随机过程论

基础·理论·应用

胡迪鹤 著

本书系统论述了马尔可夫过程、鞅及平稳过程的基本理论及其应用。还介绍了随机过程论的一些基础：点集拓扑，测度与积分，Banach 代数，算子半群。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY 武汉大学出版社

武汉大学
学术丛书

任
任
式
帧

BN
价

ISI

7

图书在版编目(CIP)数据

随机过程论：基础、理论、应用/胡迪鹤著.—武汉：武汉大学出版社，2000.4
国家自然科学基金资助课题
国家教育部专业基金资助课题
ISBN 7-307-02943-x

Ⅰ.随… Ⅱ.胡… Ⅲ.随机过程 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 15884 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：刘　欣　　版式设计：支　笛

出版：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
发行：新华书店湖北发行所
印刷：武汉市新华印刷厂
开本：850×1168　1/32　印张：21.75　字数：562 千字　插页：3
版次：2000 年 4 月第 1 版　　2000 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-02943-x/O·224　　定价：32.00 元

胡迪鹤　教授、博士生导师。1935年生。1957年毕业于北京大学数学力学系。毕业后留校任教。1973年调至武汉大学，1980年由讲师越级晋升为教授，1986年由国务院学位办公室批准为博士导师。1979年至1981年在美国伊利诺大学访问研究，1992年夏在美国弗吉尼亚大学讲学。自1956年师从许宝騄先生学习概率论始，至今研究该学科历四十余年。出版专著八部，译著一部，发表有关概率论的论文60篇。其中《一般状态马氏过程分析理论》获全国优秀科技图书二等奖；《随机分形引论》获湖北省科技进步二等奖；《马尔可夫过程与马尔可夫场》获国家教委科技进步二等奖；《随机分形与马氏过程相关课题》获国家教委科技进步三等奖；《鞅不等式及其极限理论》获国家教委科技进步三等奖。历任武汉大学校务委员会委员，武汉大学学术委员会委员，武汉大学数学系系主任、数学所副所长；兼任国家教委科技委员会数学组成员、国家教委教学指导委员会委员、中英奖学金留学人员资格审查委员会委员、中国数学会常务理事、中国概率统计学会常务理事、湖北省数学会副理事长兼秘书长、武汉市科协副主席等职。还担任过两种数学杂志的副主编。从1991年起，享受国务院有突出贡献专家的特殊津贴。

纪念恩师
许宝騄先生
诞生九十周年

胡迪鹤
2000年

内容简介

本书由三大部分组成:一是近代随机过程论的基础,含点集拓扑、积分与测度、Banach 空间、Banach 代数及算子半群. 二是随机过程论的基本理论,含马尔可夫过程、鞅、平稳过程. 三是随机过程的应用,含更新过程的应用、各种马尔可夫过程的应用、平稳序列的应用、鞅的应用.

本书兼顾了各种人员的要求,满足了不同目的的读者需要. 基础好的理论研究工作者可重点参考第二部分——随机过程的基本理论;研究生主要参考第二部分并以第一部分做预备知识;应用研究工作者可重点参考第三部分——随机过程的应用,并以第一、第二部分做理论根据.

本书既可作为研究生的教学参考书,又可作为理论研究及应用研究的引导书.

前　　言

今年是许宝騄先生诞生九十周年。许先生是我国最早的一批院士之一，“是我国最早从事概率论、数理统计科学研究并达到世界先进水平的一位数学家”，对我国近代数学的发展，有过卓越的贡献，享誉国内外，堪称一代宗师。作为长期跟随许先生学习过的弟子之一，特撰此书，以示对先生之敬意。

随机过程论方面的书，无论是专著或教材，国内外已有不少，但随机过程的基础、理论、应用三者皆含的书却不多。本书集这三方面的内容，故名之曰《随机过程论——基础、理论、应用》。

