高等学校试用教材

数学物理方法

梁昆淼编

高等教育出版社

51.61

高等学校试用教材

数学物理方法

（第二版）

梁昆淼 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书于1960年出第一版，现经修订出第二版。全书包括复变函数论、傅里叶级数和积分、数学物理方程三个部分，而以数学物理方程为中心内容。第二版对章节进行了调整，增加了涉及物理学许多领域的例题。各章都配置了习题，附录的篇幅也有较多的增补。本书可作为综合大学、高等师范院校物理类各专业数学物理方法课程的教材，也可供高等工科院校有关专业选用。

（京）112号

高等学校试用教材

数学物理方法

梁昆淼 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市顺新印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张19.375 字数486 000

1960年6月第1版 1978年7月第2版

1994年4月第18次印刷

印数330 502—335 009

ISBN 7—04—001326—6/O·476

定价 8.60元

目　录

第三篇　数学物理方程

第二版序言

这一版，文字全部重新写过。“复变函数论”的篇幅略有减少。“傅里叶展开”分为“傅里叶级数”和“傅里叶积分”两章。“数学物理方程”的“行波法”一章只保留了一维波动的达朗伯公式和端点的反射，其余改用分离变数法处理。“分离变数法概要”一章分为“分离变数(傅里叶级数)法”和“分离变数(傅里叶积分)法”两章。

第三篇数学物理方程是全书中心，其中似以定解问题的提出(第八章)、分离变数法以及紧密相关的常微分方程级数解法、球函数和柱函数(第十章——第十四章)为基本内容，教学中应予保证。其他求解方法可按专业要求斟酌取舍。

这一版，调整并增加了较多的例题，还配置了习题，附录的篇幅也有较多增加。为了顾及物理各专业，某些章节(例如§31和§36)的例子、例题、习题涉及的面较广，数量也多了一些，教学中可根据实际情况加以挑选。习题答案，虽经核算，由于时间匆促，仍然难免有误。

初稿写出以后，北京大学吴崇试同志、厦门大学郑建安同志、安徽大学高永椿同志、南京大学柯善哲同志提出不少宝贵意见。南京大学陈俊文同志校核了很大一部分习题答案，徐世良同志提供了一些例题。特此志谢。

编者怀着哀悼袁春及同志的巨大悲痛编写了这一版。春及同志在病重垂危之际还不忘对编者的一贯支持，叮嘱认真编好本书第二版。

梁昆淼　谨识

1978年6月

第一版序言

本书是为综合大学物理专业编写的。它包含三个部分：复变函数论、傅里叶展开和数学物理方程。

对于物理专业来说，我们认为，“数学物理方法”不宜单纯作为数学课程来进行讲授与学习。它既是数学课程，又是物理课程。在这样一门课程中，固然不应该将数学的谨严性弃置不顾，另一方面却也不宜在数学谨严上作过多的要求。虽然在复变函数、傅里叶展开和数学物理方程方面已有不少著名的优秀专门著作，我们仍然感到，在数学理论上不花费过多力量，以鲜明的思路引导读者迅速掌握这些数学工具并应用于物理问题，这样一份教材还是很需要的。本书就以此作为努力目标。

第一篇复变函数论，除基本原理外，着重谈到共轭调和函数、留数定理、拉普拉斯变换等方面的应用。

第二篇傅里叶展开是为第三篇数学物理方程的分离变数法作准备的。当然，傅里叶展开的应用并不限于分离变数法，它是分析许多物理过程的有力工具。

第三篇数学物理方程是全书的中心内容。它研究各种各样的物理过程。其第一个环节在于将物理问题“翻译”为数学问题，一般往往没有加以重视，本书加强了这一环节。其第二个环节则是求解从物理问题翻译出来的数学问题。在各种解法中，本书突出了最基本的重要方法——分离变数法，系统地讨论了各种不同情况下如何运用分离变数法。我们认为，这样有利于学生熟练地用分离变数法去解数学物理问题。特别是特殊函数与分离变数法熔为一体，从分离变数法引起特殊函数，研究了特殊函数之后又回到

