



连续介质 力学导论

冯元桢 著



科学出版社

连续介质力学导论

冯元桢 著

李松年 马和中 译

王德荣 等 校

科学出版社

1309 84A

内 容 简 介

本书用笛卡儿张量系统地介绍连续介质力学。书中首先叙述了连续介质力学所需的基本物理知识和数学知识，然后论述了应力、应变、变形率，本构方程以及场方程。书中附有大量的例题和习题。

本书物理概念清晰，论述简明、扼要。

本书可供力学、应用数学专业大学生及有关工科专业研究生使用，也可供有关力学工作者参考。

Y. C. Fung

A FIRST COURSE IN CONTINUUM MECHANICS

Second Edition

Prentice-Hall, Inc.

连续介质力学导论

冯元桢 著

李松年 马和中 译

王德荣 等 校

责任编辑 李成香

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年10月第 一 版

开本：787×1092 1/32

1984年10月第一次印刷

印张：12 1/4

印数：0001—8,000

字数：277,000

统一书号：13031·2691

本社书号：3701·13-2

定价：1.90 元

译 者 的 话

本书是作者为加利福尼亚大学(圣地亚哥)编写的教材。它在学习固体力学、流体力学、生物力学、材料科学等学科提供了有关连续介质力学的基础。作者认为, 对一个初学者来说, 最重要的是培养提出问题的能力, 这就需要对概念、理论有深刻的理解。为此, 作者用笛卡儿张量为工具来介绍连续介质力学的普遍理论, 同时附有大量有实际意义的例题和习题来加深对理论和概念的理解, 以增强解决实际问题的能力。本书内容新颖、概念清晰, 推理严谨, 便于自学。

本书前六章由李松年翻译, 后六章由马和中翻译。本稿第九章由徐华舫教授校订, 其余各章均由王德荣教授校订, 姚振汉也为本稿作了一些工作。

译 者

第二版前言

第二版修订的目的在于改进本书使它更适合于学生的需要。原在第一版前言中所提出的目标不变。学生们对我们的基本方法是能够接受的，并能很快地理解学科的重要性；但是他们要求有更多的例题，并且更详细地说明如何解题。因此，例题与解答就成为本版主要增加的内容。

第一章已经完全重写。新的重点是放在应用自由体图这一永不过时的方法上。用一些例题和练习题来说明此方法。由杆与板的问题自然地引出应力张量的概念，这就是为什么学习第二章的原因。有关梁的例题是向学生们介绍的一类最有实际应用价值的力学问题。在第七章介绍简单的梁理论。

在 1.4 节，概述了学习计划。我们强调指出，第十章是很重要的。若精通了这一章，那么本教程对于毕生从事工程和科学事业的学生会是很有用的。

第一版前言

本书是为那些开始学习一系列力学课程的科学与工程系的学生写的。在这一阶段，学生通常已学完微积分，物理，向量分析，以及初等微分方程等课程。因此，连续介质力学的课程，就为学习流体与固体力学，材料科学以及其它科学与工程分支提供了一个基础。

我的看法是，对于一个初学者来讲，讲解的方法应该是从物理概念出发，而不是纯数学的。对于经常使用连续介质力学的工程师和物理学家说来，这门课程的主要吸引人之处在于，概念简单及应用具体。因此，应该尽快地给学生介绍各种应用。

对于科学家或工程师，他必须回答的重要问题是：如何把问题用公式表示出来？如何叙述场的基本方程和边界条件？如何选择另外的假设？何种实验将会证实、否定或改进这些假设？应该如何把研究彻底地进行下去？何处会出现误差？得到一个合理的解答需要多少时间？需要多少费用？这些都是实际研究者所关心的问题，并且是以分析为工具的综合性的问题。全部回答这些问题，超出了这个“初级教程”的范围，但是我们能够给出一个良好的开端。在这本书中，我经常要求读者将问题用公式表示出来，而不管他究竟是否能够解决他的方程，并理解全部数学的微妙之处。我知道很多学生，他们读过很多书，做过无数的练习，但是自己从未把一个问题用公式表示出来过。我希望他们用另外一种方法学习，即提出他们自己的很多问题，然后再努力去发现解法及其细节。应该鼓励他们观察自然，并思索工程中的问题，然后采取的第一步就是写出一组可能的基本方程和边界条件。

