成人高等教育自学辅导丛书

高等数学自学指导

下册

胡　林　主编
翟连林　谭　鼐　编著

水利电力出版社

内 容 提 要

本书系“成人高等教育自学辅导丛书”之一《高等数学自学指导》(下册)。

本书计三篇九章，主要内容有：多元函数的微分、积分、向量分析和微分几何初步等。各章附有小结，各节配有习题，书末附答案或提示。

本书可作理工、财经类电视大学、职工大学、业余大学、函授大学的教材或辅导书，也可作参加自学高考的自学读本。

成人高等教育自学辅导丛书

高等数学自学指导

下 册

胡 林 主编

覃连标 谭 [illegible] 等著

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市联华印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 12.125印张 268千字

1986年2月第一版 1986年2月北京第一次印刷

印数00001—28000册 定价2.55元

书号 7143·6034

前　言

当前，在经济体制改革和新技术革命挑战的形势下，智力开发的重要性更加突出了。我们迫切需要有一支高水平的职工队伍，以加速实现技术现代化、管理现代化，提高经济效益。这就要求在普遍提高职工的政治、文化、技术、业务素质的同时，尽快从现有职工中培养造就大批的专业技术干部和管理干部，形成一支在数量上能基本满足要求，质量上能掌握现代科学技术和经营管理知识，专业配套的职工队伍。可以说，大力加强职工教育，培养各类人才，是摆在我们面前的一项十分重要而又急迫的任务。

这套“成人高等教育自学辅导丛书”就是根据当前加强职工教育的形势和需要而专门组织编写的。

“丛书”以“面向实际，面向生产，为提高职工队伍素质，提高经济效益服务”作为编写指导思想；内容紧密结合成人高等教育理工类（或财经类）部分课程的教学大纲和电视大学及一些函授大学、职工大学、业余大学的教材；在布局、选材、体例和编写形式上尽量适应成人自学的特点。所以，非常适用于理工、财经类电视大学、职工大学、业余大学学员作为学习辅导书，或函授大学作为函授教材；对于广大自学读者，则是帮助他们通过自学高等考试的一种自学读本。

为了切合读者的实际需要，提高学习效果，“丛书”中的每一册都包括基本概念、重点和难点解释、典型例题分

析、总结或提示以及思考与练习等几部分内容，并配有适量的作业测验题（附答案）和电大试题选解。

这套丛书共包括十一门课程，十三册：

高等数学自学指导（上、下册）
线性规划自学指导
线性代数自学指导
概率论与数理统计自学指导
常微分方程自学指导
逻辑代数与BASIC语言自学指导
复变函数自学指导
微积分自学指导（财经类）
普通物理自学指导（上、下册）
普通化学自学指导
物理化学自学指导

本书系《高等数学自学指导》（下册），分三篇共九章。第六篇为多元函数的微分，介绍多元函数与极限的概念、偏导数、全微分及其应用；第七篇为多元函数的积分，讨论重积分，曲线积分和曲面积分；第八篇介绍向量分析和微分几何初步，场的梯度、散度、旋度等概念。

参加这套丛书编写工作的都是有经验的高等学校教师或成人教育工作者，其中有些同志还讲授过电视大学的有关课程或担任过电大辅导课主讲教师。“丛书”融汇了他们多年的教学经验和心得体会，更鲜明地具有电视教学及自学、辅导、函授多用的特色。

在编写过程中，我们得到各课程的有关教授、专家的关怀和指导，有些同志直接参予了审阅、整理等工作，在此一

并表示深切的谢意。

组织编写这类面向成人读者、自学、辅导、电教、函授多用的大专读本还是第一次，欢迎读者对“丛书”的内容、布局、结构、形式等提出宝贵意见，以帮助我们改进工作，提高“丛书”质量。

胡林

1985年7月

目　录

第六篇　多元函数微分学

第七篇　多元函数积分学

第八篇 向量分析及其应用

第六篇　多元函数微分学

上册介绍了一元函数的微积分及如何应用其理论解决一些实际问题。本册介绍多元函数，即两个以上自变量的函数。在物理、力学和工程技术等大量实际问题中，都要遇到多元函数。如物体运动的路程，速度和加速度一般都依赖于时间变量t和空间变量x，y，z（在选定的坐标系下）的。又如，物体的温度也是和时间、位置有关的。象这样依赖于不止一个自变量的函数在实际问题中是大量存在的，所以说，对多元函数的研究决不是一元函数的形式推广，它是有其实际意义的。不仅如此，与一元函数相比，多元函数在理论上还有一些实质性的差异。但从二元（即两个自变量）到二元以上函数，理论上是一样的，因此，我们着重研究二元函数。

