实用工程数学

概率论及其应用

水利电力出版社

实用工程数学

概率论及其应用

陈　凯　王玉孝

水利电力出版社

实用工程数学
概率论及其应用
陈 凯 王玉孝
*
水利电力出版社出版
(北京三里河路6号)
新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
850×1168毫米 32开本 10.25印张 268千字
1986年4月第一版 1986年4月北京第一次印刷
印数0001—7770册 定价2.90元
书号 15143·5751

内 容 提 要

本书共分六章：1.随机事件与概率；2.随机变量及其分布；3.随机变量的数字特征；4.随机向量及其分布；5.一维随机变量的函数和随机向量的函数的分布；6.大数定律和中心极限定理简介。

本书是为在校学习期间未曾系统地学习过概率与数理统计的在职工程技术人员而编写的。内容浅显易懂，附有大量例题，每章附有小结和习题，在书末附有习题答案，很便于读者自学。

本书可供电力工程、无线电、自动控制、电机制造等专业的工程技术人员阅读，也可供大专院校及中等专业学校有关专业的师生参考。

前　言

近年来我国电力工业迅速发展，工程实际不断向我们提出新课题，要求我们采用新技术、新方法。因此，过去不用或用得很少的数学分支，诸如：

（1）线性代数

（2）概率论

（3）数理统计

（4）图论

等，在电力科技书刊和文献上已有了广泛的应用。

我国五十年代和六十年代由大专院校毕业，多年来从事电力工业的工程技术人员在校学习期间多数没有接触到上述数学内容。为了实现四个现代化，工程技术人员急需知识更新，迫切需要有一套通俗易懂便于自学的实用工程数学方面的书籍。本书就是为了满足读者这一要求而编写的。这一套书也可作为有关专业在校学生的数学参考书。

本书的特点是：

1）内容取舍以实际工作需要为依据，在保持数学体系的基础上，以应用广的内容为重点，其余内容予以删减。

2）注意基本概念和基本定理的叙述，附有较多例题，并尽可能地结合工程实际。

3）尽量作到理论深入浅出，文字通俗易懂。

4）每章有小结，借以帮助读者消化本章内容，并给学习某些章节的读者查阅有关内容提供方便。

5）每章均有习题，并附解答或提示，便于读者自学解题。

6）辟有专节或专章讨论有关数学在电力及自动控制工程中的应用，便于读者了解如何应用所学数学理论来解决实际问题。

这套书在编写过程中得到水利电力部电力科学研究院、原水利电力部干校和水利电力部工程数学及电子计算机应用学习班全体学员的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢。

限于我们的水平，书中难免存在缺点错误，热诚地希望读者批评指正。

编　者

1984年12月

符 号 表

A，B，C，……随机事件

Ω　必然事件；样本空间

Φ　不可能事件

E　随机试验

$\overline{A}$　事件A的逆事件

ξ，η，ζ，……　随机变量

τ　寿命

$P(A)$　事件A发生的概率

$P(A|B)$　B发生的条件下A发生的概率或A关于B的条件概率

p，q　若A的概率记作p，则$\overline{A}$的概率记作q

$A\cup B$　A与B至少发生其一所构成的事件，叫A与B之并

$A\cap B$　A与B同时发生所构成的事件，叫A与B之交

m，f　在n次试验中，A发生了m次，则称m为事件A在这n次试验中出现的频数，$f=\dfrac{m}{n}$叫A出现的频率

$F(x)=P(\xi<x)$　ξ的分布函数

$f(x)$　ξ的概率密度函数　$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

$M\xi$　ξ的数学期望

$D\xi$　ξ的方差

a　$M\xi$的记号

σ^2　$D\xi$的记号。σ又叫均方差或标准差

$\xi\sim N(a,\sigma)$　ξ服从数学期望为a，均方差为σ的正态分布

$\Phi(x)$　$\xi\sim N(0,1)$时，ξ的分布函数，叫标准正态分布函数

$(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n)$　n维随机向量；ξ的一个容量为n的随机子样

$(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$　随机子样$(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n)$的一个观察值

$F(x,y)=P(\xi<x,\eta<y)$　ξ和η的联合分布函数

$f(x, y)$ 若$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x, y)dxdy$，则称$f(x, y)$为$(\xi, \eta)$的概率密度函数

$F_{\xi}(x)=F(x, +\infty)$ (ξ, η)关于ξ的边际分布函数

$f_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)dy$ (ξ, η)关于ξ的边际概率密度函数

$F_{\eta|\xi}(y|x)$ $\xi=x$的条件下η的分布函数

$f_{\eta|\xi}(y|x)$ $\xi=x$的条件下η的概率密度函数

$M(\eta|x)$ $\xi=x$的条件下η的条件数量期望

$\sigma_{\xi\eta}=M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]$ ξ与η的协方差