分离变数法。在特殊函数的教学中，目的性比较鲜明，也有利于培养学生运用特殊函数解决问题的能力。

除了分离变数法之外，行波法、保角变换法、拉普拉斯变换法也是很重要的方法。其次，我们也介绍了由格林公式导出的解的积分公式，介绍了近似方法。

泛定方程为非齐次的情况下(强迫振动、有源的导热或扩散问题、有电荷的电场等)，我们从物理的推理引出解题的线索，也是本书特色之一。

在1958年的教育革命中，我们检查了过去的教材，并根据我们对教育革命的精神的体会，着手编写这份教材。先后在两个年级中进行教学实践，又根据实践效果再三修改补充。在编写和修改过程中，参加该项教学实践的教师与学生提出不少意见。特别是姚希贤、柯善哲同志还专门进行了几次讨论。在抄写绘图方面，1956级理论物理专门化全体同学给予了很大帮助。

编者深感限于水平，一定有很多不妥当处以及错误和缺点，非常盼望同志们的批评指正。

1959年10月1日于南京大学

在1963年的印刷前，对本书数过一次勘误。这一工作得到刘法同志的大力帮助，编者特此志谢。

1963年1月22日

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数

§1. 复数与复数运算

对于复数和复数运算，本节作一次扼要的复习。

一个复数 z 总可以表为某个实数 x 与某个纯虚数 iy 的和，

$$z=x+iy, \tag{1.1}$$

这叫作复数的**代数式**，x 和 y 则分别叫作该复数的**实部**和**虚部**，并分别记作 $\mathrm{Re}z$ 和 $\mathrm{Im}z$。

如果把 x 和 y 当作平面上的点的坐标（图 1），复数 z 就跟平面上的点一一对应起来。这个平面叫作**复数平面**，两个坐标轴分别叫作**实轴**和**虚轴**。

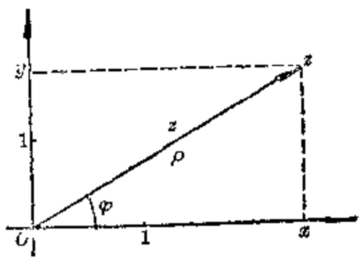

图　1

如果把 x 和 y 当作矢量的直角坐标分量（图 1），复数 z 还可以用来表示复数平面上的矢量。

改用极坐标 ρ 和 φ（图 1）代替直角坐标 x 和 y，

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}(y/x),\end{cases}\quad \begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases} \tag{1.2}$$

则复数 z 可表为**三角式**或**指数式**，即

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{1.3}$$

或

$$z=\rho e^{i\varphi}. \tag{1.4}$$

ρ 叫作该复数的**模**，记作$|z|$. φ 叫作该复数的**辐角**，记作 $\arg z$.

复数的辐角不能唯一地确定，它可以加减 2π 的整倍数。复数“零”（即实部 x 和虚部 y 都等于零的复数）的辐角没有明确意义。

一个复数 z 的**共轭复数** z^*，指的是对应的点对实轴的反映，即

$$z^*=x-iy=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\rho e^{-i\varphi}. \qquad (1.5)$$

前面只是把模为有限的复数跟复数平面上的有限远点一一对应起来，这里应该补充指出：通常把复数平面上的无限远点看作一点，并且称之为**无限远点**。关于无限远点，可以如下理解。把一个球放在复数平面上，球以南极 S 跟复数平面相切于原点。在复数平面上任取一点A，

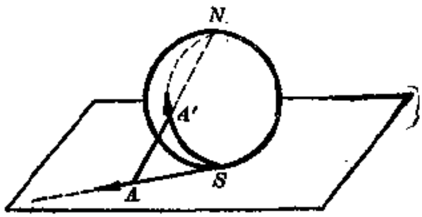

图 2

它与球的北极N的联线跟球面相交于A'. 这样，复数平面上的有限远点跟球面上N以外的点一一对应起来。这种对应关系叫作**测地投影**，这个球叫作**复数球**。设想A点沿着一根通过原点的直线向无限远移动，对应的点A'就沿着一根子午线（经线）向北极N逼近。如果A沿着另一根通过原点的直线向无限远移动，则A'沿着另一根子午线向北极N逼近。其实，不管A沿着什么样的曲线向无限远移动，A'总是相应地沿着某种曲线逼近于N. 因此，可以把平面上的无限远看作一点，即通过测地投影而跟复数球上北极N相应的那一点。我们把无限远点记作∞，它的模为无限大，它的辐角则没有明确意义。

