模糊数学及其经济分析

吴秉坚　编著

中国标准出版社

模糊数学及其经济分析

吴秉坚　编著

中国标准出版社

1994

(京)新登字 023 号

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学及其经济分析/吴秉坚编著.-北京:中国标准出版社,1994

ISBN 7-5066-1011-6

Ⅰ.模… Ⅱ.吴… Ⅲ.模糊数学-经济评价 Ⅳ.①0159 ②0224.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 08918 号

中国标准出版社出版

北京复兴门外三里河北街 16 号

邮政编码:100045

电　话:8522112

永清县第一胶印印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 印张 4½ 101 千字数

1994 年 10 月第一版　1994 年 10 月第一次印刷

*

印数 1－3000　定价 5.50 元

科目 335—56

前　言

模糊数学是在美国控制论专家 L. A. Zadeh（扎德）教授 1965 年提出的模糊集合(Fuzzy Set)基础上发展起来的一门新兴的数学分支。这门新的学科在近二十多年的时间里得到了非常迅速的发展。它在现实世界中的应用越来越广泛，不仅为气象预报、地震预测、地质找矿、经济管理等学科提供了有效的数学方法，而且它的应用已经深入到现代医学、生物学、农学和体育科学等各个科学领域。

正如恩格斯所指出的"一切差异都在中间阶段融合，一切对立都经过中间环节而相互过渡"，现实世界中存在着大量的模糊现象。例如，人的"健康"与"不健康"、"高"与"不高"、"年轻"与"不年轻"等，这些概念之间是不能划出一条明显的分界，它们都是逐渐地从量变而过渡到质变。模糊数学的创立为研究类似这样的模糊现象提供了数学工具；特别是在社会、经济、教育等人文科学领域，模糊数学为其发展起到了其它数学分支所不能替代的作用。

本书编写目的是在财经工作者中普及模糊数学知识，因而力求突出实用性和普及性。本书在保持数学学科体系的逻辑性与科学性前提下，尽量作到深入浅出的介绍模糊数学中的基本概念与基本方法，略去了若干复杂抽象的证明过程；另外，在介绍每一种具体的方法之后都配以一定的应用实例，供

读者在经济分析的实践中运用这些方法作参考。

本书是笔者在中央财政金融学院为本科生及研究生开设有关课程的讲稿基础上修改而成；可以作为财经院校的教学参考用书，也可以作为从事实际经济工作的各类人员及社会上的自学人员的学习参考书。考虑到财经专业的特点和需要，全书共分六章，内容包括模糊数学中的基本概念及理论上最成熟、应用也最广泛的几种模糊数学方法（模糊模式识别、模糊相似选择、模糊聚类分析、综合评价、模糊规划等）。当然这些远不是模糊数学的全部内容，但是掌握这些内容可以解决许多实际问题（特别是经济分析中提出的许多问题）。

笔者在本书编写过程中主要参考了罗承忠教授编著的《模糊集引论》和吴望名教授等编著的《应用模糊集方法》等著作。由于笔者水平所限，不妥之处在所难免，恳请各界读者提出宝贵意见，不胜感谢。

吴秉坚

1994年4月

目　录

第一章　模糊集合 ………………………………………………………（1）
第一节　普通集合及其特征函数 ……………………………………（1）
第二节　模糊集合 ……………………………………………………（4）
第三节　模糊集合的运算 ……………………………………………（9）
第四节　模糊集合与普通集合的关系 ………………………………（15）
第五节　扩展原则 ……………………………………………………（18）
习题一 ………………………………………………………………（19）
第二章　模糊矩阵与模糊关系 ……………………………………（22）
第一节　模糊矩阵 ……………………………………………………（22）
第二节　模糊矩阵的合成 ……………………………………………（25）
第三节　普通关系及其合成运算 ……………………………………（27）
第四节　模糊关系及其合成运算 ……………………………………（29）
习题二 ………………………………………………………………（33）
第三章　模糊模式识别………………………………………………（35）
第一节　模式识别的直接方法 ………………………………………（35）
第二节　模糊集合的内积、外积与贴近度 …………………………（37）
第三节　模式识别的间接方法 ………………………………………（43）
第四节　模糊相似选择 ………………………………………………（44）
第五节　应用问题举例 ………………………………………………（50）
习题三 ………………………………………………………………（57）
第四章　模糊聚类分析………………………………………………（59）
第一节　等价关系与集合的分类 ……………………………………（59）
第二节　模糊等价关系与模糊分类 …………………………………（62）

