

# 随机过程论

## 基础·理论·应用

胡迪鹤 著

本书系统论述了马尔可夫过程、鞅及平稳过程的基本理论及其应用。还介绍了随机过程论的一些基础：点集拓扑，测度与积分，Banach 代数，算子半群。



武汉大学学术丛书

WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY 武汉大学出版社



武汉大学  
学术丛书

任  
任  
式  
帧

3N  
价

IS

7

图书在版编目(CIP)数据

随机过程论:基础、理论、应用/胡迪鹤著. —武汉:武汉大学出版社,2000.4

国家自然科学基金资助课题

国家教育部专业基金资助课题

ISBN 7-307-02943-x

I. 随… II. 胡… III. 随机过程 IV. O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第15884号

EA01/33 25

责任编辑:顾素萍 责任校对:刘欣 版式设计:支笛

出版:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

发行:新华书店湖北发行所

印刷:武汉市新华印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:21.75 字数:562千字 插页:3

版次:2000年4月第1版 2000年4月第1次印刷

ISBN 7-307-02943-x/O·224 定价:32.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换。



**胡迪鹤** 教授、博士生导师。1935年生。1957年毕业于北京大学数学力学系。毕业后留校任教。1973年调至武汉大学，1980年由讲师越级晋升为教授，1986年由国务院学位办公室批准为博士导师。1979年至1981年在美国伊利诺大学访问研究，1992年夏在美国弗吉尼亚大学讲学。自1956年师从许宝騄先生学习概率论始，至今研究该学科历四十余年。出版专著八部，译著一部，发表有关概率论的论文60篇。其中《一般状态马氏过程分析理论》获全国优秀科技图书二等奖；《随机分形引论》获湖北省科技进步二等奖；《马尔可夫过程与马尔可夫场》获国家教委科技进步二等奖；《随机分形与马氏过程相关课题》获国家教委科技进步三等奖；《鞅不等式及其极限理论》获国家教委科技进步三等奖。历任武汉大学校务委员会委员，武汉大学学术委员会委员，武汉大学数学系系主任、数学所副所长；兼任国家教委科技委员会数学组成员、国家教委教学指导委员会委员、中英奖学金留学人员资格审查委员会委员、中国数学会常务理事、中国概率统计学会常务理事、湖北省数学会副理事长兼秘书长、武汉市科协副主席等职。还担任过两种数学杂志的副主编。从1991年起，享受国务院有突出贡献专家的特殊津贴。

紀念恩師

許金保先生

誕生九十周年



---

於廸鵬

2000年

## 内 容 简 介

本书由三大部分组成:一是近代随机过程论的基础,含点集拓扑、积分与测度、Banach 空间、Banach 代数及算子半群.二是随机过程论的基本理论,含马尔可夫过程、鞅、平稳过程.三是随机过程的应用,含更新过程的应用、各种马尔可夫过程的应用、平稳序列的应用、鞅的应用.

本书兼顾了各种人员的要求,满足了不同目的的读者需要.基础好的理论研究工作者可重点参考第二部分——随机过程的基本理论;研究生主要参考第二部分并以第一部分做预备知识;应用研究工作者可重点参考第三部分——随机过程的应用,并以第一、第二部分做理论根据.

本书既可作为研究生的教学参考书,又可作为理论研究及应用研究的引导书.

# 前 言

今年是许宝騄先生诞生九十周年。许先生是我国最早的一批院士之一,“是我国最早从事概率论、数理统计科学研究并达到世界先进水平的一位数学家”,对我国近代数学的发展,有过卓越的贡献,享誉国内外,堪称一代宗师。作为长期跟随许先生学习过的弟子之一,特撰此书,以示对先生之敬意。

随机过程论方面的书,无论是专著或教材,国内外已有不少,但随机过程的基础、理论、应用三者皆含的书却不多。本书集这三方面的内容,故名之曰《随机过程论——基础、理论、应用》。

