高等学校教学用書

高等数学教程

第五卷　第一分册

B. И. 斯米尔諾夫著

人民教育出版社

高等学校教学用書

高等数学教程

第五卷　第一分册

В. И. 斯米尔諾夫著
宋　正　譯

人民教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的斯米尔諾夫院士 (В. И. Смирнов) 著的“高等数学教程”(Курс высшей математики) 第五卷 1947 年版譯出的。原書曾于 1948 年荣获斯大林二等奖金。

本書中譯本分二册出版。第一分册介紹各种积分概念，特别是斯提勒杰斯积分及勒貝格-斯提勒杰斯积分，并且处理了多变数的情形。第二分册則是希勒柏特空間及其它空間的理論的介紹。由于原書出版后，前四卷已經过修訂，因此本書引用前四卷的地方，可能与本社所出版各卷新版譯本不尽相符，請讀者注意。

本書讀者对象是高等学校数学、物理等專业的高年級学生，青年教师。

本书原由高等教育出版社出版。自 1960 年 4 月 1 日起，高等教育出版社奉命与人民教育出版社合并，統称“人民教育出版社”。因此本书今后用人民教育出版社名义継續印行。

高 等 数 学 教 程

第五卷 第一分册

B. И. 斯米尔諾夫著

宋 正 譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号)

商务印书館上海厂印刷

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·548 开本 850×1168 1/32 印張 9 5/16

字数 222,000 印数 21,501—30,500 定价(4) ¥0.80

1959 年 2 月第 1 版 1960 年 8 月上海第 5 次印刷

原 序

在数学物理学的現代理論系統中，实变数函数論与一般的运算子論都有重大的意义。本書基本上就是討論这些問題的。从实变数函数論中，我只选擇了对于上述各种学科有用的材料。运算子論的研究是建立于希勒柏特空間的抽象理論的基础上。本書中，实变数函数論的基本內容乃是勒貝格-斯提勒杰斯积分論及完全加法的集合函数論。在第一章中討論古典的斯提勒杰斯积分論，而以小体字討論更一般的斯提勒杰斯积分的概念，后者乃是建立于相应上下达尔布积分相等的条件上。在第二章中討論实变数函数的度量理論及勒貝格-斯提勒杰斯积分論的基础。我从欧几里得空間中的一般測度論出發，然后定义可測函数及勒貝格-斯提勒杰斯积分的概念。在第三章中討論完全加法的集合函数論，闡明相关于一定的分布函数的絕对連續性概念，并討論黑林格尔积分論。在同一章中，以絕对連續的完全加法集合函数的积分表示法为基础，介紹一变数以及多变数的函数的导数的概念。所介紹的偏导数的推广概念乃是与 С. Л. 索伯列夫最近关于中值函数理論相联系的。在第三章末尾，很簡短地討論一下关于在抽象空間中建立測度論及积分論的可能性，并論述积分的一般定义的基础——这定义是依照 А. Н. 廓勒莫郭洛夫的。在第四章中討論希勒柏特空間的抽象理論，首先就有界自共軛运算子的情形研究。第五章論述与希勒柏特空間不同的空間理論的初步。

編写本書时除專門論文以外我曾使用了很多專書。我且举出几种最基本的来。在第一章中曾使用了 В. И. 格利汶科的"斯提

勒杰斯积分"及 И. П. 那湯松的"实变数函数論基础"两書。关于第二及第三章，曾使用了薩克斯的"积分論"及瓦雷·布三的"勒貝格积分，集合函数，拜尔类"等書。

在論希勒柏特空間論时曾引用了斯通"希勒柏特空間中的綫性变换及其在解析方面的应用"，及 A. И. 蒲列斯涅尔在"数学科学的进展"期刊第九卷中的論文，以及 Н. И. 阿希叶杰尔論雅可比矩陣的論文。