第三节　模糊相似关系与传递闭包 …………………………… (67)
第四节　模糊聚类分析 ………………………………………… (72)
第五节　应用问题举例 ………………………………………… (79)
习题四 ………………………………………………………… (89)
第五章　模糊综合评价 ………………………………………… (91)
第一节　模糊映射与模糊变换 ……………………………… (91)
第二节　综合评价模型 ……………………………………… (93)
第三节　改进的综合评价模型 ……………………………… (97)
第四节　综合评价的逆问题 ………………………………… (100)
第五节　应用问题举例 ……………………………………… (102)
习题五 ………………………………………………………… (113)
第六章　模糊规划初步 ………………………………………… (115)
第一节　模糊约束下的条件极值 …………………………… (115)
第二节　模糊线性规划简介 ………………………………… (122)
附录　常用隶属函数 ………………………………………… (130)

第一章　模糊集合

第一节 普通集合及其特征函数

集合是现代数学的重要概念。利用集合(为了区别于模糊集合,这里称普通集合)可以表示概念,这是因为任何概念都有确定的内涵与外延,符合某个概念的全体对象构成了这个概念的外延。例如,“钢铁厂”的外延就是所有生产钢铁的工厂;“服装商店”的外延就是所有销售服装的商店。因此,用集合的观点看,一个概念的外延就是一个集合。但是利用普通集合并不能表示所有概念,例如,“年老”,由于人的衰老是一个逐渐变化的过程,我们无法确切的划出一条年龄界限表示“年老”。类似这样的概念还有很多,它们具有外延不分明的特点,我们称为模糊概念。模糊概念在现实世界中是普遍存在的,例如,经济科学领域中的“恶性通货膨胀”、“消费超前”、“资金沉淀”等就都是模糊概念。为了建立定量化研究模糊概念的数学方法,需要将普通集合推广到模糊集合。在讨论模糊集合之前,我们先回顾一下普通集合的定义、普通集合的运算并且进一步讨论普通集合的特征函数及其基本性质。

定义 1.1　由某种性质所确定的对象的全体称为一个集合,集合中的对象称为集合的元素。通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示集合;用小写字母 $x,y,z,\cdots$ 等表示集合的元素。如果 x 是集合 A 的元素,称 x 属于 A,记作 $x\in A$;如果 x 不是

集合 A 的元素，称 x 不属于 A，记作 $x \overline{\in} A$。不含任何元素的集合称为空集，记作 Φ。

定义 1.2 设集合 A 与集合 B，如果对一切 $x \in A$，有 $x \in B$，称 A 是 B 的子集合，记作 $A \subseteq B$。如果 $A \subseteq B$，同时又有 $B \subseteq A$，称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$。

定义 1.3 设 A 与 B 是两个集合，所有既属于 A 又属于 B 的全体元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$；所有属于 A 或者属于 B 的全体元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$；在讨论问题的范围内，所有不属于 A 的全体元素构成的集合称为 A 的余集，记作 A^c。

定义 1.4 集合 U 到集合 V 的一个映射 f 指的是 U 到 V 的一个对应规则

$$f: U \to V$$
$$x \to f(x)$$

表示任给 $x \in U$，通过对应规则 f 存在唯一确定的元素 $f(x) \in V$。

定义 1.5 设 Ω 是在讨论问题的范围内所有元素构成的集合，称为全集；A 是 Ω 的子集合，集合 A 的特征函数指的是 Ω 到集合 $V = \{0, 1\}$ 的一个映射 μ_A

$$\mu_A: \Omega \to V$$
$$x \to \mu_A(x)$$

其中对应规则 μ_A 满足

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in A; \\ 0 & \text{如果 } x \overline{\in} A。\end{cases}$$

集合的特征函数有如下基本性质。

性质 1 如果 $A = \Omega$，则 $\mu_A(x) \equiv 1$；如果 $A = \Phi$，则 $\mu_A(x)$

$\equiv 0$。

性质 2 集合 A 与集合 B 满足 $A \subseteq B$ 的充分必要条件是：对一切 $x \in \Omega$，有 $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$。