导出基本控制方程这个“第一步骤”，就是本书的目标。对于一本“初级教程”来讲，仅涉及到这个第一步也许是正确的。但是，为采取这一步所需要的准备却是广泛的。为了使这一步是坚实的，将必须理解力学的基本概念，以及它们的数学表达式。为了能够有把握地应用这些基本方程，必须知道它们的由来和推导。因此，必须透彻地讨论基本概念。为此，本书前十章内容是非常广泛和详细的。

关于本书的组织编排：一开始，就解释了连续介质的概念。接着，详尽地论述了应力和应变的概念。接着分开用两整章强调了决定主应力和主应变的实际方法，以及协调性的概念。考察了运动的描述。在第七章，详细说明了流体与固体的理想化问题。在第八章，详述了各向同性的概念。在第九章，给出了常用流体和固体的力学特性的数据。在第十章，透彻地论述了物理学的基本守恒定律。从十一章开始，简要地描述理想流体，粘性流体，附面层理论，线弹性力学，弯曲和扭转理论，以及弹性波的一些特征。最后两章，简略地讨论了流体力学与固体力学的丰富领域，要全面地论述它们，将需要大量篇幅的高深数学。这里给出的导引，将为学生更容易地进入这些领域做好准备。

如果读者从本书获得关于应力、应变与本构方程的清晰概念，我将认为这本导引性的教科书是成功的。除此之外，只是概略地提出一些经典问题。在练习中给出了很多讨论，应该把它们看作是教科书整体的一部分。

我经常援引，并大量借用我以前的《固体力学基础》一书，该书可用来作为本教程的后续教程。这本“初级教程”的材料是为我在圣地亚哥加州大学的班级编写的，这所大学的课程表要求，在进行专业化之前，强调一般性的科学。对于已经有了适当的数学与物理基础的大学生和年青的研究生，本书将是有益的。

冯元桢

目 录

译者的话	
第二版前言	ii
第一版前言	iii
第一章 导论	1
1.1 本教程的目的	1
1.2 什么是力学?	2
1.3 连续介质力学	2
1.4 学习计划	5
1.5 牛顿运动定律	7
1.6 平衡	9
1.7 自由体图	13
1.8 特殊理论与普遍理论相比较	28
第二章 向量和张量	41
2.1 向量	41
2.2 向量方程	44
2.3 求和约定	48
2.4 坐标的平移和旋转	52
2.5 一般坐标变换	57
2.6 数量, 向量和笛卡儿张量的解析定义	58
2.7 张量方程的意义	61
2.8 向量和张量的符号用粗体字还是用指标?	62
2.9 商法则	63
2.10 偏导数	64
第三章 应力	69
3.1 应力的概念	69
3.2 应力分量的符号	71
3.3 运动定律和自由体图	74

注: 本书包括的内容是为一年的课程或安排得紧的一学期课程准备的。对短期课程, 可略去下面几节, 3.7, 4.6—4.8, 5.6, 5.8—5.10, 6.3, 8.3, 8.4, 8.7, 9.1—9.13, 10.7—10.9, 11.4—11.12, 12.4—12.8, 这些节用*号标明。

3.4	柯西公式	76
3.5	平衡方程	79
3.6	在坐标变换中应力分量的变换	84
3.7*	正交曲线坐标中的应力分量	85
3.8	应力边界条件	87
第四章	主应力与主轴	100
4.1	引言	100
4.2	平面应力状态	101
4.3	平面应力莫尔圆	104
4.4	主应力	107
4.5	剪应力	111
4.6*	应力偏斜张量(应力偏量)	113
4.7	拉梅应力椭球	117
4.8*	三维应力状态的莫尔圆	118
第五章	变形分析	133
5.1	变形	133
5.2	应变	137
5.3	直角笛卡儿坐标中的应变分量	139
5.4	无限小应变分量的几何解释	142
5.5	无限小旋转	143
5.6*	有限应变分量	145
5.7	主应变、莫尔圆	147
5.8	极坐标中的无限小应变分量	148
5.9*	极坐标中应变位移关系的直接推导	152
5.10*	其它的应变度量	155
第六章	速度场和协调性条件	170
6.1	速度场	170
6.2	所谓的协调性条件	171
6.3	三维应变分量的协调性	173
第七章	本构方程	180
7.1	物质性质的说明	180

