著者把有關這方面的研究結果，巨細無遺，扼要地系統地納入本書之中，給此論的探討者以莫大的便利。

譯 者 序

1949 年起，譯者開設“單葉函數論”的講義於浙江大學，當時沒有一定的書可以作爲準繩，僅僅乎將自己研鑽過的關於這方面的論文，攝其要領編成系統，當做講稿；參考的文件，除了有關這方面的專著論文而外，沒有寫成有系統的一本書籍． 解放未久，知俄文者不多，而這方面重要論文，大都是俄文。

本書著者戈魯辛乃是這方面傑出的專家，不幸右耳患癌，1951 年冬，囑其門人朝鮮李君，求中國醫藥治療，未果．1952 年，李君將其遺著“複變函數的幾何理論”贈建功；乃知戈魯辛於 1952 年 1 月 17日逝世． 建功譯其書爲中文，以供國人治斯學者的參考，並且紀念戈魯辛先生．

由於幾何函數論的重要性，國人之治斯學者，年復一年的增加，成果也年復一年的增加——不久的將來，建功有專著報告其中詳細狀況——那麽，這本書不僅對於科學院人員和高等教師們有用處，亦將普及於高等學校的學生之間。

1955 年 2 月 12 日

陳建功於上海

蓋那其 米哈伊羅維奇
戈魯辛

本書的著者斯大林獎金的榮膺者，蓋那其·米哈伊羅維奇·戈魯辛教授，歿於 1952 年 1 月 17 日，經過了長期間的重病，一直延到本書就要出版的時候去世．

戈魯辛於 1906 年在托爾盧格城誕生．於 1923 年，他進入國立列寧格勒大學數學系，從這時候開始，終其一生，未嘗與該大學脫離聯系． 1929 年初，他作了畢業論文，發表在“數學匯刊”上．大學畢業後，戈魯辛的教書生涯就開始了． 1936 年他光輝地完成了博士論文，1938 年，被任命爲教授．戈魯辛於 1939 年就職國立列寧格勒大學的複變函數論主任．

由於戈魯辛的卓越的科學貢獻，他得到列寧格勒大學 1946 年一等獎和 1947 年的斯大林獎．

戈魯辛和他的學生們的研究工作創設了複變函數論偉大的學派，戈魯辛研究工作的大部分和複變數的各種解析函數族之極值問題和估計問題有關．在這方面，他達到非常深刻的結果，這些結果成爲本書的基礎．例如，在他的早期工作中，獲得了對於 $|\arg f'(z)|$ 的準確估計，此地 $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ 是圓 $|z| < 1$ 中的單葉正則函數(見本書第四章)．

戈魯辛的最後十年生涯是他在科學方面最有收穫的十年．在此期間，他的研究工作中，關於上述函數的係數 a_n 之估計，獲得了極重要的結果，他第一次地詳細地研究如下的函數族，族中函數 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中是正則，且當 $0 < r < 1$ 時，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant 1;$$

此外,他把變分法演成非常一般的形式,藉助於此法,可給出一系列重要極値問題的解.這些結果將在本書第三章和第四章中敍述.

臨終前不久,病勢已極其沉重,蓋那其·米哈伊羅維奇發表了一篇論文[1),在那論文中包含着對於下述事實的充要條件:將一定的複數數列 $a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 使它成爲 $|z|<1$ 中某一正則函數 $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ 的麥克羅林係數.

在上述諸問題的範圍中,戈魯辛工作的多方面的而且豐富的內容,甚至約略條舉它的結果,也需要佔很多的篇幅.讀者在念完本書以後可以對戈魯辛工作得到一個完整的概念.

戈魯辛對於複變函數論的其他方面,也有許多的研究工作,在數理物理學方面也有貢獻.例如將多連區域共形映照於標準類型的區域上的研究;在以圓周或是球面爲境界的區域中,對於拉普拉斯方程的迪力克賴問題之解決,有關這方面的工作,都值得提及的.