本书分三部分:第一部分是基础,包含前三章。第一章是点集拓扑简介,这一章取材于许宝騄先生 1964 年在北京大学概率论讨论班上报告的内容。第二章是测度与积分摘要。测度与积分在随机过程的研究中,是不可须臾或缺的工具,因此择其要者集于第二章。第三章是随机过程研究中最常用的泛函分析的基本内容,诸如 Banach 空间、Banach 代数、算子半群。第二部分,是本书的核心,概括了随机过程的基本理论,主要讲三种随机过程模型:马尔可夫过程、鞅过程、平稳过程。其中四章讲马尔可夫过程,鞅过程与平稳过程各占一章。这种比例分配是合乎这三类过程的内涵、历史长短、文献多寡的实际情况的。第二部分还有一章论述随机过程的基本概念,这是第四章。第十一章作为随机分析的一些引子,简单论述了随机微分方程式,特别是 Ito 积分。第三部分是第十二章,讲随机过程的应用。其讲法是用理论模型来带实际应用,讲明该理论如何与实际问题结合,间或举一二例以示范。在这一部分中,主要讲述了更新过程、分枝过程、生灭过程、宽平稳序列和鞅的应用。

随机过程论,即使从 A. A. Markov 于 1907 年发表的重要论文算起,也有近百年历史,其文献、成果浩如烟海。本书只不过是沧海一粟,如能对读者有所裨益,即不虚此笔墨了。

作者才智平平,书中谬误之处在所难免,敬请不吝指教。

作 者

2000 年 2 月 18 日

于珞珈山



# 目 录

<b>第一章 点集拓扑简介</b> .....	1
§1 拓扑空间中的开集、闭集、 $G_\delta$ 集、 $F_\sigma$ 集、Borel 集 与子空间 .....	1
§2 稠密、无处稠密、纲 .....	5
§3 紧性与列紧性, 第一与第二可数条件.....	9
§4 分离性.....	16
§5 映 射.....	22
§6 度量空间.....	27
§7 乘积拓扑空间.....	36
<b>第二章 测度与积分摘要</b> .....	41
§1 集合系与单调系定理.....	41
§2 测度的概念与性质.....	46
§3 度量空间中的测度.....	50
§4 实值函数的 Lebesgue 积分 .....	57
§5 诸收敛性及其关系.....	60
§6 赋号测度的 Hahn 分解与 Lebesgue 分解.....	66
<b>第三章 Banach 空间、Banach 代数与算子半群</b> .....	68
§1 Banach 空间的基本概念 .....	68
§2 Bochner 积分 .....	73

§ 3	Banach 代数	83
§ 4	算子半群	86
§ 5	无穷小算子及预解式	87
<b>第四章</b>	<b>随机过程的基本概念</b>	<b>101</b>
§ 1	随机过程的定义及可测性、可分性、连续性	101
§ 2	随机元的分布及特征泛函	109
§ 3	乘积空间上测度之产生, 随机过程的存在性	114
§ 4	条件概率与条件期望	128
<b>第五章</b>	<b>平稳独立增量过程</b>	<b>149</b>
§ 1	Poisson 过程	149
§ 2	Brown 运动及 Wiener 空间	165
§ 3	Lévy 过程与无穷可分律	192
§ 4	Stable 过程	202
§ 5	从属过程(Subordinator)	207
<b>第六章</b>	<b>可数状态的马尔可夫链</b>	<b>214</b>
§ 1	定义及基本概念	214
§ 2	状态的分类及判别准则	221
§ 3	遍历性理论	232
§ 4	实例及应用	251
§ 5	马尔可夫链的泛函的极限定理	265
<b>第七章</b>	<b>马尔可夫过程的一般理论</b>	<b>271</b>
§ 1	基本概念及存在性定理	271
§ 2	时齐的马尔可夫过程	284
§ 3	停时及强马尔可夫性	301
§ 4	马尔可夫过程的分类及轨道性质	326

第八章 纯间断马尔可夫过程·····	332
§ 1 准转移函数及其半群之连续性、可微性·····	332
§ 2 $q$ 过程的存在性及唯一性定理 ·····	356
§ 3 可数状态的场合 ·····	376
§ 4 轨道的纯间断性 ·····	383
第九章 鞅 论·····	388
§ 1 鞅不等式及收敛定理 ·····	388
§ 2 上鞅的 Riesz 分解及轨道的正则性 ·····	411
§ 3 鞅的 Doob 停时理论 ·····	417
§ 4 鞅变换 ·····	431
§ 5 取值于 Banach 空间中的鞅·····	445
第十章 平稳过程论·····	472
§ 1 严平稳过程及其强大数定律 ·····	472
§ 2 宽平稳过程的一般概念及正交随机测度 ·····	493
§ 3 Karhunen 定理、宽平稳过程的谱展式 ·····	519
§ 4 谱展式的应用、大数定律及谱测度的估计·····	528
§ 5 算子遍历定理及其在随机过程中的应用 ·····	537
第十一章 随机微分方程式·····	547
§ 1 ITO $\hat{\int}$ 积分及其性质 ·····	547
§ 2 随机微分方程式的解的存在性、唯一性及其性质 ···	572
§ 3 复合函数的微分公式 ·····	582
第十二章 应 用·····	594
§ 1 更新过程与新陈代谢 ·····	594

