

高等学校试用教材

数学物理方法

梁昆森 编

科学出版社

51.61

高等学校试用教材

数学物理方法

(第二版)

梁昆森 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书于1960年出第一版，后经修订出第二版。全书包括复变函数论、傅里叶级数和积分、数学物理方程三个部分，而以数学物理方程为中心内容。第二版对章节进行了调整，增加了涉及物理学许多领域的例题。各章都配置了习题，附录的篇幅也有较多的增补。本书可作为综合大学、高等师范院校物理类专业数学物理方法课程的教材，也可供高等工科院校有关专业选用。

(京) 112号

高等学校试用教材

数 学 物 理 方 法

梁昆淼 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市顺新印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张19.375 字数486 000

1960年6月第1版 1978年7月第2版

1984年4月第18次印刷

印数230 502 - 335 009

ISBN 7-04-001326-6 \odot 476

定价 8.60元

目 录

第二版序言	1
第一版序言	2

第一篇 复变函数论

第一章 复变函数	4
§ 1. 复数与复数运算[4] § 2. 复变函数[8] § 3. 多值函数[11] § 4. 导数 (微商)[14] § 5. 解析函数[18] § 6. 平面标量场[21]	
第二章 复变函数的积分	27
§ 7. 复变函数的积分[27] § 8. 科希定理[28] § 9. 科希公式[32]	
第三章 幂级数展开	36
§ 10. 复数项级数[36] § 11. 幂级数[38] § 12. 泰勒级数[43] § 13. 解析 延拓[49] § 14. 罗朗级数[51] § 15. 奇点分类[56]	
第四章 留数定理	61
§ 16. 留数定理[61] § 17. 应用留数定理计算实变函数定积分[67] § 18. 计算定积分的补充例题[77] § 19. 辐角原理[82]	
第五章 拉普拉斯变换	85
§ 20. 符号法[85] § 21. 拉普拉斯变换[86] § 22. 拉普拉斯变换的反 演[93] § 23. 运算微积应用例[101]	

第二篇 傅里叶级数和积分

第六章 傅里叶级数	103
§ 24. 周期函数的傅里叶级数[107] § 25. 奇的和偶的周期函数[118] § 26. 有限区间上的函数的傅里叶级数[123] § 27. 复数形式的傅里 叶级数[127]	
第七章 傅里叶积分	131
§ 28. 非周期函数的傅里叶积分[131] § 29. δ 函数和它的傅里叶积 分[140]	

第三篇 数学物理方程

第八章 定解问题.....	145
§ 30. 定解问题[145] § 31. 数学物理方程的导出[148] (一)均匀弦的微小横振动[149] (二)均匀杆的纵振动[153] (三)电报方程[154] (四)均匀薄膜的微小横振动[156] (五)流体力学与声学方程[157] (六)电磁波方程[159] (七)扩散方程[160] (八)热传导方程[163] (九)稳定浓度分布[163] (十)稳定温度分布[164] (十一)静电场[164] (十二)无旋稳恒电流场[165] (十三)流体的无旋稳恒流动[165] (十四)杆的微小横振动[166] (十五)量子力学的薛定谔方程[168] § 32. 定解条件[170] (一)初始条件[170] (二)边界条件[172] (三)衔接条件[177]	
§ 33. 二阶线性偏微分方程的分类[179] (一)两个自变数的方程分类[180] (二)多自变数的方程分类[184] (三)常系数线性方程[186]	
第九章 行波法.....	189
§ 34. 行波法[189] (一)达朗伯公式·行波[189] (二)端点的反射[193] (三)跃变点的反射[196]	
第十章 分离变数(傅里叶级数)法.....	200
§ 35. 分离变数法介绍[200] (一)分离变数法[200] (二)傅里叶级数法[205] (三)非齐次边界条件的处理[207] § 36. 齐次的泛定方程[210]	
§ 37. 非齐次的泛定方程 [232] (一)冲量定理法[233] (二)格林函数法[240] (三)傅里叶级数法[245] (四)泊松方程[247]	
第十一章 分离变数(傅里叶积分)法.....	253
§ 38. 齐次的泛定方程[253] § 39. 非齐次的泛定方程[268]	
第十二章 二阶常微分方程级数解法 本征值问题.....	283
§ 40. 特殊函数常微分方程[283] (一)拉普拉斯方程[283] (二)波动方程[288] (三)输运方程[289] (四)亥姆霍兹方程[290] (五)矢量的波动方程[293] § 41. 常点邻域上的级数解法[296] § 42. 正则奇点邻域上的级数解法[304] § 43. 斯特姆-刘维本征值问题[324]	
第十三章 球函数.....	331
§ 44. 轴对称球函数[331] (一)勒让德多项式 [331] (二)勒让德多项式的正交关系[334] (三)勒让德多项式的模[335] (四)广义傅里叶级数	