本书分三部分：第一部分是基础，包含前三章。第一章是点集拓扑简介，这一章取材于许宝騄先生 1964 年在北京大学概率论讨论班上报告的内容。第二章是测度与积分摘要。测度与积分在随机过程的研究中，是不可须臾或缺的工具，因此择其要者集于第二章。第三章是随机过程研究中最常用的泛函分析的基本内容，诸如 Banach 空间、Banach 代数、算子半群。第二部分，是本书的核心，概括了随机过程的基本理论，主要讲三种随机过程模型：马尔可夫过程、鞅过程、平稳过程。其中四章讲马尔可夫过程，鞅过程与平稳过程各占一章。这种比例分配是合乎这三类过程的内涵、历史长短、文献多寡的实际情况的。第二部分还有一章论述随机过程的基本概念，这是第四章。第十一章作为随机分析的一些引子，简单论述了随机微分方程式，特别是 Ito 积分。第三部分是第十二章，讲随机过程的应用。其讲法是用理论模型来带实际应用，讲明该理论如何与实际问题结合，间或举一二例以示范。在这一部分中，主要讲述了更新过程、分枝过程、生灭过程、宽平稳序列和鞅的应用。

随机过程论，即使从 A. A. Markov 于 1907 年发表的重要论文算起，也有近百年历史，其文献、成果浩如烟海。本书只不过是沧海一粟，如能对读者有所裨益，即不虚此笔墨了。

作者才智平平，书中谬误之处在所难免，敬请不吝指教。

作　者
2000 年 2 月 18 日
于珞珈山

目　　录

第一章　点集拓扑简介

本书的集合运算符号，取通用之表示法．如 Ω 为任一集合，$\omega \in \Omega$ 表示ω属于Ω，或 ω 是Ω之元素；$A \subset \Omega$ 表示A 含于Ω，或 A 是Ω之子集；$\{\omega\}$ 表示含 ω 的单点集；$\bigcup$ 与 $\bigcap$ 分别表示求并与求交运算；$A-B$ 与$A\Delta B$ 分别表示A 与B 之差及A 与B 之对称差；$\varnothing$ 表示空集；$A^c \triangleq \Omega - A$ 表示A 之补集．有时简记 $A \cap B$ 为AB．

$\mathbf{R}^d$ 恒表示d 维欧氏空间，$\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$，$\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$．

§1　拓扑空间中的开集、闭集、G_δ 集、F_σ 集、Borel 集与子空间

定义 1.1　设 Ω 为任一集合，$\mathscr{T}$为 Ω 的一个子集族(有时称子集族为集合系)，如果 $\mathscr{T}$满足：

(C_1)　$\varnothing \in \mathscr{T}$，$\Omega \in \mathscr{T}$；

(C_2)　$A_\gamma \in \mathscr{T} \Longrightarrow \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathscr{T}$ (Γ 是任一指标集)；

(C_3)　$B_n \in \mathscr{T}$ ($1 \leqslant n \leqslant N$，$N$是任一正整数)$\Longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{N} B_n \in \mathscr{T}$，

则称$(\Omega, \mathscr{T})$是一个**拓扑空间**，$\mathscr{T}$是 Ω 上的一个**拓扑**，当 $A \in \mathscr{T}$时，称 A 为**开集**；$\Omega - A$ 为**闭集**．

定义 1.2　设$(\Omega, \mathscr{T})$是拓扑空间，$A \subset \Omega$，含于 A 的最大开集，即 $\bigcup\limits_{G \subset A, G \in \mathscr{T}} G$ 称为A 的**开核**，记之为 A°．

命题 1.1　设$(\Omega, \mathscr{T})$是拓扑空间，Ω 中的子集的开核具有下列性质：

(1) $(A - A^\circ)^\circ = \varnothing$;

(2) $A \subset B \Longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$;

(3) $G \subset A,\ G \in \mathscr{T} \Longrightarrow G \subset A^\circ$;

(4) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

(5) $A \in \mathscr{T} \Longleftrightarrow A = A^\circ$;

(6) $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^\circ \supset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^\circ$ (Γ 是任一指标集);

(7) $(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^\circ \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^\circ$ (Γ 是任一指标集);

(8) $A^\circ B^\circ = (AB)^\circ$.

定义 1.3 设 x 是拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$中任一点,含 x 的任何开集均称为 x 的**邻域**.

命题 1.2 设 A 为拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$的任一子集,则

(1) A 为开集之充要条件是:A 中每一点 x 均有一个含于 A 的邻域;

(2) $x \in A^\circ \Longleftrightarrow x$ 有一个含于 A° 之邻域.