现在再来说说复数的运算。

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**和** z_1+z_2 的定义是

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2). \tag{1.6}$$

由此明显可见加法的**交换律**和**结合律**成立。从对应的矢量来看，两个复数的和对应于两个矢量的合矢量。从而可以知道

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.7}$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**差** z_1-z_2 被定义为 z_1 与 $-z_2=-x_2-iy_2$ 的和，即

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.8}$$

从而可以知道

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|. \tag{1.9}$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**积** z_1z_2 的定义是

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.10}$$

从这个定义出发，很容易验证，乘法的**交换律**、**结合律**与**分配律**都成立。这样，定义(1.10)可以理解为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2+i^2y_1y_2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**商** z_1/z_2 的定义是

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.11}$$

从这个定义出发，很容易验证，除法确是乘法的逆运算。

定义 (1.11)可以理解为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

复数的乘、除、乘方和开方等运算，采用三角式或指数式往往比代数式来得方便。例如，乘积的定义(1.10)就化为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] &(1.12)\\&=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. &(1.13)\end{aligned}$$

商的定义(1.11)就化为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \tag{1.14}$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{1.15}$$

这样，n(整数)次幂 z^n 应是

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \tag{1.16}$$

$$=\rho^n e^{in\varphi}, \tag{1.17}$$

而 n(整数)次根式$\sqrt[n]{z}$则应是

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \tag{1.18}$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{n}}. \tag{1.19}$$

我们知道，复数 z 的辐角 φ 不能唯一地确定，它可以加减 2π 的整倍数。这样，根式 $\sqrt[n]{z}$ 的辐角 φ/n 也就可以加减 $2\pi/n$ 的整倍数，从而对于给定的 z, $\sqrt[n]{z}$ 可以取 n 个不同的值。

注意区别$|z|^2$与 z^2. $|z|^2$是复数 z 的模 ρ 的平方，由 (1.12) 和(1.13)可知 $zz^*=|z|^2$; z^2 则是复数 z 的自乘，即 $zz=z^2$.

以上是关于复数与复数运算的复习。

既然复数可以用实部和虚部表出，复数的研究往往就归结为一对实数(即该复数的实部和虚部)的研究。

例如，复变数 $z=x+iy$ 逼近复常数 $z_0=x_0+iy_0$ 即

$$z\to z_0$$

的问题，完全可以归结为一对实变数 x 和 y 分别逼近实常数 x_0 和 y_0，即

$$x\to x_0, \qquad y\to y_0$$

的问题。这样，关于实变数的和、差、积、商的极限的定理，关于实变数的极限是否存在的判据，显然全都适用于复变数，不必一一细说。

习 题

1. 下列式子在复数平面上各具有怎样的意义？

(1) $|z|\leqslant 2$,　　(2) $|z-a|=|z-b|$ (a, b 为复常数),

(3) $\mathrm{Re}\,z>\frac{1}{2}$,　　(4) $|z|+\mathrm{Re}z\leqslant 1$,

(5) $\alpha<\arg z<\beta$, $a<\mathrm{Re}z<b$ (α, β, a 和 b 为实常数),

(6) $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$,　　(7) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$,

(8) $\mathrm{Re}(1/z)=2$,　　(9) $\mathrm{Re}z^2=a^2$ (a 是实常数),

(10) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

2. 把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来。

(1) i,　　(2) -1,

(3) $1+i\sqrt{3}$,　　(4) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ (α 是实常数),

(5) z^3,　　(6) e^{1+i},

(7) $(1-i)/(1+i)$.