7.2	无粘性流体	181
7.3	牛顿流体	182
7.4	虎克弹性固体	184
7.5	温度影响	187
7.6	具有更复杂力学性能的物质	188
7.7	简单梁的理论	189
第八章	各向同性	205
8.1	材料各向同性的概念	205
8.2	各向同性张量	206
8.3	3阶各向同性张量	210
8.4*	4阶各向同性张量	211
8.5	各向同性材料	215
8.6	应力和应变主轴的一致性	215
8.7*	表示各向同性特征的其它方法	216
第九章	流体和固体的力学性质	219
9.1	流体	220
9.2	液体的拉伸强度	225
9.3	粘性	228
9.4	空气的可压缩性	234
9.5	液体的可压缩性	236
9.6	固体的弹性	239
9.7*	金属的塑性	243
9.8	金属的理论强度	245
9.9*	大变形. 非线性弹性	248
9.10*	粘弹性力学	252
9.11	非牛顿流体	258
9.12*	粘塑性材料	260
9.13*	溶液-胶体转换, 搅溶性	262
第十章	场方程的推导	267
10.1	高斯定理	268

10.2	连续介质运动的物质描述	271
10.3	连续介质运动的空间描述	273
10.4	体积分的物质导数	275
10.5	连续方程	277
10.6	运动方程	278
10.7*	动量矩	280
10.8*	能量平衡	281
10.9	极坐标型的运动方程和连续方程	285
第十一章	流体的场方程和边界条件	294
11.1	纳维叶-斯托克斯方程	294
11.2	固体-流体交界面处的边界条件	297
11.3	自由面上的表面张力与边界条件	300
11.4	动力相似性和雷诺数	304
11.5*	水平槽或管内的层流	307
11.6*	附面层	311
11.7	平板上的层流附面层	315
11.8*	无粘性流体	318
11.9*	旋度和环量	320
11.10	无旋流	323
11.11*	可压缩的无粘性流体	325
11.12*	亚音速流与超音速流	328
第十二章	弹性力学中的一些简单问题	342
12.1	均匀各向同性体的弹性力学基本方程	342
12.2	平面弹性波	345
12.3	简化	347
12.4*	艾雷应力函数	350
12.5	圆柱形轴的扭转	352
12.6*	圣维南原理	356
12.7*	梁	357
12.8	结束语	361
习题		361
索引		370

第一章 导 论

1.1 本教程的目的

我们的目的是学会如何提出问题，以及如何把含糊的问题和概念变为准确的数学描述。

让我们考察几个这样的问题：一架飞机正在我们上空飞行。机翼必须承受应变以便支持旅客和货物。机翼承受了多少应变？如果你正在驾驶一架滑翔机，面前出现了一块铁砧云，而热气流会把飞行器带到更高的地方。这时你敢不敢飞进云彩里面去呢？机翼有足够的强度吗？你看，前面是金门大桥。它的钢索支持着巨大的载荷。怎样设计这样的钢索呢？云里含有水，田野里需要这个水。如果播下了云，会产生雨吗？雨会不会降落在需要它的地方呢？降雨量是否足够而又不泛滥？在远方有一座核电站。在反应堆里热是怎样传递的？在反应堆里有哪一种热应力？怎样评定核电站的抗震性？地震时，地球会发生什么样的现象？考察地球，你可能会惊奇，陆地为什么会漂浮、运动或裂开？再想想我们自己：我们是怎样呼吸的？如果我们做健身操，做倒立动作，我们的肺脏内部会发生什么样的变化呢？

有趣的是，所有这些问题都可以化为一定的微分方程和边界条件。求解这样的方程，我们就会得到准确的定量数据。在本书中，我们将论述构成这样的微分方程和边界条件的基本原理。虽然一旦列出这些方程后，求这些方程的解就是一件所希望的事情，但是我们并不详细地讨论它们的解。