证明 如果 $A \subseteq B$，对一切 $x \in \Omega$，若 $x \overline{\in} A$，则 $\mu_A(x) = 0 \leqslant \mu_B(x)$；若 $x \in A$，由已知条件知 $x \in B$，则 $\mu_A(x) = 1 = \mu_B(x)$，因此对一切 $x \in \Omega$，有 $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$。

反之，如果对一切 $x \in \Omega$，有 $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$，若 $x \in A$，则 $\mu_A(x) = 1 \leqslant \mu_B(x)$，即 $\mu_B(x) = 1$，$x \in B$，因此 $A \subseteq B$。

性质 3 集合 A 与集合 B 满足 $A = B$ 的充分必要条件是：对一切 $x \in \Omega$，有 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$。

证明 如果 $A = B$，任取 $x \in \Omega$，若 $x \overline{\in} A$，则 $x \overline{\in} B$，所以 $\mu_A(x) = \mu_B(x) = 0$；若 $x \in A$，则 $x \in B$，所以 $\mu_A(x) = \mu_B(x) = 1$，即对一切 $x \in \Omega$，有 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$。

反之，如果对一切 $x \in \Omega$，有 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$，则任取 $x \in A$，有 $\mu_B(x) = \mu_A(x) = 1$，即 $x \in B$，所以 $A \subseteq B$；同样可以证明 $B \subseteq A$，因此 $A = B$。

性质 4 $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \xlongequal{\text{记作}} \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$。

证明 任取 $x \in \Omega$，若 $x \in A \cup B$，则 $x \in A$ 或 $x \in B$，即 $\mu_A(x) = 1$ 或 $\mu_B(x) = 1$，所以

$$\mu_{A \cup B}(x) = 1 = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\};$$

若 $x \overline{\in} A \cup B$，则 $x \overline{\in} A$ 并且 $x \overline{\in} B$，即 $\mu_A(x) = 0$ 并且 $\mu_B(x) = 0$，所以

$$\mu_{A \cup B}(x) = 0 = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}。$$

因此对一切 $x \in \Omega$ 有 $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$。

性质 5 $\mu_{A\cup B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\xlongequal{记作}\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$。

证明留给读者完成。

性质 6 $\mu_{A^c}=1-\mu_A(x)$。

证明 对一切 $x\in\Omega$，若 $x\in A$，则 $x\overline{\in}A^c$，因而 $\mu_{A^c}(x)=0=1-\mu_A(x)$；若 $x\overline{\in}A$，则 $x\in A^c$，因而 $\mu_{A^c}(x)=1=1-\mu_A(x)$，所以对一切 $x\in\Omega$，有 $\mu_{A^c}(x)=1-\mu_A(x)$。

第二节 模糊集合

一、模糊集合的概念

对于普通集合 A 及其余集 A^c，任何元素 x 属于 A 或者属于 A^c，二者必居其一并且仅居其一；用特征函数表示为 $\mu_A(x)=0$(即 $\mu_{A^c}(x)=1$)或者 $\mu_A(x)=1$(即 $\mu_{A^c}(x)=0$)有一个成立并且仅有一个成立。然而客观现实中的模糊概念之所以无法用普通集合表示，就是因为一个概念和与其相互对立的概念之间无法划出一条明确的分界，它们是随着量变逐渐过渡到质变的。例如，“年轻”与“年老”就是如此，人们无法划出一条严格的年龄界限来区分“年轻”与“年老”。为了由普通集合引深到模糊集合，自然考虑将特征函数仅取 0 或者 1 这两个值推广到从 0 逐渐变化到 1；也就是说，元素 x 从完全不属于 A 逐渐过渡到完全属于 A，这就是建立模糊集合的基本思想。我们在这里把讨论对象的全体称为论域。

定义 1.6 给定论域 U，模糊集合 $\underset{\sim}{A}$指的是论域 U 到区间[0,1]的一个映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$。

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1]$$
$$x \to \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

对一切 $x \in U$，唯一确定实数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，使得 $0 \leqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leqslant 1$；用这个数表示 x 属于$\underset{\sim}{A}$的程度；其中函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 称为$\underset{\sim}{A}$的隶属函数，而对于元素 x，函数值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 称为元素 x 关于$\underset{\sim}{A}$的隶属度。

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \equiv 0$ 表示模糊集合 $\underset{\sim}{A} = \Phi$；而 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \equiv 1$ 表示模糊集合 $\underset{\sim}{A} = U$。