[336](五)母函数与递推公式[336](六)例题[338] § 45. 一般的球函数[345] (一)缩合勒让德函数[345] (二)球函数[351](三)加法公式[353](四)例题[356]

第十四章 柱函数.....364

§ 46. 贝塞耳函数[365] (一)递推公式[365](二)本征值[366](三)贝塞耳函数的正交关系[369] (四)贝塞耳函数的模[369] (五)傅里叶-贝塞耳级数[370] (六)母函数, 积分表示与加法公式[371] (七)虚宗量贝塞耳函数[373] (八)例题[374] § 47. 球贝塞耳方程[387] § 48. 路积分表示式与渐近公式[396] (一)索末菲积分[396] (二)渐近公式[401] (三)发散波和收敛波[404] (四)虚宗量汉克函数[407](五)平面波展开为球面波的叠加[409] § 49. 开耳芬函数及其他[411]

第十五章 数学物理方程的解的积分公式.....414

§ 50. 格林公式应用于拉普拉斯方程和泊松方程[414] § 51. 推广的格林公式及其应用[424] (一)椭圆型方程[425] (二)抛物型方程[428] (三)双曲型方程[431]

第十六章 拉普拉斯变换法.....435

§ 52. 拉普拉斯变换法[435]

第十七章 保角变换法.....441

§ 53. 保角变换的基本性质[441] § 54. 某些常用的保角变换[446] (一)线性变换[446] (二)幂函数和根式[447] (三)指数函数和对数函数[450] (四)分式线性变换[453] (五)儒阔夫斯基变换[462] (六)施瓦兹-克利斯多非变换[467] § 55. 三维空间中的保角变换[478] (一)应用于锥形区域的保角变换[478] (二)逆矢径变换[481]

第十八章 近似方法简介.....485

§ 56. 作为近似方法的变分法[486] § 57. 模拟法[488] § 58. 有限差分法[489]

附 录

- 一 拉普拉斯变换函数表.....496
- 二 三角函数的正交关系.....498
- 三 正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 的收敛性.....499

四	瓦耳希函数	500
五	变分法初步	504
	(一) 泛函[504](二)变分问题[505](三)瑞利-里兹方法[505](四)欧勒方程[506](五)附加条件下的变分问题[510]	
六	正交曲线坐标系中的拉普拉斯算符	511
	(一) 拉普拉斯算符作用于标量函数[511](二)拉普拉斯算符作用于矢量函数[515]	
七	几个定积分公式	517
八	高斯函数和误差函数	521
九	欧勒型常微分方程	522
十	勒让德方程的级数解(41.7)和(41.8)在 $x = \pm 1$ 发散	523
	(一) 用高斯判别法证明级数发散[524](二)直接证明级数发散[525]	
	(三)勒让德方程的解不可能在 $x = +1$ 和 $x = -1$ 有限[527]	
十一	朗斯基行列式	528
十二	勒让德多项式	530
十三	缔合勒让德函数	532
十四	贝塞耳函数	533
十五	诺埃曼函数	535
十六	虚宗量汉克函数	530
十七	厄密多项式	539
十八	拉盖尔多项式	542
十九	车贝雪夫多项式	544
二十	开耳芬方程	548
二十一	拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的分离变数	549
二十二	其他正交曲线坐标	550
	(一) 抛物柱坐标 ξ, η, z [550](二)椭圆柱坐标 ξ, θ, z [550](三)旋转抛物面坐标 ξ, η, φ [550](四)长的旋转轴球坐标 ξ, θ, φ [551](五)扁的旋转轴球坐标 ξ, θ, φ [551](六)椭球坐标 ξ, η, ζ [551](七)双极坐标 ξ, θ, z [552](八)双球坐标 ξ, θ, φ [552](九)圆环坐标 ξ, θ, φ [553]	
二十三	$x + htgx = 0$ 的前六个根	553
二十四	Γ 函数(第二类欧勒积分)	554
	习题答案	562
	人名对照表	593