我们的目的是公式化：将一般的概念从形式上演化为数学形式。这些数学问题可能不易求解。很多科学与工程学科创造了迅速有效地求解问题的特殊方法。上一代学习科学与工程的学生花费了数不尽的时间来学习求解微分方程所需要的方法。今天利用计算机做这件事就容易得多了。

1.2 什么是力学？

力学是研究物质运动，以及引起该运动的力的学科。力学是建立在时间，空间，力，能量以及物质这些概念的基础之上的。研究物理学，化学，生物学以及工程科学的所有分支，都需要力学知识。

要考察力学的所有方面，对我们来说，这个任务太大了。在这本书中，我们不这样做，而仅仅研究连续介质力学。我们将研究流体力学与固体力学共同的基本原理。对各个专门问题的详细讨论超出了本教科书的范围。

1.3 连续介质力学

连续介质的概念来自数学。我们讲，实数系是一个连续集。在任意两个不同的实数之间，有另一个不同的实数。因此在任何两个不同的实数之间就有无穷多个实数。我们直观地感觉到时间可以用一个实数系 t 来代表，三维空间可以用三个实数系 x ， y ， z 来代表。这样，我们就可以把时间和空间看成一个四维的连续集。

如果将连续集的概念推广到物质，我们就可说物质在空间是连续分布的。考虑密度的概念就能最好地说明这一点。用质量来度量物质的数量。假设一定的物质充满了一定的空

间 $\mathcal{V}_0$ ，如图 1.1 所示。考察 $\mathcal{V}_0$ 中一点 P ，以及收敛于 P 的子空间序列 $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots$ ：

$$(1.3-1) \quad \mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_{n-1}, \quad P \in \mathcal{V}_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

令 $\mathcal{V}_n$ 的体积是 V_n ， $\mathcal{V}_n$ 中所含物质的质量是 M_n 。构成比值 M_n/V_n 。若当 $n \rightarrow \infty, V_n \rightarrow 0$ 时， M_n/V_n 的极限存在的话，则此极限值可定义为 P 点处质量分布的密度，用 $\rho(P)$ 表示：

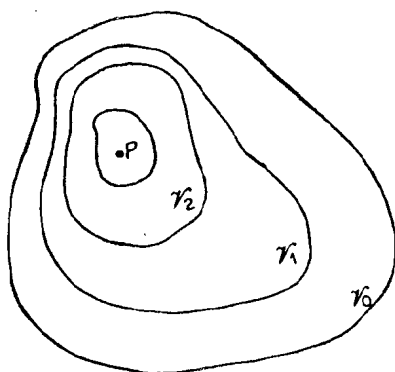


图1.1 收敛到 P 上的空间域序列

$$(1.3-2) \quad \rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n}.$$

若在 $\mathcal{V}_0$ 内各处都能这样定义密度，就可以说这个质量是连续分布的。

可以用类似的方法定义动量密度，能量密度等等。如果一个物质的质量、动量、能量密度在数学意义上存在，这个物质就是一个物质连续统。这样一个物质连续统的力学就是连续介质力学。本书正是在这个数学意义上来叙述连续介质

力学的。

连续介质力学已经广泛地用于很多物理问题。但是由于它是一种数学的抽象，所以它的适用性问题值得仔细考虑。特别是，因为在现代物理学中，物质被想像为基本粒子结构，因此就需要将粒子观点与连续介质观点协调起来。显然，如果把水看作是基本粒子结构，那么水就不是一种连续介质。如果我们试图按照定义（1.3-2）来确定水的密度，则当 $\mathcal{V}_n$ 的尺寸缩小到原子半径的量级时，我们将会碰到明显的困难。于是，若 $\mathcal{V}_n$ 与 $\mathcal{V}_{n+1}$ 差一个中子，比值 M_n/V_n 与 M_{n+1}/V_{n+1} 将有一个有限的差别。容易看出，当粒子动来动去时，极限 M_n/V_n 或者不存在，或者随时间和空间波动。为了解脱这种情况，我们将采用下面的一种修匀过程。考察比值 M_n/V_n 。令 $\mathcal{V}_n$ 变得愈来愈小，但总是保持如此大使得在其中含有很多数目的粒子。若比值 M_n/V_n 在这个附加的限制条件下趋于一个确定的极限 $\rho(P)$ ，则定义 $\rho(P)$ 为物质的密度。换句话说，对应于真实材料，我们定义了一个连续介质的数学模型，它具有（1.3-2）所严格定义的密度。因此，根据数学模型可以对物质作进一步的力学分析。

