高等财经院校试用教材

经济数学基础(四)

线性规划及其经济分析

中国金融出版社

经济数学基础(四)
线性规划及其经济分析

高等财经院校试用教材

经济数学基础（四）

线性规划及其经济分析

中央财政金融学院
湖南财经学院《经济数学基础》编写组编

中国金融出版社

责任编辑：邓瑞锁

线性规划及其经济分析

中央财政金融学院
湖南财经学院 《经济数学基础》编写组编

*

中国金融出版社 出版

新华书店北京发行所发行

华光印刷厂 印 刷

*

850×1168毫米 1/32 8印张 191千字

1989年4月第一版 1989年4月第一次印刷

印数：1—10500册

ISBN 7-5049-382-5/F·032 定价：1.80元

编 审 说 明

这本教材是为高等财经院校教学需要而编写的，也可作为培训财政、金融干部的教材，还可供有志于学习经济数学的经济工作人员自学之用。

《经济数学基础》一书，共分为四册：第一册《微积分》；第二册《线性代数》；第三册《概率统计》；第四册《线性规划及其经济分析》。全书由中央财政金融学院李宝光教授任主编，西南财经大学倪训芳副教授任副主编，参加编写组的有：中央财政金融学院、西南财经大学、陕西财经学院和湖南财经学院部分老师。现在出版的是第四册《线性规划及其经济分析》。线性规划是运筹学中理论最为成熟，应用最为广泛的一个分支，是20世纪中期最重要的科学成果之一，是高等财经院校学生必修的基础课程。本教材的主要内容包括：线性规划的基本概念和基本模型；线性规划解的基本性质及其几何意义；解线性规划的单纯形算法和对偶单纯形算法；线性规划的对偶理论及其经济解释；特殊的线性规划问题和线性规划在经济中的应用。其特点，一是将现代数学方法与经济学科有机地联系起来，对线性规划的经济解释比较详尽且着重介绍了线性规划在经济中的应用；二是推解了线性规划用于经济活动实践的案例，供读者在应用中参考；三是对常用算法提供了框图和程序，给使用本书的读者带来方便。

本书由中央财政金融学院李宝光教授主编，第一、二、三章由湖南财经学院李庆高副教授编写；第四、六章由中央财政金融学院曹克明副教授编写；第五章由湖南财经学院李伯经副教授编写，框图和程序由湖南财经学院邵燕华讲师和陈建华研究生提供，最后，由李伯经副教授总纂全书。

现经我们审阅，可作为高等财经院校试用教材出版．读者对本书的意见和建议，请函中国人民银行教育司教材编审室，以便再版时修正．

中国人民银行教材编审委员会
一九八八年二月十日

序　　言

线性规划是一门应用极其广泛的学科．虽然早在1933年，苏联数学家康脱洛维奇П.в.конторович已经从生产组织和计划中引出一类线性规划问题，并且给出一个解法，但是由于缺乏进一步的应用，并没有引起人们足够的重视．直到第二次世界大战期间，在战争中，为了解决如何能比较快地作出有关后勤、调度、训练等方面的计划，使用了线性规划方法．尔后G.B.Dantzig于1947年提出了线性规划模型，并且给出了一个解线性规划的单纯形方法，从此，线性规划开始引起人们的重视．

1949年，T.C.Koopmans等人组织了第一个关于线性规划的会议．这个会议上的论文后来被收集到T.C.Koopmans编的《生产与分配的分析与活动》一书中．1953年，Acharnes等人写了第一本线性规划的教科书，线性规划在工业、商业、政府决策部门的应用也逐步开展起来．

目前，应用线性规划最多的部门是工业和商业．炼油工业用得不少，例如，如何在一定的限制条件下，找最大产油量；找油管的最好位置和最好的铺设路线等．用得比较多的，还有钢铁工业、造纸工业等．农业上的应用例子如寻找在满足一定条件下最低价格的混合饲料等．还有一些常用线性规划的问题是找费用最省的生产和销售计划，找最省的运输路线等．由于应用的广泛，现在线性规划已经成为管理科学、运筹学、财经等专业的必修课程．国外线性规划教科书大概数以百计，论文更是多得不可胜数．

这几年，国内出版的线性规划教科书也不少．但是，大部分只讲理论和方法．而本书的最大优点是紧密地结合了财经专业，联系经济活动实践，突出了案例教学，在加强基础知识教学的同时，对

学生能力的培养给予了充分的重视.全书的内容可分为三个层次:第一个层次是阐明线性规划的基础理论、基本方法及其经济解释;第二个层次是较为详尽地介绍了线性规划在经济中的应用.其内容不仅取材于常见的教材和专著,而且取材于国内经济工作者、运筹学工作者,以及编者近年来在经济活动实践中研究的成果.通过案例分析,将提供建立模型的方法和思路,这对提高解决实际问题的能力会有不少的帮助.为读者将线性规划模型与方法应用于经济活动实践提供了范例;第三个层次是编印了线性规划常用的计算方法与计算影子价格的计算程序,给读者在使用线性规划方法进行经济分析时,提供了方便.