戈魯辛除了緊張的科學研究工作而外,他對於國立列寧格勒大學的複變函數論的教學,盡了最大的努力和熱誠.在許多年代中,他擔任了基礎課程,並擔任了許多專門課程,又年復一年地領導着複變函數論的習米納爾.這本書就是他的教學活動的總結.

戈魯辛毫無保留地將自己的一生貢獻給科學和對青年學生的教育.

一個非常質樸的人物,他給我們留下了深刻的印象:傑出的學者、祖國的愛護者和令人神往的人物.

院士 В. И. 斯米爾諾夫

1) Г. М. 戈魯辛(Голузин),"單葉函數的係數問題", *ДАН*, 81(1951), 721—724.

序　　言

本書的基礎是"幾何函數論"課程的講義，一部分是"複變函數論的補充"課程的講義，這些講義都是著者在以 A. A. 日丹諾夫命名的國立列寧格勒大學中實施過的．其中討論到：單連區域及多連區域的單葉共形映照論，將多連區域共形映照於圓上，應用共形映照研究解析函數的域內性質和境界性質，以及有關解析函數之幾何特徵的一般問題．

幾何函數論的種種一般性問題而外，我們也同時考慮現代研究資料所供應的許多特殊問題，話雖如此，本書並不要求將所有有關幾何函數論的問題都提供出來，也不要求把提出來的種種問題說得同等程度的完備．若不然，就會超出著者的能力．因此，自然地，幾何函數論中有些問題不會接觸到，還有些問題，雖說尚在未臻完備的狀態，但是在這些問題中，著者時常提示適當的文獻．

本書配合於如下的讀者，他們已經具有大學課程中複變函數論的基礎，或是具有下列諸書之一的主要部分的知識：И. И. 普利伐羅夫，"複變函數論引論"①，B. И. 斯米爾諾夫，"高等數學教程"第三卷① 和 A. И. 馬爾古謝維奇，"解析函數論"②．

Г. М. 戈魯辛

① 這兩部書已有中文譯本——譯者註．

② 此書已有人譯成中文，尚未出版——譯者註．

目　　錄

譯者序 ……………………………………………… v
B. И. 斯米爾諾夫院士寫的本書著者 Г. М. 戈魯辛小傳……… vi
序　言 ……………………………………………… viii
幾何知識的引說……………………………………… 1
第一章　解析函數列和調和函數列的收斂……………… 6
§1. 解析函數列的收斂 ………………………………… 6
§2. 凝聚原理…………………………………………… 10
§3. 調和函數列的收斂 ………………………………… 15
第二章　單連區域的共形映照原理……………………… 19
§1. 單葉的共形映照 …………………………………… 19
§2. 黎曼的定理 ………………………………………… 21
§3. 境界的對應在共形映照 …………………………… 27
§4. 偏差定理…………………………………………… 43
§5. 對於區域敍列的共形映照收斂定理 ……………… 51
§6. 模函數與自守函數 ………………………………… 59
§7. 解析函數的就範族。補充………………………… 65
§8. 以多項式迫近解析函數 …………………………… 76
第三章　單連區域共形映照的實現……………………… 81
§1. 從直交多項式作成映照函數 ……………………… 81
§2. 直線多角形區域和圓弧多角形區域的共形映照…… 87
§3. 單葉函數的參數表示 ……………………………… 103
§4. 單葉函數的變分 …………………………………… 115
第四章　單葉函數族中的極值問題和估計……………… 128
§1. 迴轉定理…………………………………………… 128
§2. 加強的偏差定理 …………………………………… 137
§3. 偏差定理的極值形式和優越區域的形式 ………… 146
§4. 星形限界和凸形限界 ……………………………… 163
§5. 線段和面積的掩蔽………………………………… 169
§6. 關於平均模數的補助定理． 係數的估計 ………… 183
§7. 單葉函數的係數之相互增長 ……………………… 192