$r_{\xi\eta}=\frac{\sigma_{\xi\eta}}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$ ξ与η的相关系数

目　　录

前　言
符号表
第一章　随机事件与概率 …………………………………………… 1
　第一节　随机事件 …………………………………………………… 1
　　一、随机现象 ……………………………………………………… 1
　　二、随机试验 ……………………………………………………… 2
　　三、样本点和样本空间 …………………………………………… 2
　　四、基本事件和随机事件 ………………………………………… 4
　第二节　事件之间的关系与运算 …………………………………… 6
　　一、事件的包含与相等 …………………………………………… 6
　　二、事件的两种运算——并与交 ………………………………… 8
　　三、事件之间的其它关系和其它运算 …………………………… 12
　第三节　概率的定义 ………………………………………………… 17
　　一、概率的古典定义 ……………………………………………… 18
　　二、概率的几何定义 ……………………………………………… 21
　　三、概率的统计定义 ……………………………………………… 24
　　四、概率的基本性质 ……………………………………………… 26
　第四节　概率的基本理论和计算 …………………………………… 27
　　一、加法定理 ……………………………………………………… 27
　　二、条件概率和乘法定理 ………………………………………… 31
　　三、全概率公式和贝叶斯公式 …………………………………… 41
　第五节　应用举例 …………………………………………………… 45
　　一、抽样问题 ……………………………………………………… 45
　　二、简单网络的可靠性计算 ……………………………………… 49
　小结 …………………………………………………………………… 55
　习题 …………………………………………………………………… 58

第二章 随机变量及其分布 …………………………………………65
第一节 随机变量的直观背景和定义 …………………………66
一、问题的提出 …………………………………………………66
二、随机变量的定义 ……………………………………………75
三、随机变量的分布 ……………………………………………76
第二节 随机变量的分布函数和概率密度函数…………………76
一、离散型随机变量的分布列和连续型随机变量的概率密度函数 …76
二、随机变量的分布函数 ………………………………………81
三、举例 …………………………………………………………84
第三节 常用的理论分布 …………………………………………88
一、贝努利试验与0—1分布 ……………………………………88
二、n重贝努利试验与二项分布 ………………………………89
三、不放回抽样与超几何分布 …………………………………93
四、巴士加分布和几何分布 ……………………………………93
五、波松分布 ……………………………………………………94
六、伽马分布和指数分布 ………………………………………98
七、均匀分布……………………………………………………101
八、正态分布……………………………………………………101
九、威布尔分布…………………………………………………109
十、瑞利分布……………………………………………………115
第四节 理论分布在可靠性问题中的应用………………………116
一、可靠性问题中的几个基本概念……………………………116
二、$R(t)$、$f(t)$和$R'(t)$之间的关系 ………………………121
三、τ不服从指数分布时元件可靠性指标的求法……………123
小结 ……………………………………………………………127
习题 ……………………………………………………………129
第三章 随机变量的数字特征……………………………………134
第一节 数学期望 ………………………………………………134
一、数学期望的实际意义………………………………………134
二、数学期望的定义……………………………………………136
三、常用分布的期望……………………………………………138
四、数学期望的性质……………………………………………141

五、随机变量函数的期望公式……………………………………142
第二节　方差 ……………………………………………………145
一、随机变量的方差的实际意义………………………………145
二、方差的定义……………………………………………………147
三、方差的性质……………………………………………………149
四、常用分布的方差………………………………………………150
五、矩…………………………………………………………………154
第三节　数字特征在可靠性问题中的应用举例 ………………156
一、定义……………………………………………………………156
二、应用举例………………………………………………………156
三、计算公式的证明………………………………………………158
小结 …………………………………………………………………159
习题 …………………………………………………………………161
第四章　随机向量及其分布…………………………………………165
第一节　二维随机向量及其分布 …………………………………165
一、随机向量的定义………………………………………………165
二、随机向量的分布函数…………………………………………166
三、离散型随机向量………………………………………………169
四、连续型随机向量………………………………………………170
五、两个重要的二维分布…………………………………………173
第二节　边际分布 …………………………………………………177
一、问题……………………………………………………………177
二、边际分布函数…………………………………………………177
三、边际分布律……………………………………………………180
四、边际概率密度…………………………………………………182
第三节　随机变量的相互独立性 …………………………………185
一、概念及定义……………………………………………………185
二、离散型随机变量的相互独立性………………………………186
三、连续型随机变量的相互独立性………………………………187
第四节　条件分布和条件数学期望 ………………………………190
一、离散型随机变量的条件分布…………………………………190
二、连续型随机变量的条件分布…………………………………192

