

陈月明 主编

高等学校教学用书

石油大学(北京) 数值模拟基础

石油大学出版社

高等学校教学用书

油藏数值模拟基础

陈月明 主编

石油大学出版社

内 容 简 介

本书为石油院校油藏工程专业本科生的必修课教材，采油工程专业本科生的选修课教材。全书共分七章，第一章油藏模拟简介，第二章基本数学模型，第三章差分方程的建立，第四章差分方程组的数值解法，第五章单相流数值模拟方法，第六章两相流数值模拟方法，第七章参数准备和模型选择。最后附有教学用的两个示范程序。

本书可供油田有关技术人员使用或用作继续工程教育培训教材。

油藏数值模拟基础

陈月明 主编

*

石油大学出版社出版
山东省新华书店发行
石油大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张9.75 字数243千字

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

印数1—4000册

ISBN7-5636-0026-4/TE·10

定价：2.03元

前 言

近二十多年来, 由于计算机、应用数学和油藏工程学科不断发展, 油藏数值模拟方法得到不断的改进和广泛应用, 目前已成为油田开发方案设计、调整的不可缺少的工具, 同时也为各种提高采收率措施的应用提供了有力的手段。八十年代以来, 油藏数值模拟在我国迅速开展起来, 与世界先进国家相比, 其差距也越来越小, 并在某些方面已经赶上甚至超过世界先进水平。石油院校为油藏工程和采油工程专业的学生开设了油藏数值模拟课程, 编写了相应的讲义, 并在教学实践中积累了丰富的经验。为了集思广益, 吸收各院校讲义的优点, 经油藏工程和采油工程学科组讨论决定联合编写本教材, 供各院校教学中共同使用。

油藏数值模拟是一门工程应用学科, 它立足于流体在多孔介质中的渗流理论, 数学物理方程和计算方法的应用; 同时, 应用时多以工程软件的形式出现, 应用的效果如何还取决于油藏工程技术人员的实际经验。本教材不可能进行工程软件的编制和应用, 主要讲述油藏数值模拟的基本原理, 包括油藏渗流的数学模型、差分方程的建立、差分方程组的数值解法、单相流和两相流数值模拟方法、参数准备和模型选择, 使学生能掌握数值模拟的基本内容, 学会编制简单的数值模拟程序, 并能知道在油藏应用时所应选择的模型和收集的资料。因此本教材定名为油藏数值模拟基础。

本教材共分七章, 第一、五章由石油大学陈月明编写, 第二、三章由大庆石油学院张子香编写, 第四、七章由江汉石油学院蔡尔范编写, 第六章由西南石油学院赵立彦编写。另外, 西南石油学院杨继盛和新疆石油学院张祯贵自始至终参加了教材大纲和教材初稿的讨论和修改。西南石油学院李允、方娟, 西安石油学院薛中天参加了教材大纲的讨论, 大庆石油学院王国娟参加了教材的修改。石油大学北京研究生部研究生崔焕文、程林松协助完成教学示范程序。

由于本教材由各院校编写, 因此在文字叙述、名词解释、符号等方面不完全统一, 虽经反复修改, 尚有不完善之处, 希广大读者提出宝贵意见。另外, 各院校在教学过程中可根据具体情况予以适当取舍和补充。

全书由石油大学陈月明副教授主编, 郎兆新教授主审。

编 者

1988年11月

目 录

第一章 油藏模拟简介	1
第一节 油藏模拟在油田开发中的作用.....	1
第二节 油藏数值模拟的主要内容及步骤.....	3
第三节 油藏数值模拟发展概况.....	4
思考题.....	5
第二章 基本数学模型	6
第一节 数学模型分类.....	6
第二节 建立数学模型的步骤.....	7
第三节 单相流的数学模型.....	9
第四节 两相流的数学模型.....	13
第五节 数学模型的一般式.....	16
第六节 多组分模型.....	17
第七节 黑油模型.....	20
第八节 定解条件.....	22
习题.....	24
第三章 差分方程的建立	25
第一节 离散化的概念.....	25
第二节 有限差分法.....	26
第三节 差分方程的建立.....	29
第四节 差分格式的稳定性分析.....	35
第五节 边界条件的处理.....	37
习题.....	38
第四章 差分方程组的数值解法	39
第一节 三对角矩阵方程组的解法.....	39
第二节 五对角矩阵方程组的直接解法.....	42
第三节 五对角矩阵方程组的迭代解法.....	54
第四节 交替方向隐式迭代法.....	60
第五节 强隐式方法.....	67
第六节 迭代法和直接解法的比较.....	81
习题.....	82
第五章 单相流数值模拟方法	84
第一节 一维径向单相流的数值模拟方法.....	84
第二节 二维单相流的数值模拟方法.....	90
程序练习题.....	99