第二版序言

这一版,文字全部重新写过。“复变函数论”的篇幅略有减少。“傅里叶展开”分为“傅里叶级数”和“傅里叶积分”两章。“数学物理方程”的“行波法”一章只保留了一维波动的达朗伯公式和端点的反射,其余改用分离变数法处理。“分离变数法概要”一章分为“分离变数(傅里叶级数)法”和“分离变数(傅里叶积分)法”两章。

第三篇数学物理方程是全书中心,其中似以定解问题的提出(第八章)、分离变数法以及紧密相关的常微分方程级数解法、球函数和柱函数(第十章——第十四章)为基本内容,教学中应予保证。其他求解方法可按专业要求斟酌取舍。

这一版,调整并增加了较多的例题,还配置了习题,附录的篇幅也有较多增加。为了顾及物理各专业,某些章节(例如§31和§36)的例子、例题、习题涉及的面较广,数量也多了一些,教学中可根据实际情况加以挑选。习题答案,虽经核算,由于时间匆促,仍然难免有误。

初稿写出以后,北京大学吴崇试同志、厦门大学郑建安同志、安徽大学高永椿同志、南京大学柯善哲同志提出不少宝贵意见。南京大学陈俊文同志校核了很大一部分习题答案,徐世良同志提供了一些例题。特此致谢。

编者怀着哀悼袁春及同志的巨大悲痛编写了这一版。春及同志在病重垂危之际还不忘对编者的一贯支持,叮嘱认真编好本书第二版。

梁昆森 谨识

1978年6月

第一版序言

本书是为综合大学物理专业编写的。它包含三个部分：复变函数论、傅里叶展开和数学物理方程。

对于物理专业来说，我们认为，“数学物理方法”不宜单纯作为数学课程来进行讲授与学习。它既是数学课程，又是物理课程。在这样一门课程中，固然不应该将数学的严谨性弃置不顾，另一方面却也不宜在数学严谨上作过多的要求。虽然在复变函数、傅里叶展开和数学物理方程方面已有不少著名的优秀专门著作，我们仍然感到，在数学理论上不花费过多力量，以鲜明的思路引导读者迅速掌握这些数学工具并应用于物理问题，这样一份教材还是很需要的。本书就以此作为努力目标。

第一篇复变函数论，除基本原理外，着重谈到共轭调和函数、留数定理、拉普拉斯变换等方面的应用。

第二篇傅里叶展开是为第三篇数学物理方程的分离变数法作准备的。当然，傅里叶展开的应用并不限于分离变数法，它是分析许多物理过程的有力工具。

第三篇数学物理方程是全书的中心内容。它研究各种各样的物理过程。其第一个环节在于将物理问题“翻译”为数学问题，一般往往没有加以重视，本书加强了这一环节。其第二个环节则是求解从物理问题翻译出来的数学问题。在各种解法中，本书突出了最基本的重要方法——分离变数法，系统地讨论了各种不同情况下如何运用分离变数法。我们认为，这样有利于学生熟练地用分离变数法去解数学物理问题。特别是特殊函数与分离变数法熔为一体，从分离变数法引起特殊函数，研究了特殊函数之后又回到