最后,我希望本书的出版将会对我国的线性规划教学和应用起到良好的作用.

山东大学　郑汉鼎

1987年8月

目　录

第一章　线性规划问题及其数学模型

所谓线性规划问题，就是求一组满足一个线性方程组（或线性不等式组）的非负变量，使一个关于这组变量的线性函数达到最大值或最小值的问题.这类问题的数学表达式便称为线性规划问题的数学模型.

§1.1　线性规划问题的实例与数学模型

例1.1　（排工问题）某工厂利用A_1、A_2、A_3三台设备，生产B_1、B_2、B_3三种不同的产品.各种产品每生产一件所需要的加工时间（分钟），各台设备每天的生产能力（每天的工作时数），以及每件产品的单位利润如表1-1.问怎样安排生产才能使每天所获得的利润最大？

分析　假设每天生产B_1、B_2、B_3三种产品分别为x_1、x_2、x_3件，那么每天的利润（假定产品都有销路）应为

$$S=2x_1+x_2+1.5x_3.$$

又由于每台设备都不能超过它的生产能力，所以，应满足约束条件：

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3\leqslant 420; \\ 3x_1\qquad\;+2x_3\leqslant 450; \\ 2x_1+x_2+x_3\leqslant 430;\end{cases}$$

再考虑到每种产品的产量都不可能为负值，即　$x_j\geqslant 0$ $(j=1,2,3)$.

综上所述，这个排工问题可归结为：

求：x_1，

满足 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\leqslant 420; \\ 3x_1 \qquad +2x_3\leqslant 450; \\ 2x_1+x_2+x_3\leqslant 430; \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3); \end{cases}$

使得目标函数

$$S=2x_1+x_2+1.5x_3$$

的值达到最大.

表1-1

设　　备	每件产品的加工时间			每台设备的生产能力(分钟/天)
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	1	1	420
A_2	3	0	2	450
A_3	2	1	1	430
利润(元/件)	2	1	1.5	

例1.2　(运输问题) 设有两个水泥厂A_1、A_2，每年生产水泥分别为25万吨与30万吨，它们供应B_1、B_2、B_3三个工区.其需要量分别为17万吨、23万吨、15万吨，而各产地与销地之间的运价（万元/万吨）如下表:

表1-2

运价 工区 / 产地	B_1	B_2	B_3
A_1	15	16	13
A_2	12	14	17

问如何调运，才能使运费最省?

分析　假设x_{ij}表示由产地A_i运往销地B_j的运量，则各产地与各销地之间的运量可列为下表（见第 3 页表1-3）:

因为从水泥厂A_1运往各工区的水泥总数应等于A_1厂的产量，

表1-3

运量（万吨） 工区 / 产地	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	25
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	30
收量	17	23	15	55

故有

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=25,$$

同样由A_2厂运往各工区的水泥总数应等于A_2厂的产量，即

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=30,$$

另一方面，两个厂供给三个工区的水泥数应分别等于各工区的收量.因此有：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=17; \\ x_{12}+x_{22}=23; \\ x_{13}+x_{23}=15. \end{cases}$$

显然，运量不可能为负数，因此有$x_{ij}\geqslant 0$，

$(i=1,2;\ j=1,2,3)$；

综上所述，这个运输问题可归结为：

求：x_{ij}，

满足
$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=25; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=30; \\ x_{11}+x_{21}\qquad\quad =17; \\ x_{12}+x_{22}\qquad\quad =23; \\ x_{13}+x_{23}\qquad\quad =15; \\ x_{ij}\geqslant 0\,(i=1,2;\,j=1,2,3)\ ; \end{cases}$$

使得总运费

$$S=15x_{11}+16x_{12}+13x_{13}+12x_{21}+14x_{22}+17x_{23}$$

的值达到最小.

商店是商品的流通部门，必须买进售出.如果每月进货一次，那么每次进货多少是不能随意决定的.因为若进货太少，不仅造成市场供不应求，而且还会减少商店的盈利；若进货太多，不仅仓库容纳不了，而且造成商品积压，增加损耗与保管费用，同样也会减少商店的盈利.因此，对于每次的进货量，必须有一个数量的控制.