第六章 两相流数值模拟方法	101
第一节 二维两相流完整的数学模型.....	101
第二节 差分方程的建立.....	102
第三节 求解方法.....	104
第四节 边界条件及参数处理.....	112
第五节 历史拟合和动态预测.....	114
第六节 油水平面二维两相流数值模拟程序介绍.....	116
程序练习题.....	119
第七章 参数准备与模型选择	120
第一节 网格选择.....	120
第二节 关于流体性质的资料.....	121
第三节 地层参数.....	126
第四节 其它资料.....	130
第五节 模型的选择.....	131
习题.....	132
参考书目	133
附录一 一维径向单相流动数值模拟示范程序	135
附录二 油水平面二维两相流动数值模拟示范程序	141

第一章 油藏模拟简介

第一节 油藏模拟在油田开发中的作用

一、油田开发的任务及油田的复杂性

油田开发的任务就是要从油田的客观实际出发，以最少的投资，最合适速度^①去获得最高的最终采收率，也就是要获得最大的经济效益^②。

油田（其中包括若干个不同类型的油藏，油藏又包括若干个性质差异的油层）是一个很复杂的客观存在。这在石油地质、油藏物理、油气田渗流力学、采油化学、油藏工程和采油工艺原理等课程中已经进行了详细的论述，这里再简单回顾一下。

1. 油层静态描述的复杂性

为了编制比较切合实际的油田开发方案，应尽可能比较多的确切地描述油层的地下情况，一方面是宏观的情况，例如油藏构造（断层、岩性尖灭、油水关系等）、油层岩性（砂岩还是石灰岩、多重孔隙介质、油层厚度、孔隙度、渗透率、油水饱和度等情况）；另一方面是微观情况，例如孔隙结构（孔道大小分布、孔隙之间关系）、非渗透夹层分布规律。这些描述必须有多学科配合，较先进的仪器设备才能逐步完善。

2. 油层中所含流体及其与岩石作用的复杂性

油层中所含流体包括油、气、水。油、气、水的组分各不相同，差异也很大，在高温高压下，油气相态、体积系数、油气比、粘度等性质变化很大。油层中所含流体与岩石的相互作用所产生的物理化学现象更为复杂，例如毛管力、油气水的相对渗透率、扩散、吸附等，特别是各种提高采收率方法的使用，如热力采油、化学驱油和混相驱，使这些现象更加复杂化。目前还很难描述得很完整。

3. 油田开发动态描述的复杂性

油田多井同时生产（注入）时，地下油气水复杂的运动使油井产量（注入量）、油层压力、温度和油气水饱和度变化很大，因此描述上述参数的动态变化是相当复杂的，再加上各种增产措施和提高采收率方法的应用将使描述更加复杂化。

二、研究油田的主要方法

为了认识油层，以及流体在油层中的流动规律，一般采用以下两种主要方法：

1. 直接观察法

直接在油田上进行试验或取得资料，以便进行分析。例如：1) 钻观察井。这种方法可用在勘探初期或油田开发过程中，它可以直接取芯分析油层岩石性质、流体在油层中的分布。当观察井投入生产以后，从油气水产量和油井压力变化来分析流体在油层中的流动规律，即

① 最合适速度包括政治上和经济上的需要。

② 经济效益包括社会效益和企业经济效益，两者要有机地联系起来。

所谓干扰试井方法。2)井下测试。分层测试压力和油气水产量，从而分析油层性质。3)开辟生产试验区。油田开发初期或为了达到某种试验的目的（如提高采收率的措施），要在油田内部选择一个有代表性的地区进行试验。例如大庆油田的小井距进行单层注水和各种提高采收率方法的试验（关于试验情况可参考有关这方面的文章）。

这种方法的优点是：

- ①直观：可以看得见，摸得着。
- ②准确：因为它是客观存在的，避免了人为的误差。

缺点：

- ①有一定的局限性。因为钻观察井、井下测试和开辟生产试验区只能在局部地区进行。
- ②成本高，周期长。
- ③不能重复进行。

2. 模拟法

模拟就是用模型来研究物理过程。油藏模拟就是用油藏模型来研究油藏的各种物理性质和流体在其中的流动规律，以便更好地认识油层，作出正确的评价，确定合理开发方案和提高采收率的措施。