§8. 係數的準確估計 …… 199
第五章 多連區域的單葉共形映照 …… 209
§1. 兩連區域單葉地共形映照於圓環上 …… 209
§2. 多連區域單葉地映照於具有平行割線的平面 …… 214
§3. 多連區域單葉地映照於螺旋形區域 …… 221
§4. 對於映照函數的一些關係式 …… 229
§5. 收斂定理——對於區域級列的單葉映照 …… 235
§6. 單葉映照多連區域於圓界區域．連續法 …… 241
§7. 勃老或定理的證明 …… 251
第六章 多連區域映照於圓上 …… 261
§1. 多連區域共形映照於圓上 …… 261
§2. 多連區域映照於圓上時，境界間的對應 …… 268
§3. 迪力克雷問題和葛林函數 …… 273
§4. 對於多連區域的單葉映照的補充 …… 282
§5. 映照 n 連區域於 n 葉的圓上 …… 284
§6. 聯繫着單葉共形映照和迪力克雷問題的一些恆等式 …… 291
第七章 平面上閉集的計量性質 …… 303
§1. 超限直徑與切勃肖夫的常數 …… 303
§2. 超限直徑的估計 …… 310
§3. 有界閉集的容量 …… 320
§4. 有界閉集的調和測度 …… 327
§5. 應用於有界類型的半純函數 …… 335
第八章 優越原理及其應用 …… 343
§1. 薛瓦兹引理的不變形式 …… 343
§2. 彎曲性計量的原理 …… 351
§3. 林特勒夫原理 …… 354
§4. 調和測度．最簡的應用 …… 357
§5. 有限階整函數之近似值的個數 …… 368
§6. 一級數的過收斂 …… 373
§7. 薛瓦兹引理的非解析的拓廣．圓的掩蔽定理 …… 378
§8. 從屬於解析函數的優越函數 …… 388
第九章 對於圓上的解析函數之境界問題 …… 401
§1. 普阿松積分的極限值 …… 401

§ 2. 用普阿松積分和普阿松-司帝耳背積分表示調和函數 …………………… 407
§ 3. 解析函數的極限值 ………………………………………………………… 416
§ 4. 函數類 H_p 中函數的境界性質……………………………………………… 426
§ 5. 閉圓上的連續函數 ………………………………………………………… 435
第 十 章　境界值問題，對於有長閉曲線內部的解析函數…… 444
§ 1. 共形映照的境界對應………………………………………………………… 444
§ 2. И. И. 普利伐羅夫的唯一性定理……………………………………………… 456
§ 3. 關於柯西積分的極限值……………………………………………………… 458
§ 4. 柯西公式……………………………………………………………………… 464
§ 5. 函數的類別. 柯西公式……………………………………………………… 467
§ 6. 關於平均模數的極值 ……………………………………………………… 471
§ 7. 平均近迫和直交多項式的理論 …………………………………………… 479
第十一章　某些補充……………………………………………………… 486
§ 1. 銜接定理 …………………………………………………………………… 486
§ 2. 單連黎曼面的共形映照 …………………………………………………… 494
§ 3. 對於多連區域中的有界函數之一極值 …………………………………… 501
§ 4. 關於三圓定理 ……………………………………………………………… 510
§ 5. 解析函數經過多項式的變換………………………………………………… 514

幾何知識的引說

複變函數的幾何理論，是研討由某種幾何性質所定義的解析函數，而也是研討種種解析函數族之各種幾何性質．因此，自然地這種理論依賴於一串的一般幾何學的概念，這種幾何概念發生在近代數學中的．爲便於記憶起見，我們在這裏簡單地引入這些聯系於複數平面的概念，而說到本書所需的程度爲止．

平面上的點集． 平面上的點集大部分用大楷字母來記；而用小寫字母來記平面上的點，同一小寫字母也表示它所對應的複數．

假如點 a 屬於點集 E，那末把它記做 $a \in E$．假如點集 E 中所有的點屬於點集 F，那末寫 $E \subset F$，而稱 E 落在 F 中，或稱 E 是 F 的一部分．