3. 计算下列数值. (a, b, 和 φ 为实常数)

(1) $\sqrt{a+ib}$,　　(2) $\sqrt[3]{i}$,

(3) i^i,　　(4) $\sqrt[i]{i}$,

(5) $\cos 5\varphi$,　　(6) $\sin 5\varphi$,

(7) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$,

(8) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$.

§2. 复变函数

当复变数 z 在复数平面的某个区域 B 上连续变动时，如果复变数 w 的值随着 z 的值而变，我们就把 w 叫作区域 B 上的复变数 z 的函数，z 则叫作 w 的宗量，记作

$$w=f(z).$$

我们规定区域 B 是连通的，就是说并不划分为互不连通的小

块。如果区域B不包括境界上的点而只包括内点①，就叫作开区域（也简称为区域）；如果区域B既包括内点又包括境界上的点，就叫作闭区域。

这里举几个复变函数的例子。

多项式

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n \text{（}n\text{ 为正整数），} \tag{2.1}$$

有理分式

$$\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m} \text{（}m\text{ 和 }n\text{ 为正整数），} \tag{2.2}$$

根式

$$\sqrt{z-a}, \tag{2.3}$$

式中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m, a$ 是复常数。下面列举几个初等函数的定义式：

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y), \tag{2.4}$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}), \tag{2.5}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}), \tag{2.6}$$

$$\mathrm{sh}z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}), \tag{2.7}$$

$$\mathrm{ch}z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}), \tag{2.8}$$

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z, \tag{2.9}$$

$$z^s=e^{s\ln z} \text{（}s\text{ 为复数）。} \tag{2.10}$$

由定义式(2.5)和(2.6)不难看出，$\sin z$ 和 $\cos z$ 具有实周期 2π，即

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\ \cos(z+2\pi)=\cos z. \tag{2.11}$$

① 境界点和内点可如下定义：内点不仅本身属于这区域，而且有一个邻域，其中各点都属于这区域；在境界点的任意小邻域中总有区域的内点。

大家知道，在实数领域中，$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$. 把定义式(2.5)和(2.6)按照(2.4)展开为实部和虚部，就求得模

$$|\sin z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\sin^2x-\cos^2x)}, \tag{2.12}$$

$$|\cos z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2x-\sin^2x)}, \tag{2.13}$$

这样，$|\sin z|$和$|\cos z|$完全可以大于1.

由定义式(2.4)，(2.7)和(2.8)不难看出，e^z，$\mathrm{sh}z$ 和 $\mathrm{ch}z$ 具有纯虚数周期 $2\pi i$，即

$$e^{z+2\pi i}=e^z,\ \mathrm{sh}(z+2\pi i)=\mathrm{sh}z,\ \mathrm{ch}(z+2\pi i)=\mathrm{ch}z. \tag{2.14}$$

辐角 $\arg z$ 不能唯一地确定，它可以加减 2π 的整倍数. 因此，按照定义式(2.9)，对于给定的 z，对数函数 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ 有无限多个值。

在实数领域中，负数的对数没有意义。但是，按照(2.9)，当 z 为负实数时，复变函数 $\ln z$ 仍有意义，即

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\pi+i2\pi n})=\ln|z|+i(2n+1)\pi.$$

把复变函数 $f(z)$的实部和虚部分别记作 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$，

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \tag{2.15}$$

这是说，复变函数可以归结为一对二元实变函数。因此，实变函数论的许多定义、公式、定理都可以直接地移植到复变函数论中。

例如，复变函数 $f(z)$在点 $z_0=x_0+iy_0$ **连续**的定义是

$$\text{当 } z\to z_0 \text{ 时，} f(z)\to f(z_0). \tag{2.16}$$

这可以归结为一对二元实变函数 $u(x,y)$和 $v(x,y)$在点$(x_0,\ y_0)$连续，即

$$\text{当}\begin{cases}x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases}\text{时，}\quad\begin{cases}u(x,y)\to u(x_0,y_0),\\ v(x,y)\to v(x_0,y_0).\end{cases}$$

但是，复变函数论着重研究的是解析函数(关于“解析函数”一