我对 С. М. 罗金斯基表示深深的謝意，因为他曾看过本書的全部手稿，并給予我很多宝貴的意見，这些意見在最后出版时都应用了。

一九四六年二月十二日

目　录

第一章　斯提勒杰斯积分

第二章　集合函数与勒貝格积分

第三章 集合函数。絕对連續性。积分概念的推广

第一章 斯提勒杰斯积分

1. 集合及其权 应用数学分析学于近代自然科学时，各种积分概念都起着很大的作用，在第一、二两章中，我們将研究較以前所論更一般形式的积分論。在討論第一种积分方程論时，已經使用过勒貝格积分。在本节中先介紹一些集合論的初步知識。这些知識是以前[IV;78]在勒貝格积分概念之前所述的补充。

設有两个由某种物体(元)形成的集合 A_1 及 A_2。所謂两集合有相同的权，是指在 A_1 的諸元与 A_2 的諸元之間有一一对应的关系，就是說，有一对应关系，对于每一屬于 A_1 的元，必有一屬于 A_2 的确定元与它相应，而反之，对于 A_2 的每一元，必有一个屬于 A_1 的元，而且只有一个这样的元与它相应。无穷集合（卽包含无穷多个元的集合）叫做可計的或可数的，是指它与全部正整数所成的集合有相同的权，也就是說，这集合的諸元可以用正整数标志出来：$a_1, a_2, a_3, \cdots$。两个可数集合必有相同的权。現在叙述一下可数集合的某些性質。考察可数集合的一个子集合，設后者由 a_{p_1}, $a_{p_2}, \cdots$ 等构成，其中 $p_1, p_2, \cdots$ 是一个正整数的增序列。这新集合的元也可以用正整数标志出来。每个元的标号就是 p 的足标。如此，可数集合的无穷部分仍是可数集合。現在考察两个可数集合：由諸元 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 組成的 $A(a_1, a_2, a_3, \cdots)$，及由諸元 b_1, $b_2, b_3, \cdots$ 組成的 $B(b_1, b_2, b_3, \cdots)$；作二者之和，卽把屬于上面两个集合的一切元合成一个集合 C。如此而得的新集合 C 通常叫做集合 A 及 B 的和。这新集合仍是可数的。事实上，只須把 C 中的諸元依下面次序排列：$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$，就可以看出其可数性。对

于有穷多个可数无穷集合之和，相似的推理也适用，就是說，有穷多个可数集合之和仍是可数集合。現在考察集合之数目也是无穷的情形。設有可数多个可数集合。这些集合的无可以用两个整数来标志：$a_p^{(q)}$。上标号表示这元所屬的集合标号，而下标号表示这元在包含它的集合中所具有的标号。不难把这一切元 $a_p^{(q)}$ 用正整数标志出来。取上下标号都是 1 的元做第一个元：$a_1^{(1)}$。此后取上下标号之和为 3 的諸元，并把它們依其上标号增加的順序排列下来：$a_2^{(1)}$，$a_1^{(2)}$，于是得到諸集合之和中的第二元与第三元。再取上下标号之和为 4 的諸元，并把它們依其上标号增加的順序排列下来：$a_3^{(1)}$，$a_2^{(2)}$，$a_1^{(3)}$。这就給出了諸集合的和中的第四元、第五元及第六元。繼續作下去，可以看出可数多个可数集合的和仍是可数集合。如果和中某些項不是可数集合，而是有穷集合，則上面命題仍然有效。

設有某无穷集合 A。由其中取某一元，并附以标号 1。所余剩的集合仍是无穷的。由它再取出一元，并附以标号 2。繼續下去，可知由任一无穷集合必可提出一个可数集合。經过如此提取后所余的集合可能是空的，就是說，它可能不含任一元，也可能是有穷的，也可能是无穷的。我們証明，如果所余集合是无穷的，那末它与原来集合有相同的权，就是說，下面的命題是正确的：如果由无穷集合 A 中提取出可数集合 P 来，而余下的是一无穷集合 B，那末集合 A 及 B 有相同的权。由无穷集合 B 重新取出某一可数集合 Q，并設 C 是所余集合。如此原来的集合 A 分解成三个集合 $A=P+Q+C$，而其中的集合 C 可能是空的，也可能是无穷的，而 P 及 Q 都是可数集合。在第二次提取之前，$A=P+B$。不难在 A 及 B 的諸元間建立一一对应关系。事实上，$A=P+Q+C$，$B=$ $=Q+C$。可数集合之和 $P+Q$ 仍是可数集合，所以在 $P+Q$ 及 Q 的諸元之間可以建立一一对应。集合 C 中的每一元与它自己对