平面上每一點，都有它的環境．所謂定點 a 的環境是以 a 做中心的任一圓之圓內一切點所成的點集[1]．假如圓的半徑是足够的小(對於某事)，那末稱所成的環境是足够的小．我們於複數平面，補入一個非常點——無限遠點 ∞，此點是落在任何圓的外部．無限遠點的環境是任一圓的外部一切點的全體． 足够大的半徑的外部，稱爲 ∞ 點之足够小的環境．藉助於立體投射法，我們將複數平面變爲複數球面的話，那末無限遠點 ∞ 的特殊性質就會消失．

點集被稱做有界，假如它完全落在一個圓的內部．

平面上的 a，被稱爲某一點集之一極限點或是凝聚點，假如 a 的任一環境中含有此點集的點，而不同於 a．點集的極限點可以屬於此點集，而也可以不屬於此點集．點集中的點不是極限點的話，稱之爲此點集的孤立點．

無限點集至少具備一個極限點．假如點集是有界，那末此命題就是熟知的波耳查諾-瓦耶斯脫拉斯定理，此時一切極限點都在有限

---

1) 任何點集含有以 a 爲中心之一圓時，有時也稱它爲 a 的一個環境．

處．假如無限點集是無界，那末 ∞ 是它的一個極限點．

假如點 a 是某一點集之一極限點，那末點集中必有點列收斂於 a．點列可能收斂於無限遠點．點列收斂於一有限點之充要條件是除去足够多有限個點列中的點，其餘任何兩點間的距離可以小於任意取定的小的正數．

點集稱爲閉的，假如它的任何極限點都屬於點集．任何點集都可以變成閉集，假如添加它的未屬於它的一切極限點．這樣，從點集 E 所獲得的閉集，記它做 $\bar{E}$，稱它做點集 E 的閉包．

沒有共通點的兩個點集的距離是從兩集各取一點，這兩點間距離的下界．我們知道，假如無共通點的兩集都是閉的，那末這兩集的距離是正的而等於某一點對（兩集各取適當的一點）間的距離．

閉集的另外一個重要性質是著名的哈伊納–波賴耳之覆蓋定理（或是掩蔽定理）：假如有界閉集 E 爲一集的圓所覆蓋，E 中任意一點爲圓集中某一圓的內點，那末圓集中存在有限個圓覆蓋 E 的一切點．

所含不止一個點的閉集具有如下條件時，稱它做連續點集，假如它不能劃分爲兩個無共通點的不空閉集．所含只有一點的集，稱爲降等連續點集．

點集中的點滿足如下條件時，稱爲點集的內點，假如此點的某一環境中的一切點都屬於此點集．

除閉集外，我們還要考慮開集．假如集中一切點都是它的內點，稱這種點爲一開集．顯然地，平面上關於閉集的餘集是一開集，關於開集的餘集是一閉集．

我們要提一提和集、差集、通集的定義．設有有限個或是無限個點集 $E_1, E_2, \cdots$；點集 E 的任何一點屬於某一 E_k，而任一 E_k 爲 E 的一部分的話，稱 E 是 $E_1, E_2, \cdots$ 的和集，記做 $E=E_1+E_2+\cdots=\Sigma E_k$；一切點集 $E_1, E_2, \cdots$ 所通有的點的全體，稱爲這些點集的通集，記做 $E_1 \cdot E_2 \cdots$ 或是 $\prod E_k$．假如點集 E 是點集 F 的一部分，那末 $F-E$ 是屬於 F 而不屬於 E 之一切點所成的點集．

開集與閉集具有如下的性質：有限個閉集的和集與通集都是閉集，有限個開集的和集與通集都是開集，無限個閉集的通集是閉集，無限個開集的和集是開集.

區域和曲線 複變函數論的基礎的幾何概念之一是區域的概念.

區域是具備下述性質的開集：開集中任何兩點可用全在集中的折線來連結(聯絡性). 不屬於區域的點而爲區域的極限點的，稱爲區域的境界點. 假如區域不是全平面，那末它必有境界點. 區域的境界點的全體，稱爲區域的境界. 區域的境界是一閉集. 平面上的點，既不屬於區域，也不是區域的境界點，稱爲區域的外點[1]. 區域的任一外點，必有它的一個環境，環境中一切點都不屬於區域.