三、条件数学期望……………………………………………………194
第五节 随机向量的数字特征 ……………………………………197
一、数学期望……………………………………………………………197
二、方差与协方差……………………………………………………198
三、相关系数……………………………………………………………203
第六节 n维随机向量简介 ……………………………………209
小结 ……………………………………………………………………213
习题 ……………………………………………………………………221
第五章 一维随机变量的函数和随机向量的函数的分布 ………225
第一节 一维随机变量的函数的分布和数字特征 ……………2 6
一、离散型随机变量的函数的分布和数字特征………………226
二、连续型随机变量的函数的分布和数字特征………………227
第二节 随机向量的函数的分布和数字特征 …………………234
一、离散型随机向量的函数的分布和数字特征………………234
二、连续型随机向量的函数的分布和数字特征………………236
第三节 多维随机向量的极值的分布 …………………………250
小结 ……………………………………………………………………253
习题 ……………………………………………………………………257
第六章 大数定律和中心极限定理简介 …………………………262
第一节 大数定律 ……………………………………………………262
一、车比雪夫不等式…………………………………………………262
二、定理6.1（车比雪夫定理） ……………………………………265
三、定理6.2（贝努利定理） ………………………………………266
四、定理6.3（辛钦定理） …………………………………………266
五、强大数定律…………………………………………………………267
六、定理6.4（波雷尔定理） ………………………………………268
七、大数定律的某些应用……………………………………………268
第二节 中心极限定理 ………………………………………………270
一、定理6.5（隶莫佛—拉普拉斯定理） …………………………271
二、定理6.6（同分布的中心极限定理） …………………………275
三、定理6.7（李雅普诺夫定理） …………………………………278

习题 ……………………………………………………………281
习题答案及提示…………………………………………………283
附录 排列组合公式 ………………………………………………297
附表I 标准正态分布表 ……………………………………………299
附表II 二项分布表 …………………………………………………301
附表III 波松分布表…………………………………………………303
参考书目 ……………………………………………………………314

第一章　随机事件与概率

第一节　随　机　事　件

一、随机现象

在自然界、在生产实践和科学试验中，人们观察到的现象可以分为两类：

1.非随机现象　在一定条件下必然发生某一结果的现象，叫非随机现象。例如，已经算出2035年9月2日北京日全蚀；在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾；把10V的直流电压加到2Ω的电阻的两端，必然会产生$I=10\div2=5A$的电流，都是非随机现象。

早期的科学，如经典力学、经典物理学等，都是研究非随机现象的规律性的，所用到的数学工具有数学分析、几何、代数以及微分方程等。

2.随机现象　在一定条件下可能发生种种不同结果的现象，叫随机现象，通常也叫偶然现象。例如，北京明年7月5日的天气可能晴，可能阴，也可能有雨；同一射手，几次打靶的成绩，可能不同；某电厂的一号发电机，在正常运行条件下，未来的某日，可能发生故障，也可能不发生故障等，都是随机现象。

在表面上看起来是随机的现象是否有规律可循呢？这正如恩格斯说过的："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律"。（见《马克思恩格斯选集》第四卷，第243页，1972年版）概率统计理论就是研究随机（偶然）现象的规律性的一门学科，它的任务在于从表面上看起来错综复杂的偶然现象中找出事物内在的统计规律。这就需要对含有大量个体的研究对象进行试验观察，找出某一随机现象发生的可能性，为此，我们将通过随

机试验来研究随机现象。

二、随机试验

为了方便起见，我们把各种科学实验和对某一事物的观察统称为试验。若一试验具有以下特点：

1）可以在相同条件下重复进行；

2）每次试验的可能结果不只一个，并且能事先明确试验的所有可能的结果；

3）试验结束之前不能断定哪一个结果会发生。

就称这种试验为随机试验。我们用E，E_1，E_2，……来表示随机试验。以后，一般把随机试验简称试验。

例如下列各试验都是随机试验：

E_1：　掷一颗骰子，观察出现的点数。

E_2：　同时掷两枚硬币，观察出现正反面的情况。

E_3：　记录某段220kV高压输电线上在七、八两个月内的落雷次数n。

E_4：　记录某电厂一昼夜的最高负荷量P_M。

E_5：　观察某台设备在星期一是否发生故障。

E_6：　观察某灯泡厂生产的某种型号的灯泡的寿命。

为了清楚起见，我们以一个具体的随机试验E_3为主来说明下面几个重要概念，然后反过来用这些概念分析一两个另外的随机试验的例子。

三、样本点和样本空间

进行试验的目的在于研究试验结果出现的规律。

对于一个试验，一般每次试验可能出现的结果不只一个。例如对于E_3，即记录某段220kV高压输电线上在七、八两个月的落雷次数，记录的结果可能是“0”，“1”，“2”，……，等等。