第十五章　二元函数

§15.1　二元函数的概念

在研究一元函数时，我们都是把区间（开的或闭的）或整个实轴作为它的定义域的。这里我们也仅限于在所谓平面区域上来讨论二元函数。要弄清区域的概念，首先要搞清邻域和开集的概念。

定义1：设（x_0，y_0）是平面上一点，以该点为心，δ（>0）为半径的圆的内部称为点（x_0，y_0）的δ-邻域，或简称（x_0，y_0）的邻域，记为$U_\delta(x_0, y_0)$或简记为U_δ；

用集合表示，则为

$$U_\delta(x_0,\ y_0)=\{(x,\ y);\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}.$$

直观上它是一个以（x_0，y_0）为心，δ为半径的不带边的圆盘。

定义 2：假定M是平面上的一个点集，如果对于M中任意一点，均有该点的邻域，使得这个邻域中的每一点均在M之中，则称M是平面上的开集，或简称开集。

例如，$M=\{(x,\ y);\ x^2+y^2<1\}$是开集。事实上，对于$M$中任意一点（$x_0$，$y_0$），即$x_0^2+y_0^2<1$，可取$\delta\leqslant\sqrt{1-(x_0^2+y_0^2)}$，便知点（$x_0$，$y_0$）的$\delta$-邻域中的每一点都在$M$中。

直观上，开集是平面上一整块或几块不带边的范围。

定义 3：对于开集中任意两点，均存在含于此开集中的连结这两点的折线，则称此开集为区域。

显然，区域是开集。但区域必定是平面上的“一整块”，而不是两块或更多。我们来看图15.1。

图15.1中，我们考虑阴影部分。虚线表示不在其中，而实线则表示也在阴影部分里面。于是，我们指出，图15.1 (a)，(b)，(c)是区域（自然也是开集），而(d)和(e)是开集，但不是区域，(f)连开集都不是。

在图15.1中，(a)中的正方形的四条边，(b)中的两个同心圆，(c)中的两条平行直线，(d)中的两个相离的圆，(e)中的两条过原点的直线，(f)中的正半x轴和正半y轴分别是所围范围的“边”．我们称为它们的边界．特别(a)，(b)和(c)中的边称为区域的边界．

区域连同边界一起称为闭区域。

今后，如果我们并不需要强调闭区域，就常常将开区域

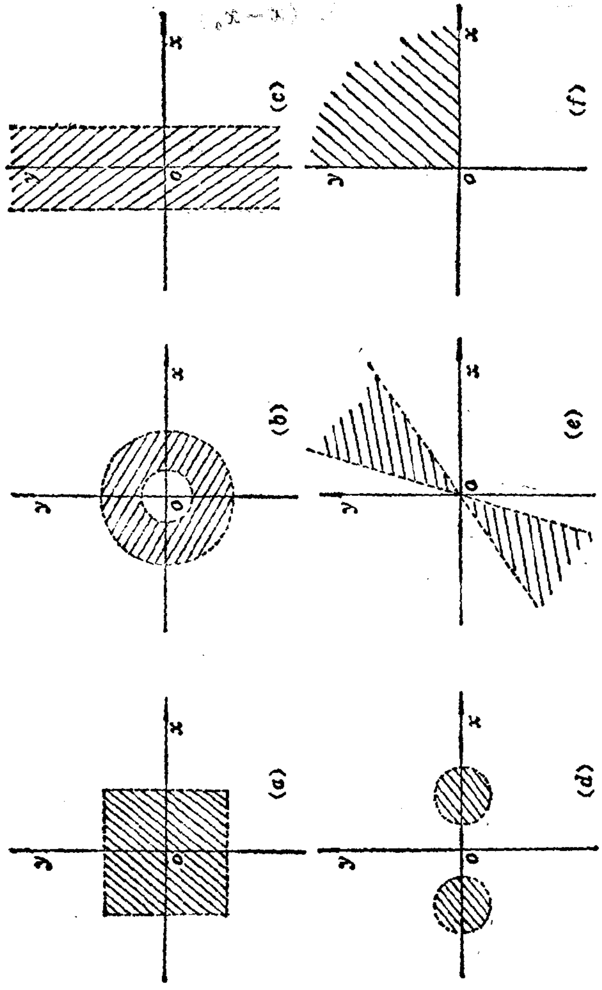

图 15.1

与闭区域通称为区域.