---

---

§2 分枝过程与种群繁衍 .....	606
§3 生灭过程与随机服务 .....	617
§4 ARMA 模型与 Wold 分解 .....	643
§5 鞅的应用 .....	653
<b>参考文献</b> .....	<b>672</b>
<b>索引</b> .....	<b>678</b>

# 第一章 点集拓扑简介

本书的集合运算符号,取通用之表示法.如 $\Omega$ 为任一集合, $\omega \in \Omega$ 表示 $\omega$ 属于 $\Omega$ ,或 $\omega$ 是 $\Omega$ 之元素; $A \subset \Omega$ 表示 $A$ 含于 $\Omega$ ,或 $A$ 是 $\Omega$ 之子集; $\{\omega\}$ 表示含 $\omega$ 的单点集; $\cup$ 与 $\cap$ 分别表示求并与求交运算; $A - B$ 与 $A \Delta B$ 分别表示 $A$ 与 $B$ 之差及 $A$ 与 $B$ 之对称差; $\emptyset$ 表示空集; $A^c \triangleq \Omega - A$ 表示 $A$ 之补集.有时简记 $A \cap B$ 为 $AB$ .

$\mathbf{R}^d$ 恒表示 $d$ 维欧氏空间, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$ , $\bar{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$ .

## §1 拓扑空间中的开集、闭集、 $G_\delta$ 集、 $F_\sigma$ 集、Borel集与子空间

**定义 1.1** 设 $\Omega$ 为任一集合, $\mathcal{T}$ 为 $\Omega$ 的一个子集族(有时称子集族为集合系),如果 $\mathcal{T}$ 满足:

$$(C_1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}, \Omega \in \mathcal{T};$$

$$(C_2) \quad A_\gamma \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T} \quad (\Gamma \text{ 是任一指标集});$$

$$(C_3) \quad B_n \in \mathcal{T} \quad (1 \leq n \leq N, N \text{ 是任一正整数}) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^N B_n \in \mathcal{T},$$

则称 $(\Omega, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, $\mathcal{T}$ 是 $\Omega$ 上的一个拓扑,当 $A \in \mathcal{T}$ 时,称 $A$ 为开集; $\Omega - A$ 为闭集.

**定义 1.2** 设 $(\Omega, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A \subset \Omega$ ,含于 $A$ 的最大开集,即 $\bigcup_{G \subset A, G \in \mathcal{T}} G$ 称为 $A$ 的开核,记之为 $A^\circ$ .

**命题 1.1** 设 $(\Omega, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $\Omega$ 中的子集的开核具有下列性质:

- (1)  $(A - A^\circ)^\circ = \emptyset$ ;
- (2)  $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ ;
- (3)  $G \subset A, G \in \mathcal{T} \Rightarrow G \subset A^\circ$ ;
- (4)  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ ;
- (5)  $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = A^\circ$ ;
- (6)  $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^\circ \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^\circ$  ( $\Gamma$  是任一指标集);
- (7)  $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^\circ \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^\circ$  ( $\Gamma$  是任一指标集);
- (8)  $A^\circ B^\circ = (AB)^\circ$ .

**定义 1.3** 设  $x$  是拓扑空间  $(\Omega, \mathcal{T})$  中任一点, 含  $x$  的任何开集均称为  $x$  的邻域.

**命题 1.2** 设  $A$  为拓扑空间  $(\Omega, \mathcal{T})$  的任一子集, 则

- (1)  $A$  为开集之充要条件是:  $A$  中每一点  $x$  均有一个含于  $A$  的邻域;
- (2)  $x \in A^\circ \Leftrightarrow x$  有一个含于  $A^\circ$  之邻域.

**证** (1) 必要性. 若  $A$  为开集, 则  $A = A^\circ$ , 故  $A$  (即  $A^\circ$ ) 中每一点  $x$  均有含于  $A$  之邻域  $A^\circ$ .

充分性. 只需证  $A \subset A^\circ$ . 事实上, 任取  $x \in A$ , 由假设知: 有开集  $G$  满足  $x \in G \subset A$ . 由  $A^\circ$  之定义此  $G$  必含于  $A^\circ$ , 从而  $x \in A^\circ$ . 充分性得证.

(2) 是显然的.