证 (1) 必要性.若 A 为开集,则 $A = A^\circ$,故 A(即 A°)中每一点 x 均有含于 A 之邻域 A°.

充分性.只需证 $A \subset A^\circ$.事实上,任取 $x \in A$,由假设知:有开集 G 满足 $x \in G \subset A$.由 A° 之定义此 G 必含于 A°,从而 $x \in A^\circ$.充分性得证.

(2) 是显然的.

定义 1.4 设 A 为拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$之子集,含 A 之最小闭集,即 $\bigcap_{F\supset A,F闭} F$,称为 A 之**闭包**,记之为 $\overline{A}$.

命题 1.3 设$(\Omega,\mathscr{T})$是拓扑空间,Ω 中的子集的闭集与闭包具有下列性质:

(1) 任意多个闭集之交是闭集;

(2)　有限多个闭集之并是闭集；

(3)　$A \subset B \Longrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$；

(4)　$A \subset F$，F 是闭集 $\Longrightarrow \bar{A} \subset F$；

(5)　$\bar{A}$ 是闭集；

(6)　A 是闭集 $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$；

(7)　对任一指标集 Γ，恒有

$$\overline{(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)} \supset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma}, \quad \overline{(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma};$$

(8)　$(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$，$\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$；

(9)　$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$；

(10)　若 G 是开集，则对 Ω 的任何子集 A 有

$$\overline{(AG)} = \overline{(\bar{A}G)}.$$

证　(1) ~ (9) 是显然的. 只证(10). 因为

$$\begin{aligned}(\bar{A}G)(\overline{(AG)})^c &= (\bar{A}G)((AG)^c)^\circ = (\bar{A}G)(A^c \cup G^c)^\circ \\ &= \bar{A}(G(A^c \cup G^c))^\circ = \bar{A}(GA^c)^\circ \\ &= \bar{A}G(A^c)^\circ = G\bar{A}(\bar{A})^c = \varnothing,\end{aligned}$$

故

$$\bar{A}G \subset \overline{(AG)},$$

从而 $\overline{(\bar{A}G)} \subset \overline{(AG)}$，而 $\overline{(AG)} \subset \overline{(\bar{A}G)}$ 是显然的，故(10)成立.

命题1.4　对拓扑空间 $(\Omega, \mathscr{T})$ 中任一子集 A，总有：$x \in \bar{A}$ 的充要条件是 x 的任一邻域与 A 有非空交集.

证　因为由命题 1.3 (8) 知

$$\begin{aligned}x \in (\bar{A})^c &\Longleftrightarrow x \in (A^c)^\circ \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G \text{ 满足}: x \in G \subset (A^c)^\circ = (\bar{A})^c \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G \text{ 满足}: x \in G \text{ 且 } G\bar{A} = \varnothing.\end{aligned}$$

此即命题 1.4 成立.

定义1.5　称拓扑空间 $(\Omega, \mathscr{T})$ 的子集 F 是 $\boldsymbol{F_\sigma}$ **集**，如果 F 可表

示为有限或可数无穷个闭集之并;称 Ω 的子集 G 是 **G_δ 集**,如果 G 可表示为有限或可数无穷个开集之交.

显然任一闭集必为 F_σ 集,任一开集必为 G_δ 集.

定义 1.6　设 Ω 是任一集合(未必赋有拓扑),Σ 是 Ω 上的一个非空子集族.

(1)　称 Σ 是**半环**,如果

(a)　$\varnothing \in \Sigma$;

(b)　$A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cap B \in \Sigma$;

(c)　$A, B \in \Sigma,\ A \supset B \Longrightarrow A - B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i,\ C_i \in \Sigma,\ C_i \cap C_j = \varnothing\ (i \neq j)$.

(2)　称 Σ 是**环**,如果

$A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cup B \in \Sigma,\ A \cap B \in \Sigma,\ A - B \in \Sigma$.

(3)　称 Σ 是**代数**,如果 Σ 是环,而且 $\Omega \in \Sigma$.