模拟可以分为两大类：物理模拟和数学模拟。

(1) 物理模拟：根据相似原理，把自然界中的原型按比例缩小，制成物理模型。然后使原型中的物理过程按一定的相似关系在模型中展现。这样人们就能通过短期的小型试验，迅速和直接地观察到油层中的渗流规律，测定所需参数，以使用来指导开发实践。物理模型又可分为定性模型和定量模型两类。定性模型只是为了了解油层中所发生的各种现象，如蒸汽驱过程中的超复现象，混相驱过程中的弥散现象等。定量模型是为了得到油田开发过程中的有关定量资料，如采油速度、注入速度、采收率等。

物理模型一般指的是同类现象，我们现在使用的天然岩芯或人造岩芯就是属于这一类模型。

(2) 数学模拟：通过求解某一物理过程的数学方程组来研究这个物理过程变化规律的方法。

通过电场和渗流场中数学方程式相似的特点，可以利用较易实现的电场规律来研究油层中渗流场的规律，称为数学模拟中电解和电网模型^①。

随着计算机的迅速发展，六十年代以后，大多数采用数值方法来求解数学方程组，这就是油藏数值模拟。

物理模拟和数学模拟简称为双模。物理模拟多用于机理研究，并为数学模拟提供必要的参数，验证数学模拟的结果，提出新的数学模型。而数学模拟可考虑多种复杂因素的实际问题，只要能取得符合实际的实验和现场数据，则能较迅速而准确地得出所需要的各种数据。双模是相辅相成的，在油田开发设计和动态分析中，是必不可少的工作。

模拟的优点是：

- ①能重复进行，可以进行所谓“多次开发”。
- ②可以在短时间内进行“开发”，成本相应比较低。
- ③可以模拟各种非均质地层的情况，因此避免了直接观察法的缺点。

① 因需物理模拟实验，故亦称物理模拟。

缺点:

①油藏模拟的基础在于油藏描述和生产动态,若油层参数和生产数据不准确,将导致模拟的误差。因此油田开发初期进行模拟的误差比较大,双模工作应随着油田开发程度的增加而不断进行。

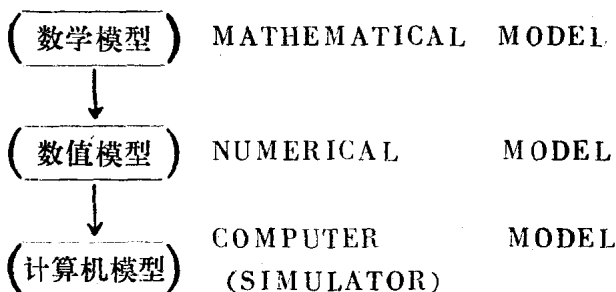
②模型本身均有一定的假设条件,因此与实际油藏有一定误差。

第二节 油藏数值模拟的主要内容及步骤

一、油藏数值模拟的主要内容

如图1-1所示,油藏数值模拟的主要内容包括以下三部分。

第一部分就是要建立数学模型,也就是要建立一套描述油藏渗流的偏微分方程组。此外,为解此方程组还要有相应的辅助方程、初始条件和边界条件。



第二部分就是建立数值模型,这需要通过三个过程,如图1-2所示。首先通过离散化将偏微分方程组转换成有限差分方程组^①,然后将其非线性

图1-1 油藏数值模拟的内容

系数项线性化,从而得到线性代数方程组,再通过线性方程组解法求得所需求的未知量(压力、饱和度、温度、组分等)的分布及变化。

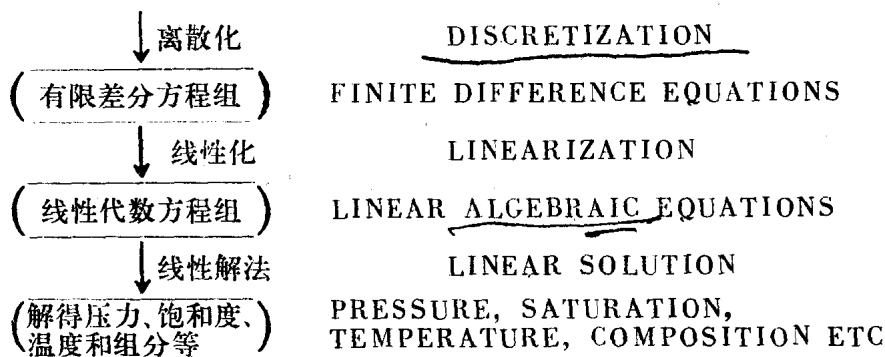


图1-2 数值模型建立过程

第三部分就是要建立计算机模型,也就是将各种数学模型的计算方法编制成计算机程序,以使用计算机进行计算得到所需要的各种结果。工业性应用的计算机模型也称计算机软件,它包括图形或数据输入和输出,各种数值解法等,可应用于各种油田实际问题。