如果对于某个区域，存在平面上以原点为心的邻域，它包含这个区域，则该区域是有界域；否则就是无界域. 如图15.1的(a)和(b)是有界域，(c)是无界域.

定义4：假定G是平面上的一个区域，如果存在一个对应关系f，使得对于每一点$(x, y)\in G$，都至少有一个确定的实数值z与之对应，则称z为x，y的函数，记作$z=f(x, y)$，其中x，y是自变量. G称为函数$f(x, y)$的定义域.

关于这个定义，我们应当注意如下几点。

1.我们看到，定义一个二元函数需要有明确的对应关系和定义域，这是二元函数缺一不可的两个要素. 对于定义域相同但对应关系不同或者对应关系相同但定义域不同的两个函数，我们均认为它们是不相同的. 例如，在单位圆域上的函数$z=\arcsin(x^2+y^2)$和$z=\arccos(x^2+y^2)$是两个不相同的函数；又如分别在全平面和第一象限内的函数$z=xy$是两个不同的函数（见下面的例3）.

2.我们在表示函数时常常是不注明定义域的，此时，自然认为定义域是由对应关系所确定. 例如，我们只写出表达式$z=\arcsin(x^2+y^2)$，虽然表面上只给定了一个对应关系，实际还由于我们是在实数范围内讨论的，自然要求$x^2+y^2\leqslant 1$，即这个函数的定义域是包括单位圆周在内的单位圆盘.

3.定义中对一点(x,y)，可能有一个或两个以上的值与之对应. 如果有且仅有一个值，则称这个二元函数是单值的；否则就称为多值的. 今后我们考虑的都是单值函数或者可以分为两个或两个以上单值函数的多值函数. 例如，$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$可以分为$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$和$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$这样两个单值函数.

4.对于一元函数，它的表示法有解析法，图象法和列表法三种；但对于二元函数，后两种表示法均不大方便，一般采用解析法．解析法可分为显式表示和隐式表示两种．我们定义中的二元函数表示法属于显式表示．至于隐式表示将在以后再提．

$z=$ $\quad z^x+x+y=0$

5.如同常数可以看作函数一样，常数和一元函数均可以看作特殊的二元函数．

6.虽然我们只定义了二元函数，但三元函数或三元以上函数的定义是类似的，我们把这一工作留给读者去做．

问题1：在定义域不是明显给出的情况下，如何求二元函数的定义域？

先考察几个例子．

例1　考察二元函数$z=\ln(x+y)$的定义域．由对数的意义，要求$x+y>0$．因此立即得到它的定义域为

$$\{(x,\ y);\ x+y>0\}.$$

用图象表示，则为直线$x+y=0$上方的半平面（如图15.2的阴影部分）．

例2　$u=\ln(1-x^2)$在作为二元函数时，其定义域为

$$\{(x,\ y);\ |x|<1,\ |y|<\infty\}.$$

用图形表示，则为直线$x=\pm1$之间的带域（见图15.3中的阴影部分）．

例3　矩形面积S是长x，宽y的函数，用式子表示，则为$S=xy$．这个函数的定义域不是整个平面，而是

$$\{(x,\ y);\ x>0\text{ 且 }y>0\},$$

即第一象限．

通过上面的例子，我们可以将定义域的求法归纳为两条：一是根据函数在数学上的意义（实数范围），确定自变

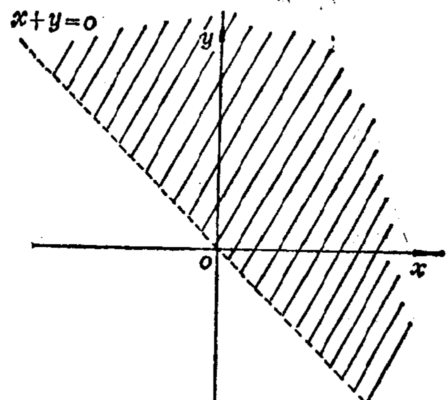

图 15.2

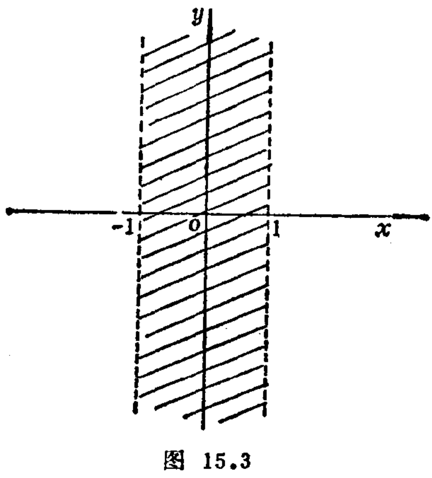

图 15.3

量的取值范围，即求得函数的定义域；二是根据实际问题的要求（如例3）来确定自变量的取值范围.