应。如此可以在A及B的諸元間建立一一对应。由所証的命題直接可得：如果对于无穷集合增添一可数集合，則所得的新集合与原来的集合是有相同权的。在上述关于减去或增添可数集合的命題中，如果把可数集合换成有穷集合，則命題依然有效。証明与上面完全一样。

以前曾証明过，屬于某一区間$[a,b]$的一切有理数的集合是可数集合，一切有理数的集合也是可数集合。其証明与証明"可数多个可数集合之和仍是可数"这一命題完全一样。分数的分子起着上标号的作用，分母起着下标号的作用，而首先只要考察正分数。現在举一个不可数集合之例。考察凡屬于区間$[0,1]$的实数。除零以外，其中每个数可以表成无尽十进小数，其整数部分是零，而反之，凡如此的十进小数一定与上述区間中的一个实数相应。我們不使用有尽小数，因为这种有尽小数与那些以9为周期的无尽小数表示同样数，例如$0.37=0.36999\cdots$。我們証明上述实数的集合是不可数的。用归謬法証明。設上述一切十进小数，包括代表区間左端的小数$0.00\cdots$，是可数的并附好标号。依下述方式作一个新的十进小数，其整数部分是零。取某一与第一个十进小数的第一位数不同的数字做第一位数，取某一与第二个十进小数的第二位数不同的数字做第二位数，等等。作新的十进小数时我們不使用0做位数，于是所得的无尽十进小数与原有的一切十进小数相异。如此与它相应的实数沒有包含在上面那可数集合之中，这与所設区間$[0,1]$中一切实数已附好标号这一事实相冲突。如此証明了：屬于区間$[0,1]$的一切实数是不可数的。我們說这集合具有連續統的权。不难看出，屬于任意一个有穷区間$[a,b]$的一切实数的集合与屬于区間$[0,1]$的一切实数的集合具有同样的权。公式$y=\frac{x-a}{b-a}$就建立了这两集合諸元間的一一对应关系。当x遍历区間$[a,b]$时，变数y就遍历区間$[0,1]$。如果引用公式

$y=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$,那末当变数 x 在区間[0, 1]內部变化时,变数 y 遍历一切实数的集合，就是說由一切实数所組成的集合也具有連續統的权。如果不把区間的端点算在集合之中，那末其权并不改变,因为对于无穷集合增添或减去一个有穷集合并不改变其权。

在下面,我們常用記号 $[a, b]$ 表示閉集合，而不包含端点的开集合則用記号 (a, b) 表示。如果左端不算入，而右端算进去,我們用記号 $(a, b]$ 表示,同样可規定記号 $[a, b)$ 的意义。这里的数 a 及 b 也可以取无穷值: $a=-\infty$, $b=+\infty$，就是說所論的区間可以在左边或在右边是无穷的。例如閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 包含两个无穷远点。与这相应，函数 $f(x)$ 也可以在 $x=-\infty$ 及 $x=+\infty$ 处定义,例如，可以引用記号 $f(-\infty)$。在 $x=-\infty$ 处的連續性与条件 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=f(-\infty)$ 同效。同样可以处理 $x\to+\infty$ 的情形。

此外，也可以应用通常的表示法 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=f(-\infty+0)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty-0)$。

还应注意，在閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 中有穷而且連續的函数 $f(x)$ 一定在这区間中一致連續。

2. 斯提勒杰斯积分及其基本性質　回忆一下黎曼积分的定义,这种积分在前几卷中是常用的。設 $[a, b]$ 是一个有穷区間，而 $f(x)$ 是定义于这区間上的有界函数。把这区間分割成部分: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，在每一部分区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 上取某一点 ξ_k,并作出积的和:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})。\tag{1}$$

如果无限地把区間分細，并随意地取点 ξ_k 时，上写的和有确定的極限 A，那末这極限值称做 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的积分。設 δ 是諸差 x_k-x_{k-1} 中的最大者。无限地細分区間 $[a, b]$ 成部分与 $\delta\to0$ 同义；而所謂在(1)中之和有确定極限 A 存在，与下面所說的同

