工程数学基础

下册

大连工学院《工程数学基础》编写组

$$\frac{0}{0}=f'(x)$$

人民教育出版社

71.211
111
2:2

工 程 数 学 基 础

下 册

大连工学院《工程数学基础》编写组

人民教育出版社

1976年·北京

工程数学基础

下　　册

大连工学院《工程数学基础》编写组

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1976 年 5 月第 1 版　1976 年12月第 1 次印刷

书号 13012·021　定价 1.30 元

目 录

第八章　指数函数与对数函数

上一章学习了微积分及其简单应用。从计算公式来说，它们是以幂函数 $y=x^n$ 为主的。为了把微积分更好地应用于实际，我们有必要扩充函数的类型。在工程实践中，常见的函数类型还有指数函数、对数函数和三角函数等。本章将介绍指数函数与对数函数。

分析指数函数时，我们将引进分数指数幂，从而扩充幂的概念，并把幂与根式统一起来。这样，不仅可以简化根式的运算，而且也为对数的引进作了准备。

对数是作数字计算的一个重要工具。借助对数，可以把乘与除转化为加与减，把乘方与开方转化为乘与除，使计算既迅速又准确。

第一节　指数函数及其图形

一、指数函数

我们知道，对于幂

$$N=a^b,$$

若底数 a 是自变量 x，指数 b 是常量 n，那末幂 N 就转化为幂函数

$$y=x^n。$$

关于幂函数的图形及其应用，在第六章已有说明。

现在研究指数函数，先看两个例子。

我们知道，在爬山时，越往上爬空气越稀薄。登山队员们必须

了解空气压强 p 随高度 h 的变化规律。在实践的基础上，人们把这个规律总结为

$$p=p_0e^{-kh},$$

其中 p_0、k 是常量，h 是自变量，底数 $e\approx2.718$。因此，压强 p 是高度 h 的函数。

又如在 RC 串联电路中，人们必须掌握电容 C 的放电规律，这个规律是

$$u=u_0e^{-\frac{t}{RC}},$$

其中 u_0、R、C 是常量，t 是自变量，底数 $e\approx2.718$，可见电容 C 的电压 u 是时间 t 的函数。

以上两个例子表明，实践中有这样一类函数，底数是常量，而指数是自变量，通常把这类函数叫做指数函数，它的一般形式为

$$\boldsymbol{y=a^x},$$

其中 a 是一个正的常量，且不等于 1。比如 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=e^x$，$y=\left(\frac{1}{e}\right)^x$，$y=10^x$，等等，都是指数函数。

人们在实践中，为了计算方便，把指数函数的数值列成表格，同时，也画出指数函数的图形。表格和图形是互相补充的。为了说明方便起见，下面以 $y=2^x$ 为例，用列表、描点的方法画出它的图形。

根据第四章讲过的整数指数幂的概念，我们可以求出函数 $y=2^x$ 的下列数值，并列成表格：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

将每一组数(x,y)作为点的坐标，在坐标系中描出这些点，然后，用光滑曲线连接各点，便得函数的图形(图8-1)。由图可见这个函数是增加的，即自变量x的值越大，函数y的值也越大，并且图形通过点$A(0,1)$，定义域是$-\infty<x<+\infty$。

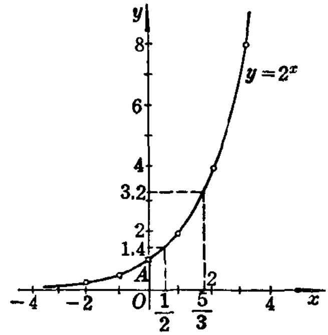

图 8-1

如图所示，当自变量x连续变动时，它既可以取上表所列的整数值，也可以取分数值，比如$x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{5}{3}$，相应的函数值为

$$y=2^{\frac{1}{2}},\qquad y=2^{\frac{5}{3}}。$$

这两个幂的指数是分数，叫做分数指数幂。对于整数指数幂的意义，在第四章已有明确规定：比如a^2是表示两个a相乘；而a^{-2}是表示a^2的倒数，即

$$a^2=a\times a;$$

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}。$$

我们还记得，负整数指数幂之所以这样规定，是为了使幂的运算法则能同正整数指数幂一样适用。因此，要了解分数指数幂$2^{\frac{1}{2}}$、$2^{\frac{5}{3}}$的意义，我们也从运算法则来说明。