对于一个试验E，一个可能的直接试验结果（在一定条件下不能再分解的结果），称为该试验的一个样本点。以后用ω或者ω_0，ω_1，ω_2，……，表示样本点。

对于E_3来说，0，1，2，……，等等都是它的样本点，如果用ω_i表示记录结果“i”（$i=0$，1，2，……），则它的样本点也可以记作ω_0，ω_1，ω_2，……。

由于样本点的出现是随机的，故有时把样本点也称为随机点。

对于一个试验E，它所有的样本点组成的集合称为它的样本空间。以后用Ω或者Ω_0，Ω_1，Ω_2，……表示样本空间。

对于E_3，它的样本空间是

$$\Omega=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\}$$

其中$\{0, 1, 2, \cdots\cdots\}$表示用0，1，2，……组成的集合。如果用$\omega_i$表示“$i$”，那么它的样本空间也可以表示为

$$\Omega=\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\cdots\}\text{或}\Omega=\{\omega_i;\ i=0,1,2,\cdots\cdots\}$$

综合上述，一个试验E的一个可能的试验结果是它的一个样本点ω，它的所有的样本点组成的集合是它的样本空间Ω，样本点ω是样本空间Ω的元素（即成员），记作$\omega\in\Omega$。

一个试验E的样本点ω和样本空间Ω的含义和关系可以通俗地比喻如下：如果把样本点ω看成是一个试验的“原材料”，那么它的样本空间Ω可以看成是储存所有“原材料”的大仓库。

对于一个随机试验，首要的是弄清它的样本点有哪些？以及怎样表示它的样本空间？

例1 写出上面所列的试验E_1，E_2，E_4，E_5和E_6的样本空间。

解 对于试验E_1，共有六个样本点，它们是：“1点”，“2点”，……，“6点”，样本空间记作Ω_1。

$$\Omega_1=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

对于试验E_2，共有四个样本点，它们是：“正，正”，“正，反”，“反，正”，“反，反”，如果用ω_1表示“正，正”，ω_2表示“正，反”，ω_3表示“反，正”，ω_4表示“反，反”，样本空间记作Ω_2，则

$$\Omega_2=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$$

对于试验E_4，样本点是区间$[0, P_0]$中的任何数ω，其中P_0表示该电厂的最大发送功率，于是它的样本空间是

$$\Omega_4=\{\omega;\ 0\leqslant\omega\leqslant P_0\}\text{或}\Omega_4=[0, P_0]$$

类似地，试验E_5的样本空间可以表示为

$$\Omega_5=\{\omega_1,\ \omega_2\}$$

其中ω_1表示“正常”，ω_2表示“故障”。试验E_6的样本空间可以表示为

$$\Omega_6=\{\omega;\ \omega\geqslant 0\}\text{或}\Omega_6=[0, +\infty)$$

四、基本事件和随机事件

对于一个随机试验E，出现一个确定的样本点ω称为该试验的一个基本事件，记作$\{\omega\}$。在一次试验中，当且仅当样本点ω出现时才称基本事件$\{\omega\}$在这一次试验中发生了。

由此可见，一个样本点ω对应于一个基本事件$\{\omega\}$，而$\{\omega\}$是只包含样本点ω的集合。

对于试验E_3，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，……，都是它的基本事件，而$\{i\}$表示基本事件“七，八月份落雷i次”（$i=0$，1，2，……）。

对于一个试验，在一次试验中可能发生也可能不发生的事情，称为该试验的随机事件，简称事件。以后用A, B, C，……表示随机事件。

对于试验E_3，如果用A表示“记录的落雷次数不超过10”，那么A是E_3的一个随机事件。由于在一次观察中，当且仅当记录的结果是0，1，2，……，10中任一个样本点时才称事件A发生了，故将事件A表示为$A=\{0, 1, 2, \cdots\cdots, 10\}$。同样地，若$B$表示事件“记录的雷落次数大于5”，那么$B=\{6, 7, 8, \cdots\cdots\}$也是$E_3$的一个随机事件。若$C$表示事件“记录的落雷次数大于等于8而不超过15”，则$C=\{8, 9, 10, \cdots\cdots, 15\}$。若$D$表示事件“记录的落雷次数为奇数”，则$D=\{1, 3, 5, \cdots\cdots\}$。

由此可见，一个试验E的随机事件是由该试验的一些样本点