义：对于任意預定的正数 ε，存在一正数 η，使当 $\delta\leqslant\eta$ 时，

$$\left|A-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right|\leqslant\varepsilon。$$

我們可以用同样方式建立更一般的积分觀念。这是由荷兰数学家斯提勒杰斯在 1894 年研究連分数时首先介紹的，其后得到很寬广的發展，在純粹数学問題与精密自然科学問題中都有应用。設在有穷区間 $[a, b]$ 上給出两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 来，并設二者在这区間之上每一点处都取有穷値。今不用和（1），而代之以和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]。\tag{2}$$

如果无限地細分区間，并随意地取点 ξ_k 时，上写的和趋向于确定的有穷極限，那末我們說函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上依 $g(x)$ 是可积分的，并写成

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\lim\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]。$$

在黎曼积分中 $g(x)$ 的任务由 x 担当。显然現在介紹的新积分有很多类似黎曼积分的性質，而这些性質的証明也与对于黎曼积分的証明完全相同。現在枚举这些性質，并設下列各式中的一切积分都存在：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a^b\sum_{k=1}^{p}a_k f_k(x)dg(x)=\sum_{k=1}^{p}a_k\int_a^b f_k(x)dg(x)\\
&\int_a^b f(x)d\sum_{k=1}^{p}a_k g_k(x)=\sum_{k=1}^{p}a_k\int_a^b f(x)dg_k(x)\\
&\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)
\end{aligned}\right\}\text{（a_k 都是常数）。}\tag{3}$$

此外还有一个極显然的公式：

$$\int_a^b dg(x)=g(b)-g(a)。\tag{4}$$

在（3）的前两式中，由右面的积分的存在可推知左面积分存在。

現在詳細地推出分部积分式。設函数 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在，我們証明 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在。取和（2），把含相同点的函数 $g(x)$ 值的項归并，得

$$\sigma=-\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)\right]+g(b)f(\xi_n)-g(a)f(\xi_1)。$$

加上差值

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a),$$

并減去它，可写成

$$\sigma=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\Big\{\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)\right]+$$

$$+g(a)\left[f(\xi_1)-f(a)\right]+g(b)\left[f(b)-f(\xi_n)\right]\Big\}。\qquad (5)$$

在花括弧中者恰是 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分之黎曼-斯提勒杰斯和(2)。依所知条件，$g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在，这就是說当无限細分区間时，花括弧中之和趋向于这积分值。如此，依（5），和 σ 有一極限值，也就是說，$f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在，并且可以写成

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b g(x)\,df(x)\qquad (6)$$

或

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)+\int_a^b g(x)\,df(x)=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b,\qquad (7)$$

而在这式中，由两积分中之一个存在可推得第二个存在。

斯提勒杰斯积分有两种特殊情形，現在提一下。設区間 $[a,b]$ 分割成有穷多的部分：$a=c_0<c_1<\cdots<c_{p-1}<c_p=b$，并且在每个部分区間 (c_{k-1}, c_k) 中函数 $g(x)$ 的值是常数 g_k。如此在位于区間 $[a, b]$ 中每一点 c_k 处，函数 $g(x)$ 有一跃度 $s_k=g_{k+1}-g_k$。可能在区間两端也有跃度：在左端是 $s_0=g_1-g(a)$，而在右端是 $s_p=$

$=g(b)-g_p$。再設函数 $f(x)$ 在一切間断点 c_k 处并在区間端点处連續。設 c_q 点不是和(2)中分割区間的点，但 c_0 与 c_p 除外。在和(2)中，如一項里的 x_{k-1} 与 x_k 是在同一区間 (c_{q-1},c_q) 中，那末这項必等于零，因为在这情形下，$g(x_{k-1})=g(x_k)$。如果区間 $[x_{k-1},x_k]$ 包含間断点 c_q，则当无限地細分区間时，$f(\xi_k)$ 趋向于 $f(c_q)$，$g(x_k)-g(x_{k-1})$ 趋向于 s_q，而显然(2)中之和趋向于下列的有穷和：

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right]=\sum_{q=0}^{p} f(c_q)s_q。\qquad (8)$$