对于分数指数幂$2^{\frac{1}{2}}$，应用整数指数幂的运算法则，得

$$(2^{\frac{1}{2}})^2=2^{\frac{1}{2}\times 2}=2^1=2。$$

对于$\sqrt{2}$，应用根式的运算法则，得

$$(\sqrt{2})^2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2。$$

因此，把$2^{\frac{1}{2}}$规定为$\sqrt{2}$，即

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2},$$

既能使整数指数幂的运算法则在分数指数幂中照样适用，又能符合根式的运算法则。同样，把$2^{\frac{5}{3}}$规定为$\sqrt[3]{2^5}$，即

$$2^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{2^5}。$$

根据以上规定，便可以计算$2^{\frac{1}{2}}$、$2^{\frac{5}{3}}$的值，得

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\approx 1.414,\quad 2^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[3]{32}\approx 3.175。$$

从$y=2^x$的图形上来看，$2^{\frac{1}{2}}$、$2^{\frac{5}{3}}$是与横坐标 $x=\frac{1}{2}$、$x=\frac{5}{3}$相应的纵坐标，在图 8-1 中，可以得到它们的近似值

$$2^{\frac{1}{2}}\approx 1.4,\qquad 2^{\frac{5}{3}}\approx 3.2。$$

对于负分数指数幂的意义，规定为正分数指数幂的倒数。比如

$$2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 2^{-\frac{5}{3}}=\frac{1}{2^{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}。$$

例 1 计算 $2^{\frac{1}{3}}$，$3^{\frac{3}{2}}$，$4^{\frac{3}{2}}$，$27^{-\frac{2}{3}}$。

解：$2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}=1.260;$

$3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3^3}=\sqrt{27}=5.196,$

$3^{\frac{3}{2}}$也可利用幂的运算法则化简后，再计算，即

$3^{\frac{3}{2}}=3^{1+\frac{1}{2}}=3^1\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3\cdot\sqrt{3}=3\times 1.732=5.196;$

$4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^{2\times\frac{3}{2}}=2^3=8;$

$27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{27^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(3^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3^{3\times\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}=0.1111。$

二、根式与分数指数幂

把平方根$\sqrt{a}$和立方根$\sqrt[3]{a}$推广，还有四次方根$\sqrt[4]{a}$、五次方根$\sqrt[5]{a}$、n 次方根$\sqrt[n]{a}$等。n 次方根$\sqrt[n]{a}$代表一个数，这个数的 n 次方等于 a，即

$$(\sqrt[n]{a})^n=a,$$

其中 a 是正数。

第一章讲的平方根的三条性质，对于 n 次方根也适用，即

(Ⅰ) $(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$, $(a\geqslant 0)$;

(Ⅱ) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$;

(Ⅲ) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $(a\geqslant 0,\ b>0)$。

关于平方根式的运算，比如，将根号内的因式提出根号外，把根号外的因式移入根号内，以及合并同类项等，对于 n 次根式也适用。

例2 化简下列各式：

(1) $\sqrt[3]{27a^4}$;　　(2) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{8a}+6a\sqrt{\dfrac{a}{4}}-a^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$。

解：(1) $\sqrt[3]{27a^4}=\sqrt[3]{27a^3\cdot a}=\sqrt[3]{(3a)^3\cdot a}=\sqrt[3]{(3a)^3}\cdot\sqrt[3]{a}$

$$=3a\sqrt[3]{a};$$

(2) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{8a}+6a\sqrt{\dfrac{a}{4}}-a^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt[3]{a}+\frac{6a}{2}\sqrt{a}-a^2\sqrt[3]{\frac{a}{a^2\cdot a}}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[3]{a}+3a\sqrt{a}-\frac{a^2}{a}\sqrt[3]{a}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[3]{a}+3a\sqrt{a}-a\sqrt[3]{a}$$

$$=3a\sqrt{a}+\left(\frac{4}{3}-a\right)\sqrt[3]{a}。$$

对于被开方数为负数的情况，我们作如下的说明：当 a 是负数时，如果 n 是偶数，$\sqrt[n]{a}$ 是复数，在这里我们不讨论；如果 n 是奇数，则负号可以提到根号外。这样一来，对于负数的奇次方根计算，提出负号后，就化为正数的奇次方根计算了，比如 $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-2$。