普通集合就是隶属函数值仅取 0 或者 1 的特殊的模糊集合，因此为了符号上的简便，本书中不加区别的采用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 等表示模糊集合，其隶属函数也就一律记作 $\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x), \cdots$ 等。

例 1 设论域 $U = \{$全体实数$\}$，给出模糊集合 A，其隶属函数为

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x-10)^2},$$

那么，当 $x = 10$ 时，$\mu_A(x) = 1$；当 $x \neq 10$ 时，$|x - 10|$ 越大，$\mu_A(x)$ 就越小。因而 A 表示聚集在 10 附近的实数组成的模糊集合，即在数轴上距 10 的距离越远的实数对 A 的隶属程度越小。

例 2 以年龄作为论域 U，取 $U = [0,100]$。模糊集合 A 与模糊集合 B 分别表示"年老"和"年轻"，扎德用如下方法定义其隶属函数

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 50, \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}} & \text{若 } 50< x\leqslant 100;\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 25, \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}} & \text{若 } 25< x\leqslant 100。\end{cases}$$

其隶属函数如图 1-1 所示。

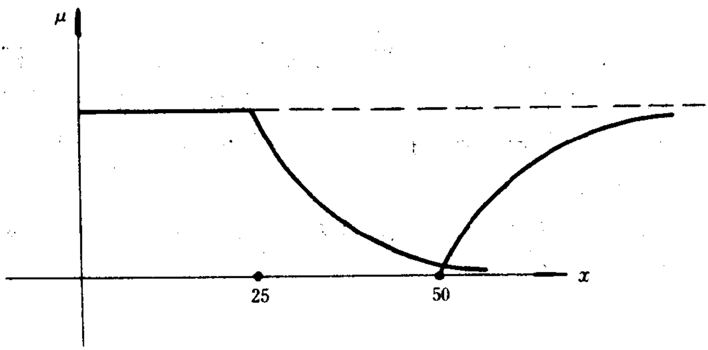

图 1-1

当年龄不超过 25 岁时，100％的属于“年轻”，当年龄超过 25 岁之后，随着年龄的增加属于“年轻”的程度越来越小；另一方面，当年龄不超过 50 岁时，100％的不属于“年老”，当年龄超过 50 岁之后，随着年龄的增加属于“年老”的程度越来越大。如 $\mu_B(30)=0.5$，表示年龄 30 岁时属于“年轻”的程度为 50％；而 $\mu_A(60)=0.8$，表示年龄 60 岁时属于“年老”的程度为 80％。

二、模糊集合的表示方法

设论域为U,模糊集合A的扎德记法是

$$A=\int_U \mu_A(x)/x$$

其中“$\int$”是一种记号,表示U中各元素及其隶属度的总括。

如果$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是有限论域,模糊集合A可以用如下几种方法表示:

(1) $A=\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2),\cdots,\mu_A(x_n)\}$,称为向量表示法。

一般情况,一个每一分量都在[0,1]区间上取值的n维向量$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$称为模糊向量,此处$0\leqslant\mu_i\leqslant1,i=1,2,\cdots,n$;

(2) $A=\{(\mu_A(x_1),x_1),(\mu_A(x_2),x_2),\cdots,(\mu_A(x_n),x_n)\}$,其中每一有序对的前者为隶属度,后者为元素;

(3) $A=\mu_A(x_1)/x_1+\mu_A(x_2)/x_2+\cdots+\mu_A(x_n)/x_n$,其中“+”、“/”仅是一种记号,并不表示加与除,称这种表示方法为有限论域的扎德记法。

例 3 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,令U到[0,1]的映射μ_A为

$$\mu_A:U\to[0,1]$$

$$x_1\to0.7$$

$$x_2\to1$$

$$x_3\to0$$

$$x_4\to0.4$$

μ_A确定的模糊集合A可以用三种方法表示如下:

(1) $A=(0.7,1,0,0.4)$;

(2) $A=\{(0.7,x_1),(1,x_2),(0,x_3),(0.4,x_4)\}$;