如果点 c_q 是分割 $[a,b]$ 的点，那末要考虑以 c_q 为端点的两个区間，而其結果一样。現在考察第二种特殊情形。設 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中是連續的，而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中有导函数 $g'(x)$，并且后者是依黎曼可积分的，从而是有界的。对于差值 $g(x_k)-g(x_{k-1})$ 使用拉格朗日公式，可以把和(2)写成下面形式：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right]=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1}),\qquad (9)$$

而 ξ_k' 是位于 $[x_{k-1},x_k]$ 内部的数。我們可以令 $f(\xi_k)=f(\xi_k')+\varepsilon_k$，而既然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中是一致連續的，当无限地細分区間时 $|\varepsilon_k|$ 中的最大者趋向于零，也就是說，对于任意預定的正数 ε，存在一个正数 η，使由 $\delta<\eta$ 可知 $|\varepsilon_k|<\varepsilon$。于是可以把(9)中的和写成

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})。\qquad (9_1)$$

两个依黎曼可积分的函数的积还是可积分的，而在上写的公式中右边第一項当无限地細分区間时趋向于积 $f(x)g'(x)$ 的黎曼积分。不难証明第二項趋向于零。事实上，依假設，函数 $g'(x)$ 是有界的，就是說，有一确定的正数 M，使 $|g'(x)|<M$。上面已經說过，如果預定一个正数 ε，必有一正数 η 存在，使由 $\delta<\eta$ 可知 $|\varepsilon_k|<\varepsilon$。于

是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\varepsilon M(x_k-x_{k-1})=\varepsilon M(b-a),$$

而由此,既然 ε 是任意的,式(9_1)中右边的第二項趋向于零。如此取極限可得

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)g'(x)dx, \tag{10}$$

就是説,在前述的假定下,斯提勒杰斯积分蜕化成平常的黎曼积分。在前面的第一情形中,则蜕化成有穷和。不难証明,如果不設 $f(x)$ 連續而設它是依黎曼可积分的,那末公式(10)依然成立。在以后我們將討論上面所定义的斯提勒杰斯积分存在的問題,也将論及一些将来再定义的更一般的积分的存在問題。重要的乃是函数 $g(x)$ 将算做在$[a, b]$內是不减的。为簡便起見,以后常把不减函数叫做增函数。对于这样的函数 $g(b)$ 是其最大值,$g(a)$ 是其最小值。下面一节乃是准备性的。它不但对于研究上面所定义的斯提勒杰斯积分的存在問題有基本的意义,就是对于研究以后将介紹的更一般型积分問題也是如此。

3. 达尔布和 在討論黎曼积分时曾介紹过所謂达尔布和。对于以后将介紹的一切一般积分概念,相类似的和也起着基本的作用。本节中将就上面所定义的斯提勒杰斯积分作出这种和,并研究其性質。凡在本节中介紹的概念与所証明的事实只要經过一些无关宏旨的改变就对于以后推广的积分概念仍然成立,将来常要参考本节的結果。

首先回忆一下实数集合的确界定义[見 I; 39]。設有一实数集合 E,并設它是从上有界的,就是說有一数 L 存在,使凡集合 E 中的数必小于 L。如此則存在一确定的数 M,这数有下列特性:凡集合 E 中的数必不大于 M,而对于任意正数 ε 必有一屬于集合

E的数存在，这数大于$M-\varepsilon$。这数M叫做集合E的上确界。同样如果集合从下有界，就是說凡集合中的数必大于同一个固定数，那末这集合有一下确界m，这数m有下列特性：凡集合E中的数必不小于m，而对于任意正数ε，集合E中必有小于$m+\varepsilon$的数。如果集合从上无界，我們說它的上确界是$(+\infty)$，而如果这集合从下无界，我們說它的下确界是$(-\infty)$。确界的表示我們使用下面的写法：

$$m=\inf E, \quad M=\sup E。$$

設$f(x)$与$g(x)$是在区間$[a, b]$上有界的函数，而这区間可能是有穷的，也可能是无穷的，并且$g(x)$是不减函数，又設有一种分割区間$[a, b]$成部分的方法：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