添入區域的境界於區域，合成一閉集，稱此閉集爲閉域. 常稱區域爲開的區域，以區別於閉域.

區域的境界成一連續點集——降等的或是所含不止一點的——時，稱這種區域爲一單連區域，全平面也算是單連區域. 非單連的區域稱爲多連區域. 假如區域的境界是兩個，三個，…，n 個連續點集(兩個點集間沒有共通點)，那末稱此區域是一個兩連，三連，…，n 連的區域；通稱這種區域是有限連的區域，而稱構成境界的連續點集爲境界連續點集.

區域在研討開集或閉集時所起的作用見之於下述定理：

平面上任何開集是有限個或是可列無限個區域的和.[2]

複變函數論中的基本幾何物件，除了區域外，還有曲線.

連續曲線是平面上之一點集，其中的點用直角坐標來表示的話，

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \tag{1}$$

1) 這個定義，通用於任一開集. 不爲開集的極限點的平面的任何點都是開集的外點.

2) 這個定理的證明是簡單的. 設 E 是一開集，落在 E 中之一切有理點的全體是 $r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots$，從 r_k 定義 E 的部分 E_k，從 E_k 中任何點，都可用全在 E 中的折線與 r_k 相連結；由是 $E=\Sigma E_k$，其中任何兩點集 E_k 或是符合或是沒有共通點.

這裏的 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是有限區間 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的 t 的連續函數. 容易明白,這個點集是一連續點集.

但是連續曲線,在概念上,對於我們的目標,是太寬泛些. 存在連續曲線,它完全不相當於一度空間曲線的直觀的表現. 事實上,我們能作成連續曲線使它通過某一正方形中任何點. 但是假如我們要求沒有重複點的連續曲線, 那末它就具有一串明瞭的性質. 稱這種曲線爲單純曲線,或是若當 (Jordan) 曲線.

總而言之,連續曲線 (1), 或是簡單地,

$$z = z(t), \quad z(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{2}$$

稱爲若當曲線,假如對於半閉區間 $[a,b]$ 中任何兩值 $t', t'', t' < t''$, $z(t') \neq z(t'')$, $z(t'') \neq z(b)$. 兩點 $z(a)$ 和 $z(b)$ 可以一致,也可以不一致. 在前面的情況,稱爲閉曲線,在後面的情況,是一不閉的曲線.

我們有下述重要的定理(若當):

若當閉曲線 C 劃分平面爲兩個單連區域,以 C 爲公共境界,兩區域中之一是有界,乃是 C 的內部區域,還有一個區域含有 ∞, 是 C 的外部區域.

不閉的若當曲線 C 的餘集是一個含有 ∞ 的單連區域, 以 C 做它的境界[1].

從不閉的若當曲線可以作成非若當類型的連續曲線. 另一方面,若當曲線有時還認爲含義太泛, 因此對於各種目的, 往往引進更特殊類型的曲線,例如光滑曲線,分段光滑曲線,有長曲線.

曲線 (2) 被稱爲光滑,假如在 $[a,b]$ 中, $z(t)$ 具有不等於 0 的連續導數 $z'(t)$ (在兩端是單方導數). 光滑曲線的要求,顯明地,當

1) 在此之前我們所提到的命題的證明,都極其簡單,讀者不難自己演出,可是若當定理的證明及其跟下去的一串命題含有莫大的難處; 關於這些事情, 讀者可以參閱專門書籍. 至於若當定理本身的證明,雜誌"數學進展"第五卷 (1950) 中,載着兩個比較簡單的證明, 分別由 A. И. 伏利必爾脫 (Вольперт) 和 A. Ф. 非理卜夫 (Филипов) 所完成.