二、油藏数值模拟的步骤

有了计算机模型之后,油藏数值模拟的步骤如图1-3所示。

① 目前油藏数值模拟中采用的离散化方法主要为有限差分法,此外也有用有限元法的。

1.选择模型：要根据油藏的实际情况和所研究的问题，选择合适的模型。因为现在计算机模型均已成为工业性应用计算机软件，因此目前已经有了各式各样的模型。

2.资料输入：包括油藏描述 (RESERVOIR DESCRIPTION) 和生产井/注入井 (PRODUCTION/INJECTION STRATEGICS) 的数据。

油藏描述资料包括地质静态描述 (油藏构造、油层厚度、孔隙度、渗透率、油层深度、原始地层压力)、流体性质资料 (压力与流体粘度、体积系数、压缩系数之间的关系) 和特殊岩芯分析资料 (饱和度与相对渗透率、毛管压力之间的关系)。

油井/生产井特征包括产量/注入量或井底流动压力等。

3.灵敏度试验：将影响油田开发指标 (产量、压力、含水、油气比等) 的地质静态资料、流体性质资料和特殊岩芯分析资料人为地

加以变化，输入计算机程序中，观察它们对开发指标的影响，从中找出其影响比较大的性质参数。对于这一类参数应尽量取全取准。

4.历史拟合：用已知的地质、流体性质和特殊岩芯分析资料和实测的生产历史 (产量或井底压力随时间变化)，输入计算机程序中，将计算结果与实际观测和测定的开发指标 (油层压力和综合含水率等) 相比较。若发现两者间有相当大的差异，则说明我们用的资料与实际油田资料差异很大，可根据灵敏度试验结果逐步修改输入数据，使计算结果与实测结果一致，这就是历史拟合。历史拟合的速度和质量不仅与计算机软件的质量有关，而且与工作人员的经验和对油田的实际情况掌握的程度有关。

5.动态预测：在历史拟合的基础上对未来的开发指标进行计算。这里往往又分为两种情况：一是根据规定的产量变化来预测地层压力和饱和度的变化；二是依据规定的井底流动压力变化来预测油气水产量、地层压力和饱和度的变化。

由于实际所要解决的问题是多种多样的，因此要根据所要解决的问题进行历史拟合和动态预测。

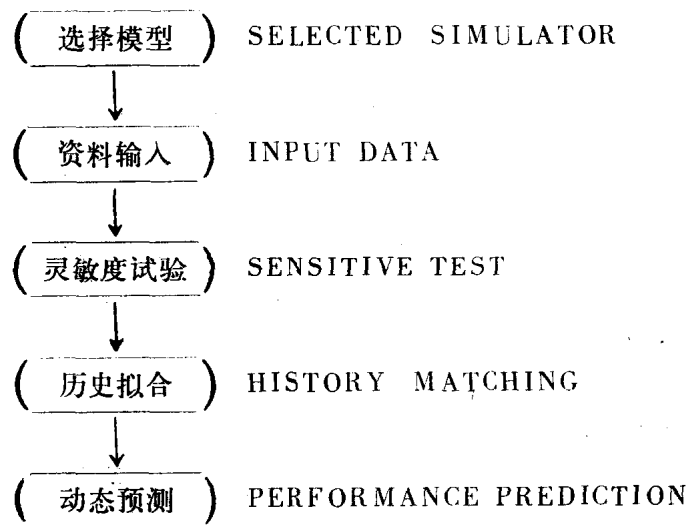


图1-3 油藏数值模拟的步骤

第三节 油藏数值模拟发展概况

1953年美国G.H.BRUCE等人发表了《孔隙介质中不稳定气体渗流的计算》后，为用数值方法计算油藏渗流问题开辟了道路。三十多年来，由于大型快速电子计算机的迅速发展，大大地促进了数值模拟方法的广泛应用。六十年代初期研究了多维多相的黑油模型；七十年代初期研究了组分模型并应用于混相和热力采油模型；七十年代末期研究各种化学驱油模型。目前，黑油、混相和热力采油模型已经投入工业性应用，并已经成为商业性软件，化学驱油模型也正日趋完善。