分离变数法。在特殊函数的教学中,目的性比较鲜明,也有利于培养学生运用特殊函数解决问题的能力。

除了分离变数法之外,行波法、保角变换法、拉普拉斯变换法也是很重要的方法。其次,我们也介绍了由格林公式导出的解的积分公式,介绍了近似方法。

泛定方程为非齐次的情况下(强迫振动、有源的导热或扩散问题、有电荷的电场等),我们从物理的推理引出解题的线索,也是本书特色之一。

在1958年的教育革命中,我们检查了过去的教材,并根据我们对教育革命的精神的体会,着手编写这份教材。先后在两个年级中进行教学实践,又根据实践效果再三修改补充。在编写和修改过程中,参加该项教学实践的教师与学生提出不少意见。特别是姚希贤、柯善哲同志还专门进行了几次讨论。在抄写绘图方面,1956级理论物理专门化全体同学给予了很大帮助。

编者深感限于水平,一定有很多不妥当处以及错误和缺点,非常盼望同志们的批评指正。

1959年10月1日于南京大学

在1963年的印刷前,对本书数过一次勘误。这一工作得到刘法同志的大力帮助,编者特此志谢。

1963年1月22日

第一篇 复变函数论

第一章 复变函数

§ 1. 复数与复数运算

对于复数和复数运算, 本节作一次扼要的复习。

一个复数 z 总可以表为某个实数 x 与某个纯虚数 iy 的和,

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

这叫作复数的代数式, x 和 y 则分别叫作该复数的实部和虚部, 并分别记作 $\operatorname{Re}z$ 和 $\operatorname{Im}z$ 。

如果把 x 和 y 当作平面上的点的坐标 (图 1), 复数 z 就跟平面上的点一一对应起来。这个平面叫作复数平面, 两个坐标轴分别叫作实轴和虚轴。

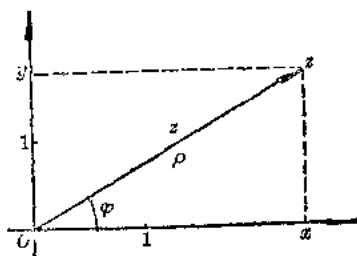


图 1

如果把 x 和 y 当作矢量的直角坐标分量 (图 1), 复数 z 还可以用来表示复数平面上的矢量。

改用极坐标 ρ 和 φ (图 1) 代替直角坐标 x 和 y ,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y/x), \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (1.2)$$

则复数 z 可表为三角式或指数式, 即

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1.3)$$

或

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (1.4)$$

ρ 叫作该复数的模, 记作 $|z|$. φ 叫作该复数的辐角, 记作 $\arg z$.

复数的辐角不能唯一地确定, 它可以加减 2π 的整数倍。复数“零” (即实部 x 和虚部 y 都等于零的复数) 的辐角没有明确意义。

一个复数 z 的共轭复数 z^* , 指的是对应的点对实轴的反映, 即

$$z^* = x - iy = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}. \quad (1.5)$$

前面只是把模为有限的复数跟复数平面上的有限远点一一对应起来, 这里应该补充指出: 通常把复数平面上的无限远点看作一点, 并且称之为无限远点。

关于无限远点, 可以如下理解。把一个球放在复数平面上, 球以南极 S 跟复数平面相切于原点。在复数平面上任取一点 A ,

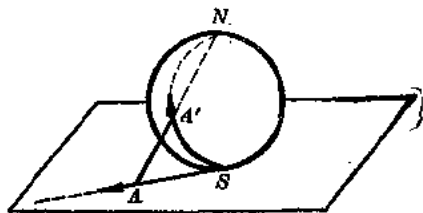


图 2

它与球的北极 N 的连线跟球面相交于 A' . 这样, 复数平面上的有限远点跟球面上 N 以外的点一一对应起来。这种对应关系叫作测地投影, 这个球叫作复数球。设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远移动, 对应的点 A' 就沿着一根子午线 (经线) 向北极 N 逼近。如果 A 沿着另一根通过原点的直线向无限远移动, 则 A' 沿着另一根子午线向北极 N 逼近。其实, 不管 A 沿着什么样的曲线向无限远移动, A' 总是相应地沿着某种曲线逼近于 N . 因此, 可以把平面上的无限远看作一点, 即通过测地投影而跟复数球上北极 N 相应的那一点。我们把无限远点记作 ∞ , 它的模为无限大, 它的辐角则没有明确意义。