上一段中，我们举例说明了分数指数幂的意义。分数指数幂的一般形式为 $a^{\frac{m}{n}}$，把它规定为

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

其中 m、n 是正整数，a 是正数。

负分数指数幂的意义是

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}。$$

有了上述规定，利用幂的运算法则，不但可以计算一些分数指数幂，还可以化简根式，下面举例说明。

例3 化简下列根式：

(1) $\sqrt{125}\cdot\sqrt[4]{5}$；　　　　(2) $2\sqrt{ax}\cdot 5\sqrt[6]{a^2x^3}$；

(3) $\dfrac{a\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}$。

解：(1) $\sqrt{125}\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[4]{5}=5^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}$

$$=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}=5^{\frac{7}{4}}=5^{1+\frac{3}{4}}=5^1\cdot 5^{\frac{3}{4}}=5\sqrt[4]{5^3};$$

(2) $2\sqrt{ax}\cdot 5\sqrt[6]{a^2x^3}=2(ax)^{\frac{1}{2}}\cdot 5(a^2x^3)^{\frac{1}{6}}$

$$=10a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}a^{2\times\frac{1}{6}}x^{3\times\frac{1}{6}}=10a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$=10a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=10a^{\frac{5}{6}}x=10x\sqrt[6]{a^5};$$

(3) $\dfrac{a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}=\dfrac{a\cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{7}{10}}}=a\cdot a^{\frac{3}{5}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{7}{10}}$

$$=a^{1+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}=a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}。$$

例 4 化下列双重根式为单重根式:

(1) $\sqrt[3]{\sqrt{3a^3}}$; (2) $\sqrt{2a\sqrt[3]{x}}$。

解:

(1) $\sqrt[3]{\sqrt{3a^3}}=[(3a^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}=(3a^3)^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=(3a^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{3a^3}$;

(2) $\sqrt{2a\sqrt[3]{x}}=(2ax^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=[(2^3a^3)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}=[(8a^3x)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}$

$$=(8a^3x)^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=(8a^3x)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{8a^3x}。$$

例 5 计算 $10^{\frac{1}{4}}$，$10^{\frac{3}{4}}$。

解: $10^{\frac{1}{4}}=(10^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt{10}}=\sqrt{3.162}=1.779$,

$10^{\frac{3}{4}}=(10^{\frac{1}{4}})^3=(1.779)^3=5.63$。

例 6 验证

$$(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}。$$

解: $(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)$

$$=(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x(2x)(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}-x^2(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}。$$

三、$y=e^x$，$y=10^x$ 的图形

指数函数 $y=e^x$ 是工程技术中常用的一个函数，底数 $e=2.7182\cdots\cdots$ 是一个无理数，通常取三位或四位作为它的近似值，即 $e\approx2.72$ 或 $e\approx2.718$。与前面一样，我们可以将这个函数的数值列成表格，并画出它的图形(图 8-2)。

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	0.135	0.368	1	2.72	7.40	…

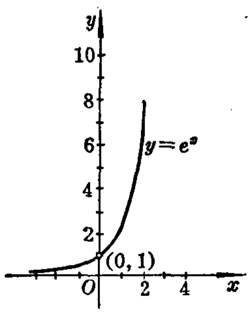

图 8-2

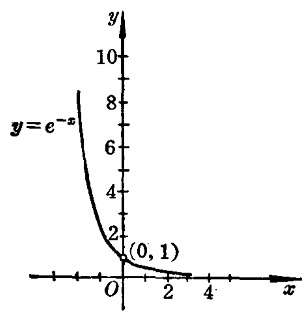

图 8-3

由图可见这个函数是增加的，函数值大于零，图形经过点 $(0,1)$，定义域是 $-\infty<x<+\infty$。

图 8-3 是指数函数 $y=\left(\frac{1}{e}\right)^x=e^{-x}$ 的图形，这个函数是减少的，函数值大于零，图形经过点 $(0,1)$，定义域是 $-\infty<x<+\infty$。