由于计算机模型已成为工业性应用的商业软件，因此美国各石油公司、顾问公司都在朝着“内存省、速度快、功能强、准确度高、价格便宜”的方向发展。1981年 ODEH 等人公布了三维黑油模型的考核结果；1982年 CHAPPDEAR 等人公布了三维锥进模型的考核结果；1983年 KENYCA 等人公布了注气反转凝析油藏的考核结果；1984年 AZIZ 等人公布了蒸汽驱模拟结果；1986年 KILLONGH 等人公布了混相驱模拟结果。这些比较计算，大大促进了数值模拟的进一步发展。

我国六十年代初期已经开始了数值模拟研究，1964年编制了二维两相模型，1982年我国从美国岩芯公司引进了四套软件（黑油模型、组分模型、裂缝模型和工程程序库），在此基础上又研制了多层二维两相模型，之后又引进了 CYBER 170/720 计算机，对中原、大庆、胜利、吉林、新疆等油气田进行了模拟，取得了比较好的效果。随着我国注蒸汽热力采油的开展，又引进和编制了热采数值模拟软件，在新疆、辽河和胜利等热采油田上均取得了比较好的效果。

目前我国对油藏数值模拟相当重视，除石油勘探规划研究院外，各油田正在形成一支有较好理论基础和实际技能的数值模拟队伍，为今后编制油田开发方案，进行动态分析、方案调整、驱油机理研究提供了有力的条件。

思 考 题

1. 试根据已经学过的课程（油层物理、石油地质、采油化学、油藏工程）来描述油藏静态和动态的复杂性。
2. 试分析物理模拟和数学模拟之间的关系。
3. 数学模拟的准确程度取决于什么。
4. 试述数值模拟的基本内容和步骤。

第二章 基本数学模型

油藏模拟就是用油藏模型（数学模型或物理模型）来研究实际油藏的变化过程。有关数学模拟的概念在第一章已经介绍过了，这里不再重述。本章主要介绍如何建立数学模型。

对于一个油藏来说，当有多相流体在孔隙介质内同时流动时，多相流体要受到重力、毛管力及粘滞力的作用，而且在相与相之间（特别是油相和气相之间）要发生质量交换。因此，数学模型要想很好地描述油藏中流体的流动规律，就必然要考虑上述这些力及相间的质量交换的影响，此外，建立数学模型时还应考虑油藏的非均质性及油藏的几何形状等。

用数学模型来模拟一个实际油藏流体的流动规律需要具备以下诸条件：

(1) 有描述该油层内流体流动规律的偏微分方程（或偏微分方程组），以及描述流体物理化学性质变化的状态方程。

(2) 给出定解条件。模拟稳定流时，只需要知道边界条件；而模拟非稳定流时，除了要知道边界条件外，还要知道该油藏的初始条件。

（如果我们所建立的数学模型满足条件（1）和（2），则该数学模型的解是存在的（存在性），且是唯一的（唯一性），这个解对原始数据是连续依赖的，也就是当参数或定解条件的变化很微小时，解的变化也是很微小的（稳定性）。

当一个问题的解存在、唯一且稳定时，就称该问题为适定问题，否则，就称为不适定问题。

从数学上看，只要我们所建立的数学模型满足条件（1）和（2），那么，我们所要解决的问题就是适定的。从物理上看，只要条件（1）和（2）符合实际情况，那么我们所求出的这个适定问题的解就不会是别的，而一定是我们所研究的那个实际油藏流体流动过程的“复制品”。