我们知道，一元函数的图象是平面上的一条曲线，这也是一元函数的几何意义，这种几何直观给我们带来很大好处，

利用它，对微积分中许多问题，如介值定理，微分中值定理等，建立了一个直观的认识．那么，二元函数有没有类似的几何意义呢？这就是

问题 2：二元函数的几何意义是什么？

我们由解析几何知识知道，$z=ax+by+c$是空间的一个平面，$z=x^2+y^2$是一个旋转抛物面；$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$表示上半单位球面．一般来说，$z=f(x, y)$是空间的一个曲面．

顺便指出，对于空间解析几何中学过的特殊二次曲面，如球面、椭球面、柱面、锥面、抛物面、双曲面和旋转曲面等等，我们应当熟悉它们的图形．这对于我们学习二元函数是很有帮助的．

习　题　15.1

1．用图形表示下面点集，并指出它们是否是开集、区域、闭区域、有界域和无界域：

（1）$\{(x, y), 1<x^2+y^2<4\}$；

（2）$\{(x, y), 1\leqslant x^2+y^2<4\}$；

（3）$\{(x, y), x^2+y^2>4$或$x^2+y^2<1\}$；

（4）$\{(x, y), x^2+y^2\geqslant 4\}$；

（5）$\{(x, y), y-x^2>0$且$x+y-1>0\}$；

（6）$\{(x, y), y-x^2>0$且$x+y-1\leqslant 0\}$．

2．求下列函数的定义域，并画出图形：

（1）$f(x, y)=\ln(x-y)+\arcsin(x^2+y^2)$；

（2）$f(x, y)=\dfrac{1}{xy}\left[\sin(x+y)+\sqrt{x^2+y}\right]$；

（3）$f(x, y)=\operatorname{tg}(x+y)$；

（4）$f(x, y)=\ln(y^2-4x+8)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$．

3. 画出下列二元函数的几何图形，并指出它们的定义域：

（1）$z=x^2+y^2$；

（2）$z=|x|$；

（3）$z=-\sqrt{x^2+y^2}$；

（4）$z=1-x-y$.

4. 给出三元函数的定义。

§15.2 二元函数的极限

极限概念是数学分析中最重要的概念. 我们已经学过数列的极限以及一元函数的极限，现在学习二元函数的极限.

对于一元函数$y=f(x)$，当$x\to x_0$时，假定$f(x)$的极限为A. 这里“$x\to x_0$”，x始终在实数轴上，或者在x_0的左侧或者在x_0的右侧，或者忽左忽右，从而一元函数有左极限，右极限和极限之分.

现在我们来粗略看一下二元函数的极限. 即对二元函数$z=f(x, y)$，当$(x, y)\to(x_0, y_0)$时，$f(x, y)$的极限假定为A. 这里“$(x, y)\to(x_0, y_0)$”，情形极为复杂. 点(x,y)可以沿着任何路径（无穷多！）任何方式（无穷多！）趋近于(x_0,y_0). 由此可以预见到二元函数的极限的复杂性.

定义1：设$z=f(x, y)$是在点(x_0, y_0)的某个邻域内有定义的函数（(x_0, y_0)可能除外）。对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当(x,y)满足不等式

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \text{ 时},$$
$$|f(x, y)-A|<\varepsilon.$$

则称二元函数$f(x, y)$在(x, y)趋于(x_0, y_0)时，极限存在，A即为其极限，记作

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,y)=A$$

或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A$.

表面看来，二元函数极限的定义与一元函数情形是类似的，似乎没有什么值得注意的地方．事实是否如此呢？让我们先来看一个例子．

例 1　考虑二元函数

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

在原点的极限情况．

这个函数在原点以外的地方都有定义，所以我们可以考虑它在原点的极限情况．

设$ax+by=0$是过原点的任意一条直线．

1）当$b\neq 0$时，直线方程可以写成$y=-\frac{a}{b}x$．此时，若点（x，y）沿着该直线趋于原点，即$\left(x,\ y=-\frac{a}{b}x\right)\to$（0，0），它等价于$x\to 0$．于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-\frac{a}{b}x\right)^2}{x^2+\left(-\frac{a}{b}x\right)^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 x}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^4 x^2}=0.$$

2）当$b=0$时，直线方程可以写成$x=0$．此时，当点