(3) $A=0.7/x_1+1/x_2+0/x_3+0.4/x_4$，为了简化，在扎德记法中隶属度是 0 的元素可以不写出来，即

$$A=0.7/x_1+1/x_2+0.4/x_4。$$

三、模糊幂集

定义 1.7 设论域为 U，U 的所有模糊集合作为元素构成的普通集合称为 U 的模糊幂集，记作 $P(U)$。

定义 1.8 设论域为 U，A 和 B 是 U 的模糊集合，即 $A\in P(U)$，$B\in P(U)$；如果对一切 $x\in U$，有 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，称模糊集合 B 包含模糊集合 A，记作 $A\subseteq B$；如果对一切 $x\in U$，有 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$，称模糊集合 A 与模糊集合 B 相等，记作 $A=B$。

模糊集合的包含关系满足如下基本性质：

性质 1 $A\subseteq A$。

性质 2 如果 $A\subseteq B$，又 $B\subseteq A$，则 $A=B$。

证明 任取 $x\in U$，由 $A\subseteq B$ 得

$$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x),$$

又由 $B\subseteq A$ 得

$$\mu_B(x)\leqslant\mu_A(x),$$

所以 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$，即 $A=B$。

性质 3 $A\subseteq B$，又 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

证明 因为 $A\subseteq B$，所以对一切 $x\in U$，有

$$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x);$$

又因为 $B\subseteq C$，所以有

$$\mu_B(x)\leqslant\mu_C(x);$$

因此，对一切 $x\in U$，有

$$\mu_A(x)\leqslant\mu_C(x)，即 A\subseteq C。$$

第三节 模糊集合的运算

一、模糊集合的并、交、余

设 A,B 是论域 U 的子集合(普通集合),我们知道

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

$$A^c=\{x\,|\,x\in U,x\overline{\in} A\}$$

分别称为 A 与 B 的并集、交集和 A 的余集,用特征函数表示分别为

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$$

$$\mu_{A^c}(x)=1-\mu_A(x)$$

其中"$\vee$"和"$\wedge$"分别表示取最小上界和取最大下界(例如,$0.7\vee 0.5=0.7$,$0.7\wedge 0.5=0.5$),称为扎德算子。

当 A 与 B 是论域 U 的两个模糊集合时,仍然采用扎德算子将普通集合的并、交、余运算进行推广,由此得到模糊集合的并、交、余三种运算。

定义 1.9 设论域 U,A 与 B 是 U 的模糊集合,即 $A\in P(U)$,$B\in P(U)$,它们的隶属函数分别为 $\mu_A(x)$和 $\mu_B(x)$。A 与 B 的并集是一个 U 的模糊集合,记作 $A\cup B$,其隶属函数为

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x);$$

A 与 B 的交集是一个 U 的模糊集合,记作 $A\cap B$,其隶属函数为

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x);$$

A 的余集是一个 U 的模糊集合,记作 A^c,其隶属函数为

$$\mu_{A^c}(x)=1-\mu_A(x)。$$

两个模糊集合的并集与交集可以推广到多个模糊集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 的并集与交集，记作

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n,$$

它们的隶属函数分别为

$$\mu_{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}(x)=\max\{\mu_{A_1}(x),\mu_{A_2}(x),\cdots,\mu_{A_n}(x)\}$$

$$\xlongequal{\text{记作}}\bigvee_{i=1}^{n}\mu_{A_i}(x),$$

$$\mu_{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}(x)=\min\{\mu_{A_1}(x),\mu_{A_2}(x),\cdots,\mu_{A_n}(x)\}$$

$$\xlongequal{\text{记作}}\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_{A_i}(x)。$$

并集与交集还可以进一步推广到无穷多个模糊集合 A_α $(\alpha\in I)$，$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ 与 $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$，它们的隶属函数分别为

$$\mu_{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\max\{\mu_{A_\alpha}(x)\}\xlongequal{\text{记作}}\bigvee_{\alpha\in I}\mu_{A_\alpha}(x),$$

$$\mu_{\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\min\{\mu_{A_\alpha}(x)\}\xlongequal{\text{记作}}\bigwedge_{\alpha\in I}\mu_{A_\alpha}(x)。$$

例 4 设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，模糊集合 A 与模糊集合 B 分别为

$$A=0.7/x_1+1/x_2+0.4/x_4$$

$$B=1/x_1+0.5/x_2+0.9/x_3$$

则

$$A\cup B=1/x_1+1/x_2+0.9/x_3+0.4/x_4$$

$$A\cap B=0.7/x_1+0.5/x_2$$

$$A^C=0.3/x_1+1/x_3+0.6/x_4。$$