第一节 数学模型的分类

油藏数学模型的分类，一般有三种方法。第一种方法是按流体的相的数目划分；第二种方法是按空间维数划分；第三种方法是按模型使用功能划分。下面具体介绍每一种分类方法。

一、按流体的相的数目划分

1. 单相流模型：描述只有一相流体流动的数学模型。
2. 两相流模型：描述有两相流体流动的数学模型。
3. 三相流模型：描述有三相流体流动的数学模型。

二、按空间维数划分

1. 零维模型：描述均质岩石、均质流体性质的油藏系统，而且系统内的饱和度分布和压

力分布是连续的，油藏内任意处的压力发生变化时，整个油藏系统内的压力都随着同时发生变化的这一类数学模型。

2. 一维模型：描述油藏流体沿一个方向上发生流动，而其它两个方向上则没有任何变化的数学模型（如一维问题： X ；径向问题： R ）。

3. 二维模型：描述油藏流体沿二个方向上发生流动，而在第三个方向上没有任何变化的数学模型（如平面问题 $X-Y$ ；剖面问题 $X-Z$ 、 $R-Z$ ）。

4. 三维模型：描述油藏流体沿三个方向发生流动的数学模型（如三个方向上的问题 $X-Y-Z$ ；柱状问题 $R-\theta-Z$ ①）。

三、按模型使用功能划分

1. 气藏模型：描述天然气气藏的数学模型。有的气藏只有天然气存在，而有的气藏不仅有天然气存在还有水存在。

2. 黑油模型：描述气、油、水三相同时存在的油藏的数学模型。一般认为只有天然气可以溶于油中或从油中分离出来，油和水之间及气和水之间不发生质量交换。

3. 组分模型：描述油藏内碳氢化合物化学组分的数学模型。由过去对相的描述进而深入到对化学组分的描述，每种化学组分可以存在于油气水三相中的任意一相内，相与相之间可以存在质量交换（这种模型常用于描述凝析油藏，此时，也称之为凝析油藏模型）。

此外，在实际生产中，人们常常根据生产中所采取的某些特殊措施，或者是根据生产的某些特点来命名模型，如：化学驱模型、热力驱模型、裂缝模型等等。

在实际工作中，人们常常综合各种分类方法来命名一种数学模型，如我们在后面要提到的一维单相流数学模型等就是这样。目前，对数学模型分类还没有一个统一的标准。

第二节 建立数学模型的步骤

建立数学模型来模拟油藏内流体的渗流特性，常用到下面的物理原理：

- (1) 质量守恒原理；
- (2) 能量守恒原理；
- (3) 运动方程（达西定律）；
- (4) 状态方程。

根据以上原理，建立数学模型的步骤如下：

1. 确定所要求解的问题。在油藏渗流问题中，通常所要求解的问题是：（1）压力 P 的分布；（2）多相渗流时饱和度 S 的分布；另外，有时还要求解速度 V 的分布及其它渗流力学问题。

2. 研究上述物理量的使用条件。

我们所遇到的物理量总是受到某些实际条件的限制，因此在使用这些物理量时，要考虑到这些限制，并用适当的数学方法表达。例如在研究平面平行流和平面径向流时，就认为地层厚度与距离的比值即 h/r 很小，所以可以不考虑流体的垂向流动。又如，粘度是随压力变化的，但在温度恒定且油层压力大于饱和压力时，粘度变化很小，可以视为常数。另外，某

① 柱状问题常用于描述锥进问题，此时，也称为锥进模型。

些物理量还需要仔细加以研究。

3. 确定未知量和其它物理量之间的关系，所使用的基本方程如下：

(1) 运动方程，如达西定律，它是数学模型中必须包括的组成部分。

(2) 状态方程，当研究可压缩岩石及流体时（即弹性多孔介质及可压缩液体和气体），需要考虑状态方程。

(3) 质量守恒方程，又称连续性方程。它是建立综合渗流数学模型所必须的方程。通过它将描述各方面物理现象的分散微分方程统一起来，起着把各种物理力学现象联系起来的作用。