(4)　称 Σ 是 **σ 环**(或 **σ 代数**),如果 Σ 是环(或代数)且

$$\text{“}A_n \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma\text{”}.$$

(5)　称含 Σ 的最小 σ 代数为**由 Σ 产生的 σ 代数**,记之为 $\sigma(\Sigma)$. 仿之,可定义**由 Σ 产生的环**、**由 Σ 产生的代数**、**由 Σ 产生的 σ 环**.

(6)　若 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,由 $\mathscr{T}$ 产生的 σ 代数 $\sigma(\mathscr{T})$ 称为 **Borel σ 代数**,其中每个元素 $A \in \sigma(\mathscr{T})$ 皆称为 **Borel 集**. 有时记 $\sigma(\mathscr{T})$ 为 $\mathscr{B}(\Omega)$,而 $\mathscr{B}^1 \triangleq \mathscr{B}(\mathbf{R})$.

命题 1.5　设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,则

(1)　任一 F_σ 集、任一 G_δ 集都是 Borel 集;

(2)　可数个 Borel 集之交或并皆为 Borel 集,两 Borel 集之差亦为 Borel 集.

定义 1.7　设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,$\Omega^* \subset \Omega$,则 $(\Omega^*,\ \Omega^*\mathscr{T} \triangleq \{A\Omega^* : A \in \mathscr{T}\})$ 亦为拓扑空间,称之为**相对于 Ω^* 的子空间**.

$(\Omega^*, \Omega^*\mathscr{T})$ 的开集或闭集,称之为**开于 Ω^*** 或**闭于 Ω^***.

命题 1.6 设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,$\Omega^* \subset \Omega$.则有:

(1) A 开于 Ω^* 的充要条件是:存在开集 G,使 $A = \Omega^* G$;

(2) A 闭于 Ω^* 的充要条件是:$\Omega^* A^c$ 开于 Ω^*;

(3) A 闭于 Ω^* 的充要条件是:存在闭集 F,使 $A = \Omega^* F$.

证 (1) 和 (2) 显然成立.只证 (3).事实上,

$$\begin{aligned} A \text{ 闭于 } \Omega^* &\Longleftrightarrow \Omega^* A^c \text{ 开于 } \Omega^* \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G, \text{使 } \Omega^* A^c = \Omega^* G \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G, \text{使 } \Omega^* (\Omega^* A^c)^c = \Omega^* (\Omega^* G)^c \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G, \text{使 } A = \Omega^* G^c. \end{aligned}$$

在子空间 $(\Omega^*, \Omega^*\mathscr{T})$ 中,“取补集”、“取闭包”、“取开核”分别记作:$(\cdot \mid \Omega^*)^c$,$\overline{(\cdot \mid \Omega^*)}$,$(\cdot \mid \Omega^*)^\circ$.显然,

$$(A \mid \Omega^*)^c = \Omega^* A^c.$$

命题 1.7 设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 为拓扑空间,$\Omega^* \subset \Omega$,则有

(1) $\overline{(A \mid \Omega^*)} = \Omega^* \overline{A}$;

(2) $(A \mid \Omega^*)^\circ = \Omega^* ((\Omega^*)^c \cup A)^\circ$.

证 (1) $\overline{(A \mid \Omega^*)} = \bigcap\limits_{\substack{E\text{闭于}\Omega^* \\ E \supset A}} E = \bigcap\limits_{\substack{F\text{闭} \\ F \supset A}} \Omega^* F = \Omega^* \overline{A}$.

(2) 由命题 1.3 (8) 及本命题之 (1) 知

$$\begin{aligned} (A \mid \Omega^*)^\circ &= (\overline{((A \mid \Omega^*)^c \mid \Omega^*)} \mid \Omega^*)^c \\ &= (\overline{(\Omega^* A^c \mid \Omega^*)} \mid \Omega^*)^c \\ &= (\Omega^* \overline{(\Omega^* A^c)} \mid \Omega^*)^c \\ &= \Omega^* (\Omega^* \overline{(\Omega^* A^c)})^c \\ &= \Omega^* ((\Omega^* A^c)^c)^\circ \\ &= \Omega^* ((\Omega^*)^c \cup A)^\circ. \end{aligned}$$

§2 稠密、无处稠密、纲

定义 2.1 设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,$A, B \subset \Omega$.称 **A 对 B 稠密**,