**定义 1.4** 设  $A$  为拓扑空间  $(\Omega, \mathcal{T})$  之子集, 含  $A$  之最小闭集, 即  $\bigcap_{F \supset A, F \text{ 闭}} F$ , 称为  $A$  之闭包, 记之为  $\bar{A}$ .

**命题 1.3** 设  $(\Omega, \mathcal{T})$  是拓扑空间,  $\Omega$  中的子集的闭集与闭包具有下列性质:

- (1) 任意多个闭集之交是闭集;

(2) 有限多个闭集之并是闭集;

(3)  $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ ;

(4)  $A \subset F$ ,  $F$  是闭集  $\Rightarrow \bar{A} \subset F$ ;

(5)  $\bar{A}$  是闭集;

(6)  $A$  是闭集  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ ;

(7) 对任一指标集  $\Gamma$ , 恒有

$$\overline{\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)} \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma, \quad \overline{\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)} \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma;$$

(8)  $(\bar{A})^\circ = (A^\circ)^\circ, \quad \overline{(A^\circ)} = (A^\circ)^\circ$ ;

(9)  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;

(10) 若  $G$  是开集, 则对  $\Omega$  的任何子集  $A$  有

$$\overline{(AG)} = \overline{(\bar{A}G)}.$$

证 (1) ~ (9) 是显然的. 只证(10). 因为

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{A}G)} \overline{(\overline{AG})}^\circ &= \overline{(\bar{A}G)} \overline{((AG)^\circ)}^\circ = \overline{(\bar{A}G)} (A^\circ \cup G^\circ)^\circ \\ &= \bar{A} (G(A^\circ \cup G^\circ))^\circ = \bar{A} (GA^\circ)^\circ \\ &= \bar{A} G (A^\circ)^\circ = G \bar{A} (\bar{A})^\circ = \emptyset, \end{aligned}$$

故

$$\bar{A}G \subset \overline{(\bar{A}G)},$$

从而  $\overline{(\bar{A}G)} \subset \overline{(AG)}$ , 而  $\overline{(AG)} \subset \overline{(\bar{A}G)}$  是显然的, 故(10) 成立.

**命题 1.4** 对拓扑空间  $(\Omega, \mathcal{T})$  中任一子集  $A$ , 总有:  $x \in \bar{A}$  的充要条件是  $x$  的任一邻域与  $A$  有非空交集.

证 因为由命题 1.3 (8) 知

$$x \in (\bar{A})^\circ \Leftrightarrow x \in (A^\circ)^\circ$$

$$\Leftrightarrow \text{存在开集 } G \text{ 满足: } x \in G \subset (A^\circ)^\circ = (\bar{A})^\circ$$

$$\Leftrightarrow \text{存在开集 } G \text{ 满足: } x \in G \text{ 且 } G\bar{A} = \emptyset.$$

此即命题 1.4 成立.

**定义 1.5** 称拓扑空间  $(\Omega, \mathcal{T})$  的子集  $F$  是  $F_\sigma$  集, 如果  $F$  可表

示为有限或可数无穷个闭集之并;称  $\Omega$  的子集  $G$  是  $G_\delta$  集,如果  $G$  可表示为有限或可数无穷个开集之交.

显然任一闭集必为  $F_\sigma$  集,任一开集必为  $G_\delta$  集.

**定义 1.6** 设  $\Omega$  是任一集合(未必赋有拓扑),  $\Sigma$  是  $\Omega$  上的一个非空子集族.

(1) 称  $\Sigma$  是半环,如果

(a)  $\emptyset \in \Sigma$ ;

(b)  $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B \in \Sigma$ ;

(c)  $A, B \in \Sigma, A \supset B \Rightarrow A - B = \bigcup_{i=1}^n C_i, C_i \in \Sigma, C_i \cap C_j = \emptyset (i \neq j)$ .

(2) 称  $\Sigma$  是环,如果

$A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma, A \cap B \in \Sigma, A - B \in \Sigma$ .

(3) 称  $\Sigma$  是代数,如果  $\Sigma$  是环,而且  $\Omega \in \Sigma$ .

(4) 称  $\Sigma$  是  $\sigma$  环(或  $\sigma$  代数),如果  $\Sigma$  是环(或代数)且

$$"A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma"$$

(5) 称含  $\Sigma$  的最小  $\sigma$  代数为由  $\Sigma$  产生的  $\sigma$  代数,记之为  $\sigma(\Sigma)$ . 仿之,可定义由  $\Sigma$  产生的环、由  $\Sigma$  产生的代数、由  $\Sigma$  产生的  $\sigma$  环.