(4) 能量守恒方程。只有当研究非等温渗流时才需用。

(5) 辅助方程。用来确定数学模型中的某些未知的参数或物理量。

以上方程之间的关系用框图表示，见图2-1。

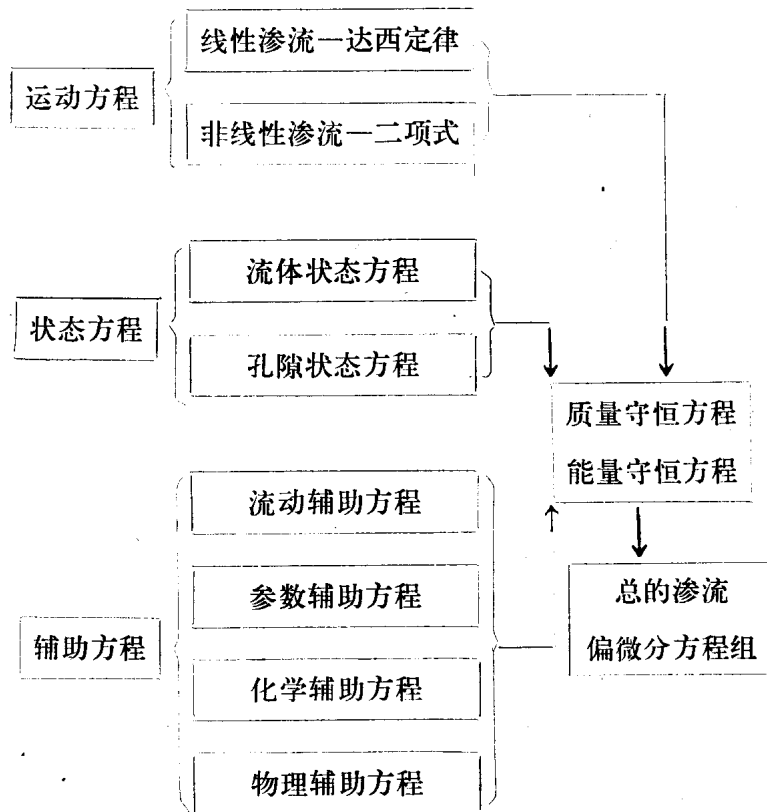


图2-1 数学模型中各基本物理方程之间的关系

4. 根据物理条件写出定解条件。所建立的偏微分方程（偏微分方程组）是对同类物理现象所做的一般定性的描述，也就是描述同类现象各物理量之间的相互关系，任何一个偏微分方程（或偏微分方程组）可能有无数个解，每个解代表这类现象中的一个特殊情况，因此要对一个具体特殊问题求解，除了这个偏微分方程（或偏微分方程组）外，还需要定解条件。

定解条件包括：

- (1) 发生该物理现象的区域的几何形态；
- (2) 影响这个物理现象的物理参数和系数；
- (3) 描述所研究系统初始状态的初始条件；
- (4) 该区域的边界条件。

完整的数学模型必须包括偏微分方程和它的定解条件。

5. 根据量纲分析原则检查所建立的方程量纲是否一致。量纲一致是方程式正确的必要条件。
6. 根据所建立的方程中各个物理量的大小，检查数学模型的适用范围。
7. 研究所建立的数学模型的适定问题。

第三节 单相流的数学模型

在这一节里，我们主要研究根据质量守恒原理、达西定律及状态方程，推导出三维情况下单相流体在孔隙介质内流动的基本微分方程。对单相流体，我们将分别推导出可压缩流体及微可压缩流体的数学模型。

一、三维单相可压缩流体的数学模型

首先，在地层中取一个三维的微小体积单元，如图2-2所示。单元体的长为 Δx ，宽为 Δy ，高为 Δz ，假设该单元体为均质的，考虑岩石是可压缩的，流体也是可压缩的。

流体的流动方向分别为从单元体的左面流入，右面流出；前面流入，后面流出；底面流入，顶面流出。如图2-2箭头所示。

从图2-2可以看出，如果流体在 x 、 y 、 z 三个方向上的分速度分别是 V_x 、 V_y 、 V_z ，并设流体密度为 ρ ，则在 Δt 时间内流体在 x 、 y 、 z 三个方向上流入和流出的质量流量就可确定。

先考虑 x 方向上，在 Δt 时间内流入单元体的质量流量为：

$$(\rho V_x)|_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Δt 时间内，流出单元体的质量流量是

$$(\rho V_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t$$

于是，沿 x 方向上， Δt 时间内流入、流出单元体的质量流量差为：

$$\begin{aligned} & (\rho V_x)|_x \Delta y \Delta z \Delta t - (\rho V_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t \\ & = - [(\rho V_x)|_{x+\Delta x} - (\rho V_x)|_x] \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned} \quad (2-1)$$

同理，可求得沿 y 方向和沿 z 方向上， Δt 时间内流入、流出单元体的质量流量差分别为：

$$- [(\rho V_y)|_{y+\Delta y} - (\rho V_y)|_y] \Delta x \Delta z \Delta t \quad (2-2)$$

$$- [(\rho V_z)|_{z+\Delta z} - (\rho V_z)|_z] \Delta y \Delta x \Delta t \quad (2-3)$$

在 Δt 时间内，流体在单元体内的累积质量增量为：

$$\begin{aligned} & (\rho \phi \Delta x \Delta y \Delta z)|_{t+\Delta t} - (\rho \phi \Delta x \Delta y \Delta z)|_t \\ & = [(\rho \phi)|_{t+\Delta t} - (\rho \phi)|_t] \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2-4)$$