现在再来说说复数的运算。

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的和 $z_1 + z_2$ 的定义是

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.6)$$

由此明显可见加法的交换律和结合律成立。从对应的矢量来看，两个复数的和对应于两个矢量的合矢量。从而可以知道

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.7)$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的差 $z_1 - z_2$ 被定义为 z_1 与 $-z_2 = -x_2 - iy_2$ 的和，即

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.8)$$

从而可以知道

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|. \quad (1.9)$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的积 $z_1 z_2$ 的定义是

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.10)$$

从这个定义出发，很容易验证，乘法的交换律、结合律与分配律都成立。这样，定义(1.10)可以理解为

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的商 z_1/z_2 的定义是

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.11)$$

从这个定义出发，很容易验证，除法确是乘法的逆运算。

定义(1.11)可以理解为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

复数的乘、除、乘方和开方等运算，采用三角式或指数式往往比代数式来得方便。例如，乘积的定义(1.10)就化为

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (1.12)$$

$$= \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (1.13)$$

商的定义(1.11)就化为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (1.14)$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (1.15)$$

这样, n (整数) 次幂 z^n 应是

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (1.16)$$

$$= \rho^n e^{in\varphi}, \quad (1.17)$$

而 n (整数) 次根式 $\sqrt[n]{z}$ 则应是

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) \quad (1.18)$$

$$= \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}}. \quad (1.19)$$

我们知道, 复数 z 的辐角 φ 不能唯一地确定, 它可以加减 2π 的整数倍。这样, 根式 $\sqrt[n]{z}$ 的辐角 φ/n 也就可以加减 $2\pi/n$ 的整数倍, 从而对于给定的 z , $\sqrt[n]{z}$ 可以取 n 个不同的值。

注意区别 $|z|^2$ 与 z^2 。 $|z|^2$ 是复数 z 的模 ρ 的平方, 由 (1.12) 和 (1.13) 可知 $zz^* = |z|^2$; z^2 则是复数 z 的自乘, 即 $zz = z^2$ 。

以上是关于复数与复数运算的复习。

既然复数可以用实部和虚部表出, 复数的研究往往就归结为一对实数 (即该复数的实部和虚部) 的研究。

例如, 复变数 $z = x + iy$ 逼近复常数 $z_0 = x_0 + iy_0$ 即

$$z \rightarrow z_0$$

的问题, 完全可以归结为一对实变数 x 和 y 分别逼近实常数 x_0 和 y_0 , 即

$$x \rightarrow x_0, \quad y \rightarrow y_0$$

的问题。这样, 关于实变数的和、差、积、商的极限的定理, 关于实变数的极限是否存在的判据, 显然全都适用于复变数, 不必一一细说。

习 题

1. 下列式子在复数平面上各具有怎样的意义？

(1) $|z| \leq 2$, (2) $|z-a| = |z-b|$ (a, b 为复常数),

(3) $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, (4) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$,

(5) $\alpha < \arg z < \beta, \alpha < \operatorname{Re} z < b$ (α, β, a 和 b 为实常数),

(6) $0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}$, (7) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$,

(8) $\operatorname{Re}(1/z) = 2$, (9) $\operatorname{Re} z^2 = a^2$ (a 是实常数),

(10) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

2. 把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来。

(1) i , (2) -1 ,

(3) $1 + i\sqrt{3}$, (4) $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ (α 是实常数),

(5) z^3 , (6) e^{1+i} ,

(7) $(1-i)/(1+i)$.