(6) 若  $(\Omega, \mathcal{T})$  是拓扑空间,由  $\mathcal{T}$  产生的  $\sigma$  代数  $\sigma(\mathcal{T})$  称为 **Borel  $\sigma$  代数**,其中每个元素  $A \in \sigma(\mathcal{T})$  皆称为 **Borel 集**. 有时记  $\sigma(\mathcal{T})$  为  $\mathcal{B}(\Omega)$ ,而  $\mathcal{B}^1 \triangleq \mathcal{B}(\mathbf{R})$ .

**命题 1.5** 设  $(\Omega, \mathcal{T})$  是拓扑空间,则

(1) 任一  $F_\sigma$  集、任一  $G_\delta$  集都是 Borel 集;

(2) 可数个 Borel 集之交或并皆为 Borel 集,两 Borel 集之差亦为 Borel 集.

**定义 1.7** 设  $(\Omega, \mathcal{T})$  是拓扑空间,  $\Omega^* \subset \Omega$ , 则  $(\Omega^*, \Omega^* \mathcal{T} \triangleq \{A\Omega^* : A \in \mathcal{T}\})$  亦为拓扑空间,称之为相对于  $\Omega^*$  的子空间.



$(\Omega^*, \Omega^* \mathcal{T})$  的开集或闭集,称之为开于  $\Omega^*$  或闭于  $\Omega^*$ .

**命题 1.6** 设  $(\Omega, \mathcal{T})$  是拓扑空间,  $\Omega^* \subset \Omega$ . 则有:

- (1)  $A$  开于  $\Omega^*$  的充要条件是:存在开集  $G$ , 使  $A = \Omega^* G$ ;
- (2)  $A$  闭于  $\Omega^*$  的充要条件是:  $\Omega^* A^c$  开于  $\Omega^*$ ;
- (3)  $A$  闭于  $\Omega^*$  的充要条件是:存在闭集  $F$ , 使  $A = \Omega^* F$ .

**证** (1) 和 (2) 显然成立. 只证 (3). 事实上,

$$A \text{ 闭于 } \Omega^* \iff \Omega^* A^c \text{ 开于 } \Omega^*$$

$$\iff \text{存在开集 } G, \text{ 使 } \Omega^* A^c = \Omega^* G$$

$$\iff \text{存在开集 } G, \text{ 使 } \Omega^* (\Omega^* A^c)^c = \Omega^* (\Omega^* G)^c$$

$$\iff \text{存在开集 } G, \text{ 使 } A = \Omega^* G^c.$$

在子空间  $(\Omega^*, \Omega^* \mathcal{T})$  中, “取补集”、“取闭包”、“取开核” 分别记作:  $(\cdot | \Omega^*)^c, \overline{(\cdot | \Omega^*)}, (\cdot | \Omega^*)^\circ$ . 显然,

$$(A | \Omega^*)^c = \Omega^* A^c.$$

**命题 1.7** 设  $(\Omega, \mathcal{T})$  为拓扑空间,  $\Omega^* \subset \Omega$ , 则有

- (1)  $(A | \Omega^*) = \Omega^* \bar{A}$ ;
- (2)  $(A | \Omega^*)^\circ = \Omega^* ((\Omega^*)^c \cup A)^\circ$ .

**证** (1)  $(A | \Omega^*) = \bigcap_{\substack{E \text{ 闭于 } \Omega^* \\ E \supset A}} E = \bigcap_{\substack{F \text{ 闭} \\ F \supset A}} \Omega^* F = \Omega^* \bar{A}.$

(2) 由命题 1.3 (8) 及本命题之 (1) 知

$$\begin{aligned} (A | \Omega^*)^\circ &= \overline{((A | \Omega^*)^c | \Omega^*)} | \Omega^*)^\circ \\ &= \overline{((\Omega^* A^c | \Omega^*) | \Omega^*)}^\circ \\ &= (\Omega^* \overline{(\Omega^* A^c)} | \Omega^*)^\circ \\ &= \Omega^* (\Omega^* (\Omega^* A^c))^\circ \\ &= \Omega^* ((\Omega^* A^c)^c)^\circ \\ &= \Omega^* ((\Omega^*)^c \cup A)^\circ. \end{aligned}$$

## §2 稠密、无处稠密、纲

**定义 2.1** 设  $(\Omega, \mathcal{T})$  是拓扑空间,  $A, B \subset \Omega$ . 称  $A$  对  $B$  稠密,