在实际中，应用这样一种修匀过程毫不困难。水分子的尺寸约为1埃（Å）（ 10^{-8} 厘米）；因此，如果问题涉及到液体水，并且永远不会考虑小于 10^{-8} 厘米尺寸的话，那么，我们就可以安全地把水当作一种连续介质来处理。地球表面上空气分子的平均自由程在室温时约为 5×10^{-8} 厘米；因此，如果要研究流过飞机的气流的话，就可以将空气当作是连续介质。我们身体内的红血球细胞的直径约为 8×10^{-4} 厘米；因此，如果要研究血液在直径0.5厘米的动脉中流动的话，就可以将血液当作是连续介质。

我们可以用统计的方法严格地作出这些论证。气体动力

学理论就是最有名的例子。气体的分子运动可以分成“随机的”和“规则的”两部分。前者对总动量的贡献为零，但是却具有有限的动能，它等同于热能并与绝对温度有关。另一方面，正如在连续介质力学中所描述的那样，规则部分（局部平均值）导致了气体的规则运动。

于是，对于不考虑物质细微结构的问题，可以采用使真实世界从数学上理想化的连续介质概念。当要考虑细微结构时，就该转到粒子物理和统计力学上去。连续介质与粒子的双重性，帮助我们将物理世界当作一个整体来理解，它在某种意义上因现代光学而出了名，现代光学有时将光看作是粒子，有时将光看作是波。

1.4 学习计划

因为连续介质是应用于大量物质质点集合上的一个抽象概念，所以连续介质力学的目的就是描述这些质点在力系作用下随空间和时间而变化的运动规律（特殊情况下是平衡）。经过多年的努力，在连续介质力学中已经形成了便利的方法与准确的术语。我们将研究这些方法和术语。

我们的学习必须从质点的牛顿运动定律开始，因此，必须知道怎样将牛顿定律用于质点系或用于系统的一部分。上面一句话的最后六个字证明是理解力学的关键。为了弄清楚在连续介质中某处发生了些什么，必须假想把该部分切开，并研究物体的一部分与另一部分的相互作用。切下的部分本身是一个实体，称为自由体。自由地使用自由体图对于学习连续介质力学的学生来讲是最重要的事。本章就要讨论这个论题，并且用一些例子来说明。

研究物体一部分经过一个假想面对另一部分的相互作用

力，导致了应力的概念。应力是一个向量。在连续介质内部任意给定的地方，应力向量取决于应力作用面的方位。面的方位用其法向量来确定。于是，应力就是一个与另一个向量有关的向量。类似于应力的量称为2阶张量。若采用张量这一术语，则应力分析将大为简化。因此，在第二章，我们要离开本题去简要地介绍一下笛卡儿张量。

然后在第三、四章，我们再转回来充分地讨论应力张量的特性。

在第五章研究了连续介质的变形分析。这里再次发现，描述变形的最好方法就是采用所谓的应变张量。在第六章讨论了变形的变化率。

每一种物质都具有特殊的力学特性。物质力学特性的数学表达式称为这个物质的本构方程。从世界上数十亿种物质当中，在工程科学与物理学中非常详细地研究了三类理想物质。这三类理想物质是无粘性流体，牛顿粘性流体和虎克弹性固体。在第七章给出了这三类理想物质的本构方程。在第八章讨论了由于各向同性带来的进一步简化。真实物质的特性往往与这些理想物质的不同。在第九章讨论了一些很普通的，重要的工程材料。

第十章为“场方程的推导”，这一章是问题的核心。连续介质力学的场方程叙述力系的平衡，物质的平衡以及能量的平衡（即动量，质量和能量的守恒定律）。对于连续介质来讲，这些方程用应力张量与应变张量来表示。边界条件经常是根据同样原理所作的补充叙述。这些方程与本构方程加在一起常常是确定一个问题所必需的全部方程。第十章的内容在本书中是最重要的。

在其余的几章中，介绍了流体力学与固体力学的一些基本特征。