3. 计算下列数值. (a, b , 和 φ 为实常数)

(1) $\sqrt{a+i b}$, (2) $\sqrt[3]{i}$,

(3) i^i , (4) $\sqrt[4]{i}$,

(5) $\cos 5\varphi$, (6) $\sin 5\varphi$,

(7) $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi$,

(8) $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi$.

§ 2. 复变函数

当复变数 z 在复数平面的某个区域 B 上连续变动时, 如果复变数 w 的值随着 z 的值而变, 我们就把 w 叫作区域 B 上的复变数 z 的函数, z 则叫作 w 的宗量, 记作

$$w = f(z).$$

我们规定区域 B 是连通的, 就是说并不划分为互不连通的小

块。如果区域 B 不包括边界上的点而只包括内点^①，就叫作开区域(也简称为区域)；如果区域 B 既包括内点又包括边界上的点，就叫作闭区域。

这里举几个复变函数的例子。

多项式

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (n \text{ 为正整数}), \quad (2.1)$$

有理分式

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为正整数}), \quad (2.2)$$

根式

$$\sqrt{z-a}, \quad (2.3)$$

式中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, a$ 是复常数。下面列举几个初等函数的定义式：

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (2.4)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad (2.5)$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad (2.6)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \quad (2.7)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad (2.8)$$

$$\ln z = \ln(|z| e^{i \arg z}) = \ln|z| + i \arg z, \quad (2.9)$$

$$z^s = e^{s \ln z} \quad (s \text{ 为复数}). \quad (2.10)$$

由定义式(2.5)和(2.6)不难看出， $\sin z$ 和 $\cos z$ 具有实周期 2π ，即

$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z. \quad (2.11)$$

^① 境界点和内点可如下定义：内点不仅本身属于这区域，而且有一个邻域，其中各点都属于这区域；在境界点的任意小邻域中总有区域的内点。

大家知道,在实数领域中, $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$. 把定义式(2.5)和(2.6)按照(2.4)展开为实部和虚部,就求得模

$$|\sin z| = \frac{1}{2} \sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + 2(\sin^2 x - \cos^2 x)}, \quad (2.12)$$

$$|\cos z| = \frac{1}{2} \sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + 2(\cos^2 x - \sin^2 x)}, \quad (2.13)$$

这样, $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 完全可以大于 1.

由定义式(2.4), (2.7)和(2.8)不难看出, e^z , $\operatorname{sh} z$ 和 $\operatorname{ch} z$ 具有纯虚数周期 $2\pi i$, 即

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \operatorname{sh}(z+2\pi i) = \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(z+2\pi i) = \operatorname{ch} z. \quad (2.14)$$

辐角 $\arg z$ 不能唯一地确定, 它可以加减 2π 的整数倍. 因此, 按照定义式(2.9), 对于给定的 z , 对数函数 $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ 有无限多个值.

在实数领域中, 负数的对数没有意义. 但是, 按照(2.9), 当 z 为负实数时, 复变函数 $\ln z$ 仍有意义, 即

$$\ln z = \ln(|z| e^{i\pi+2n\pi}) = \ln |z| + i(2n+1)\pi.$$

把复变函数 $f(z)$ 的实部和虚部分别记作 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$,

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y). \quad (2.15)$$

这是说, 复变函数可以归结为一对二元实变函数. 因此, 实变函数论的许多定义、公式、定理都可以直接地移植到复变函数论中.

例如, 复变函数 $f(z)$ 在点 $z_0 = x_0 + i y_0$ 连续的定义是

$$\text{当 } z \rightarrow z_0 \text{ 时, } f(z) \rightarrow f(z_0). \quad (2.16)$$

这可以归结为一对二元实变函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续, 即

$$\text{当 } \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{cases} \text{ 时, } \begin{cases} u(x, y) \rightarrow u(x_0, y_0), \\ v(x, y) \rightarrow v(x_0, y_0). \end{cases}$$

但是, 复变函数论着重研究的是解析函数(关于“解析函数”一