下面再研究指数函数 $y=10^x$ 的图形，先列表：

x	…	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	…
y	…	0.1	0.17	0.32	0.56	1	1.78	3.16	5.63	10	…

然后描点，再把各点连成光滑曲线(图 8-4)。同样，这个函数也是增加的，函数值为正，图形也通过点(0, 1)，定义域是$-\infty<x<+\infty$。

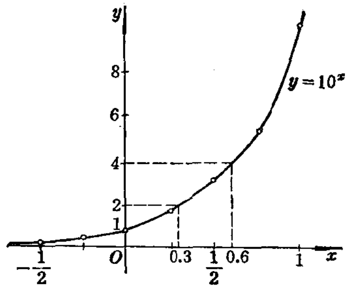

图 8-4

根据这个图形，还可以从已知的 y 值，求出相应的 x 值，比如 $y=2$、$y=4$，在图上可以找到相应的 x 的近似值 0.3、0.6，即

$$2\approx10^{0.3},\qquad 4\approx10^{0.6}。$$

这样，就把一个正数转化为以 10 为底的幂了。借助于 $y=2^x$, $y=e^x$ 的图形，我们还可以把一个正数转化为以 2 为底、以 e 为底的幂。正如恩格斯指出的：**“关于幂的关系，问题就更进一步：每个数都可以当做其他任何一个数的幂”**。①

在下一节，我们将讲到，把一个正数转化为以 10 为底的幂，这种方法是人们在长期实践中，为了解决大量的复杂的数字计算总结出来的。

习 题 一

1. 画指数函数 $y=2^{-x}$ 的图形。
2. 求下列分数指数幂的值：

   $8^{\frac{1}{3}}$, $9^{\frac{1}{2}}$, $27^{\frac{5}{3}}$, $8^{\frac{4}{3}}$, $125^{-\frac{2}{3}}$, $100^{\frac{1}{4}}$, $100^{-\frac{3}{4}}$。
3. 把下列根式化为分数指数幂：

   $\sqrt{a^5}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $2x\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\sqrt{x\sqrt{x^3}}$。
4. 化简下列各题：

---

① 《自然辩证法》第 237 页。

(1) $\sqrt[4]{49x^2y^2}$； (2) $\sqrt{9a^2bc^3}$； (3) $\sqrt[3]{\dfrac{a^4x^5}{81by^6}}$；

(4) $\sqrt[3]{xy}\sqrt[4]{x^3y}$； (5) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$； (6) $\sqrt[3]{2\sqrt{7}}$。

5. 计算下列各式:

(1) $\left[\left(\dfrac{81}{625}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}}$；　　(2) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(0.04)^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $\left(\dfrac{8a^{-6}}{27b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$；　　(4) $x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$。

6. 验证:

$$\frac{1}{2}\cdot x(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)-(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}。$$

7. 利用图 8-4, 填写下列括号:

$3\approx10^{(\ )}$；　　$6\approx10^{(\ )}$。

第二节　对数及其运算法则

在工程实践中,有时会遇见一些复杂的数字运算。比如,考查地球卫星运行一周的时间 T,就需要计算

$$T=2\times3.1416\times\sqrt{\frac{6371}{9.8\times10^{-3}}}\times\sqrt{\left(1+\frac{439+2384}{2\times6371}\right)^3}\text{(秒)}。$$

这里既有乘法与除法, 又有乘方与开方, 计算它们要花费很多时间,并且容易产生差错。那末, 我们怎样才能又快、又准确地进行计算,并且尽可能减少差错呢？人们为了计算的需要,创造了许多计算方法和计算工具(如对数表、计算尺和计算机等),使复杂的计算得到简化。对数运算就是简化计算的一种方法。利用对数可以把乘与除转化为加与减, 乘方与开方转化为乘与除。怎样实现这些转化呢？先看一个简单的例子。

例 1　计算 2.13×3.25。

解: 我们记得,同底数的幂相乘,底数不变,指数相加,即