用δ表示这分割。在区間左边无穷时，$a=-\infty$，而在区間右边无穷时，$b=+\infty$。設m_k与M_k各是$f(x)$在区間$[x_{k-1}, x_k]$上諸值的下确界及上确界。作与区間$[a, b]$的分割δ相应的达尔布-斯提勒杰斯和：

$$s_\delta=\sum_{k=1}^{n} m_k[g(x_k)-g(x_{k-1})]; \quad S_\delta=\sum_{k=1}^{n} M_k[g(x_k)-g(x_{k-1})]。 \tag{11}$$

对于有界函数$f(x)$，必有一正数L存在，使$|f(x)|\leqslant L$。注意$g(x_k)-g(x_{k-1})\geqslant 0$，对于任意分割$\delta$可得：

$$|s_\delta|\leqslant \sum_{k=1}^{n} L[g(x_k)-g(x_{k-1})]=L[g(b)-g(a)],$$

$$|S_\delta|\leqslant L[g(b)-g(a)],$$

与和(11)并列，还可以作下面的黎曼-斯提勒杰斯和：

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})], \tag{12}$$

而ξ_k是区間$[x_{k-1}, x_k]$中的某一点。注意$m_k\leqslant f(\xi_k)\leqslant M_k$，而

$g(x_k)-g(x_{k-1})\geqslant 0$,则对任意的分割 δ 可得不等式

$$s_\delta\leqslant\sigma_\delta\leqslant S_\delta。\tag{13}$$

現在介紹一些新名詞。分割 δ' 称做分割 δ 的后繼,是指分割 δ 的一切分割点也是分割 δ' 的分割点。設 δ_1 与 δ_2 是两个任意分割。取一新分割,使其分割点是由 δ_1 及 δ_2 两分割的分割点合并而成者。这新的分割叫做分割 δ_1 及 δ_2 的积,并表示成 $\delta_1\delta_2$。显然分割 $\delta_1\delta_2$ 既是 δ_1 的后繼,也是 δ_2 的后繼。对于任意有穷多个分割,也可以定义积 $\delta_1\delta_2\cdots\delta_n$ 的概念。还要注意和 s_δ 与 S_δ 只与分割 δ 的选擇有关,而和 σ_δ 則还随点 ξ_k 的选擇而变化。現在証明几个很簡單的定理。

定理 1. 如果分割 δ' 是分割 δ 的后繼,那末 $s_{\delta'}\geqslant s_\delta$, $S_{\delta'}\leqslant S_\delta$。

証明不等式 $s_{\delta'}\geqslant s_\delta$ 做例。由 δ 换成 δ' 时,分割 δ 中的每一部分区間又分成有穷多个部分:

$$x_{k-1}=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<\cdots<x_{p_k-1}^{(k)}<x_{p_k}^{(k)}=x_k,$$

而和 s_δ 中的項 $m_k[g(x_k)-g(x_{k-1})]$ 换成下列的和:

$$\sum_{s=1}^{p_k}m_s^{(k)}[g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})],$$

其中 $m_s^{(k)}$ 是函数 $f(x)$ 在区間 $[x_{s-1}^{(k)},x_s^{(k)}]$ 上的下确界。显然 $m_s^{(k)}\geqslant m_k$,所以,注意差値 $g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})$ 不能是負数,可得

$$\sum_{s=1}^{p_k}m_s^{(k)}[g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})]\geqslant\sum_{s=1}^{p_k}m_k[g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})]=$$

$$=m_k[g(x_k)-g(x_{k-1})],$$

而定理証明了[参照 I;112]。

定理 2. 如果 δ_1 及 δ_2 是任意两分割,那末 $s_{\delta_1}\leqslant S_{\delta_2}$。

对于同一分割的不等式 $s_\delta\leqslant S_\delta$ 可以由下面两关系直接导出:$m_k\leqslant M_k$, $g(x_k)-g(x_{k-1})\geqslant 0$。如此对于分割 $\delta_1\delta_2$, $s_{\delta_1\delta_2}\leqslant S_{\delta_1\delta_2}$。另一方面,依定理 1, $s_{\delta_1}\leqslant s_{\delta_1\delta_2}$, $S_{\delta_2}\geqslant S_{\delta_1\delta_2}$,由此可知 $s_{\delta_1}\leqslant S_{\delta_2}$。