式中 ϕ 为岩石孔隙度。

根据质量守恒原理可知，在 Δt 时间内，单元体内的累积质量增量应等于在 Δt 时间内沿

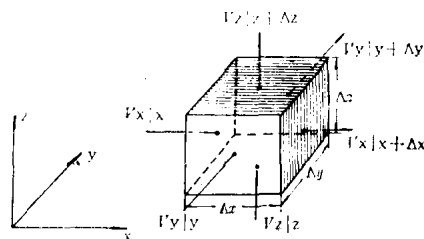


图2-2 三维单元体

沿x方向
质量流量差
Vx 质量流量
沿x方向
质量流量差
(2-1)

x、y、z三个方向上流入、流出单元体质量流量差之和，于是可得：

$$\begin{aligned} & - [(\rho V_x)|_{x+\Delta x} - (\rho V_x)|_x] \Delta y \Delta z \Delta t - [(\rho V_y)|_{y+\Delta y} \\ & - (\rho V_y)|_y] \Delta x \Delta z \Delta t - [(\rho V_z)|_{z+\Delta z} - (\rho V_z)|_z] \Delta x \Delta y \Delta t \\ & = [(\rho \phi)|_{t+\Delta t} - (\rho \phi)|_t] \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2-5)$$

用 $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ 去除方程(2-5)的各项，得：

$$\begin{aligned} & - \frac{(\rho V_x)|_{x+\Delta x} - (\rho V_x)|_x}{\Delta x} - \frac{(\rho V_y)|_{y+\Delta y} - (\rho V_y)|_y}{\Delta y} \\ & - \frac{(\rho V_z)|_{z+\Delta z} - (\rho V_z)|_z}{\Delta z} = \frac{(\rho \phi)|_{t+\Delta t} - (\rho \phi)|_t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2-6)$$

令方程(2-6)中的 Δx 、 Δy 、 Δz 趋近于零，则(2-6)方程取极限，可得：

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) \quad (2-7)$$

方程(2-7)就是三维单相流体流动的连续性方程。

考虑重力作用下单相流体的达西定律为：

$$V_x = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (2-8a)$$

$$V_y = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \frac{\partial D}{\partial y} \right) \quad (2-8b)$$

$$V_z = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \frac{\partial D}{\partial z} \right) \quad (2-8c)$$

将方程(2-8)代入方程(2-7)中，得：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \frac{\partial D}{\partial y} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) \end{aligned} \quad (2-9)$$

方程(2-9)为三维单相可压缩流体的数学模型，式中 g 是重力加速度， D 是标高，是基准面垂直方向深度(海拔)。当 x 和 y 在同一水平面内时，则：

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial y} = 0$$

坐标轴 Z 和 D 是在同一平面内，所以

$$\underline{z \text{ 方向为向上时, } \frac{\partial D}{\partial z} = +1,}$$

$$\underline{z \text{ 方向为下时, } \frac{\partial D}{\partial z} = -1,}$$

当考虑注入(或采出)时，方程(2-9)改写成：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \frac{\partial D}{\partial y} \right) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right] + q = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \quad (2-10)$$

其中 q 表示注入项(或采出项), 注入为+, 采出为-, 它指的是地层条件下单位岩石体积中注入或采出流体的质量流量。

方程(2-10)用微分算子表示可写为:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho K}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla D) \right] + q = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \quad (2-11)$$

根据流体体积系数的定义:

$$\text{流体体积系数} = \frac{\text{流体在油层条件下的体积 } V_R}{\text{流体在地面条件下的体积 } V_{sc}}$$

可得:

$$B = \frac{\rho_{sc}}{\rho_R}$$

于是

$$\rho_R = \frac{\rho_{sc}}{B} \quad (2-12)$$

把方程(2-12)代入方程(2-11)可得:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{sc} K}{B \mu} (\nabla P - \rho g \nabla D) \right] + q = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{sc}}{B} \phi \right) \quad (2-13)$$

用 ρ_{sc} 去除方程(2-13)两边, 则得

$$\nabla \cdot \left[\frac{K}{B \mu} (\nabla P - \rho g \nabla D) \right] + q_v = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (2-14)$$

其中 $q_v = \frac{q}{\rho_{sc}}$ 表示地面条件下, 单位岩石体积中注入或采出流体的体积流量。

二、三维单相微可压缩流体的数学模型

在(2-10)方程中, 一般情况下, ρ 是压力的函数 $\rho = f(P)$, 若不考虑岩石的可压缩性, 则(2-10)方程的右端项为:

$$- \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

流体的压缩系数

$$C = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T$$

所以

$$- \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) = \phi \rho C \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2-15)$$

(2-10)方程左端第一项, 根据复合函数求导

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned}$$