例1.3 （存货控制问题）某商店要制定某种商品第二季度的进货计划，已知该商店仓库容纳此种商品的容量不能超过600件，三月底已存货200件，以后每月初进货一次.假定各月份此种商品买进售出的单价如下表：

表1-4

月　　份	四月份	五月份	六月份
买进单价(元)	17	16.5	17
售出单价(元)	18	18	19

问各月进货，售货各多少件才能使利润最大？

为了简单起见，我们只考虑进货时受到仓库容量的限制，售货时受到存货量的限制这两个约束因素，对于货物存放在仓库内的损耗与保管费不作考虑.

分析 假设四、五、六月份的进货量分别为x_1、x_2、x_3件，售货量分别为y_1、y_2、y_3件，由于各月份的进货量要受到仓库容量的限制，所以，四月份的进货量应满足：

$$x_1 \leqslant 600-200=400;$$

即　　$x_1 \leqslant 400$；

五月份的进货量应满足：

$$x_2 \leqslant 600-(200+x_1-y_1)=400-x_1+y_1,$$

即　　$x_1+x_2-y_1 \leqslant 400$；

六月份的进货量应满足：

$$x_3 \leqslant 600-(200+x_1+x_2-y_1-y_2)=400-x_1-x_2+y_1+y_2,$$

即 $x_1+x_2+x_3-y_1-y_2\leqslant 400$.

由于售货量要受到存货量的限制，所以四月份的售货量应满足：

$$y_1\leqslant 200+x_1,$$

即 $y_1-x_1\leqslant 200$；

五月份的售货量应满足：

$$y_2\leqslant 200+x_1+x_2-y_1$$

即 $y_1+y_2-x_1-x_2\leqslant 200$；

六月份的售货量应满足：

$$y_3\leqslant 200+x_1+x_2+x_3-y_1-y_2,$$

即 $y_1+y_2+y_3-x_1-x_2-x_3\leqslant 200$.

第二季度的利润目标函数为：

$$S=18y_1+18y_2+19y_3-17x_1-16.5x_2-17x_3.$$

综上所述，这个问题可归结为：

求 x_j与y_j，

满足

$$\begin{cases} x_1\leqslant 400; \\ x_1+x_2-y_1\leqslant 400; \\ x_1+x_2+x_3-y_1-y_2\leqslant 400; \\ y_1-x_1\leqslant 200; \\ y_1+y_2-x_1-x_2\leqslant 200; \\ y_1+y_2+y_3-x_1-x_2-x_3\leqslant 200; \\ x_j\geqslant 0;\ y_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ 3); \end{cases}$$

使目标函数

$$S=18y_1+18y_2+19y_3-17x_1-16.5x_2-17x_3$$

的值达到最大.

例1.4 （资源最优配置问题）某工厂利用A、B、C三种资源生产甲、乙、丙、丁四种产品，已知每种单位产品对各种原料的消耗定额，每种产品的单位利润，以及各种原料的可供量如表1-5.

问怎样安排生产，才能使总利润最大？

表1-5

产品 消耗定额 原料	甲	乙	丙	丁	原料可供量（公斤）
A	3	2	2	1	5000
B	2	1	3	1	3500
C	1	3	2	2	4000
单位利润（元）	12	11	13	8	

分析　设甲、乙、丙、丁四种产品分别生产x_1、x_2、x_3、x_4件，则工厂的总利润应为：

$$S=12x_1+11x_2+13x_3+8x_4,$$

又因为对每种资源的消耗不能超过现有的可供量，所以必须满足约束条件：

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3+x_4\leqslant 5000;\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4\leqslant 3500;\\ x_1+3x_2+2x_3+2x_4\leqslant 4000;\end{cases}$$

再考虑到产量不可能为负值，即必须满足：

$$x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,3,4),$$

综上所述，此问题可归结为：

求　x_j，

满足

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3+x_4\leqslant 5000;\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4\leqslant 3500;\\ x_1+3x_2+2x_3+2x_4\leqslant 4000;\\ x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,3,4);\end{cases}$$

使目标函数

$$S = 12x_1 + 11x_2 + 13x_3 + 8x_4$$

达到最大值。

资源最优配置问题的一般提法是：用m种资源$A_1, A_2, \cdots, A_m$，生产n种产品B_1，B_2，…，B_n。各种资源的可供量为b_1，b_2，…，b_m；各种产品的单价（或单位利润）为c_1，c_2，…，c_n，单位产品B_j对资源A_i的消耗定额为a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$），问在现有资源条件下，如何安排生产才能使总产值（或总利润）最大？

把上述已知数据列为下表：

表1-6

消耗定额 产品 / 资源	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	现有资源数
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
单价（或单位利润）	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

若设产品B_1，B_2，…，B_n的产量分别为x_1，x_2，…，x_n，则资源最优配置问题的数字模型为：

求一组非负变量x_1，x_2，…，x_n的值，使它们满足约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m; \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n); \end{cases}$$

使目标函数

$$S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$