點在曲線上移動時，等價於曲線具有連續迴轉的切線的要求．由有限個光滑曲線所組成的曲線，稱爲分段光滑曲線．有長曲線的定義詳第十章．最後，最簡單的一類連續曲線是解析曲線．這種曲線由方程 $z=z(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 所定義的話，當 $t=t_0$，$a\leqslant t_0\leqslant b$ 時，$z(t)$ 可以展成一級數

$$z(t)=c_0+c_1(t-t_0)+c_2(t-t_0)^2+\cdots,\quad c_1\neq 0.$$

連續曲線，由有限個解析曲線組成時，稱爲分段解析的曲線．

重要的問題是區域中種種若當曲線的引入，稱爲割線．於區域 B 中引入割線的意義是從 B 削除割線上的一切點．下文所考慮的割線只是限於由有限個或是無限個解析曲線所組成；無限個解析曲線組成割線時，我們假設這些曲線的端點只凝聚於區域的境界上．區域 B 之如下的割線，稱爲 B 的截線，割線的內點都屬於 B，而其兩端落在 B 的境界上（兩端可以爲同一境界點，也可以爲兩個相異的境界點）．可以證明：有限連區域的截線的兩端落在不同的兩個境界連續點集時，決不劃分區域爲幾個部分，反而將連絡數減少一個；單連區域的任何截線必劃分區域爲兩部分（兩個單連區域，這是單連區域的特徵）．類似的，割線成爲若當閉曲線時，全部落在區域中的話，稱這種割線爲環形割線．環形割線必劃分區域爲兩個部分，當區域 B 是單連時，兩部分之一是以割線做境界而完全落入 B 中（這也是單連區域的特徵）．最後，割線是完全落在（或是除出一端）B 中之一開的若當曲線時，決不劃分區域爲兩部分．我們留意：有限連區域的任何兩個境界點不屬於同一境界連續點集時，必可連此兩點作一截線，又對於一定的境界連續點集，必可作環形割線包圍此點集而不包圍其他任一境界點．又設有有界閉集 E 落在區域 B 中，則必能引入環形割線將 E 從 B 的境界劃出，這就是說，E 落入環形割線的內部而 B 之一切境界點都在割線的外部．這個事情的可能性，甚至可用直線段組成的割線來達成．

第　一　章

解析函數列和調和函數列的收斂

§1. 解析函數列的收斂

複變函數論的許多部分，特別是函數的幾何學的理論，在論證過程，廣泛地利用着解析函數列的收斂性的特徵．由於這個特徵，解析函數的論證，比之實數分析中同樣的論證，簡單而且明瞭．

讓我們引入下面的種種定義．設 E 是 z 平面上之一點集，$f_1(z), f_2(z), \cdots$ 是在 E 上所定義之一單值函數列．設 $z_0 \in E$，當數列 $f_1(z_0), f_2(z_0), \cdots$ 收斂時，稱函數列 $f_1(z), f_2(z), \cdots$ 在點 z_0 收斂．假如此函數列在 E 中各點都收斂，稱函數列 $f_1(z), f_2(z), \cdots$ 在點集 E 上收斂．此時我們說，函數列 $f_1(z), f_2(z), \cdots$ 在 E 上定義着極限函數

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in E.$$

假如對於任一正數 ε，有如下的 N, $N > 0$，當 $n > N$ 時，不等式

$$| f_n(z) - f(z) | < \varepsilon$$

在 E 上成立，那末說，函數列 $f_1(z), f_2(z), \cdots$ 在 E 上均勻收斂於有限函數 $f(z)$．假如對於任一正數 M，有如下的 N，當 $n > N$ 時，不等式

$$| f(z) | > M$$

在 E 上成立，那末說，函數列在 E 上均勻的趨向於 ∞．函數列 $f_1(z), f_2(z), \cdots$ 在 E 上均勻收斂於一有限函數之充要條件是：對於任一 $\varepsilon > 0$，有 $N > 0$，當 m 與 n 都大於 N 時，不等式

$$| f_n(z) - f_m(z) | < \varepsilon$$

在 E 上成立．這是容易證明的．