

# 工程数学基础

下 册

大连工学院《工程数学基础》编写组

$$\frac{0}{0} = f'(x)$$

人民教育出版社

71.211  
111  
2:2

# 工 程 数 学 基 础

下 册

大连工学院《工程数学基础》编写组

三六二



# 工程数学基础

下 册

大连工学院《工程数学基础》编写组

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

\*

1976年5月第1版 1976年12月第1次印刷

书号 13012·021 定价 1.30元

# 目 录

第八章 指数函数与对数函数	1
第一节 指数函数及其图形	1
一、指数函数(1) 二、根式与分数指数幂(5) 三、 $y=e^x$ , $y=10^x$ 的图形(8) 习题一(9)	
第二节 对数及其运算法则	10
习题二 (14)	
第三节 对数的应用	14
一、首数与尾数(14) 习题三(18) 二、利用对数简化计算(19) 习题四(23)	
第四节 自然对数与对数函数	24
一、自然对数(24) 二、对数函数及其图形(27) 习题五(28)	
小 结	29
第九章 三角函数	31
第一节 三角函数	31
一、三角函数概念(31) 二、三角函数值的计算(38) 习题一(44)	
第二节 三角函数的图形	45
一、弧度制(45) 二、三角函数的图形(48) 习题二(52)	
第三节 反三角函数及其图形	53
一、反正弦函数及其图形(54) 二、反余弦函数和反正切函数(56) 习题三(58)	
第四节 三角恒等式	58
一、同角三角函数间的关系(58) 二、和差角公式(60) 三、倍角、半角公式(64) 习题四(68)	
第五节 极坐标方程	69
一、极坐标系(69) 二、曲线的极坐标方程(70) 三、极坐标与直角坐标间的关系(73) 四、凸轮和等速螺线(74) 习题五(77)	
小 结	78

第十章 微分法	81
第一节 微分法	81
一、正弦函数、余弦函数的导数和微分(81)	
二、导数和微分的四则运算(83)	
三、复合函数的导数和微分(86)	
习题一(93)	
第二节 微分法的应用	94
一、函数的最大值与最小值(94)	
二、近似计算与误差估计(99)	
三、方程的近似解(106)	
习题二(110)	
第三节 指数函数、对数函数和反三角函数的导数和微分	111
一、指数函数的导数和微分(111)	
二、对数函数、反三角函数的导数和微分(115)	
三、导数和微分的基本公式表(117)	
四、偏导数(118)	
习题三(120)	
第四节 高阶导数及其应用	121
一、高阶导数(121)	
二、曲线的凹凸(122)	
三、曲率(125)	
习题四(131)	
第五节 参数方程	132
一、参数方程(132)	
二、参数方程的微分法(137)	
习题五(139)	
小 结	139
第十一章 积分法	143
第一节 原函数与不定积分法	143
习题一(148)	
第二节 基本积分法	149
习题二(153)	
第三节 简单积分表的用法	154
习题三(160)	
第四节 简单微分方程	161
一、微分方程(161)	
二、可分离变量的方程(165)	
三、应用举例(166)	
习题四(173)	
第五节 流体静压力、功和平均值	174
一、流体静压力(174)	
二、功(176)	
三、函数的平均值(180)	
习题五(183)	
第六节 数值积分法	185
一、矩形法(185)	
二、梯形法(186)	
三、抛物线法(187)	
习题六(190)	
小 结	192

第十二章 微分方程	194
第一节 二阶常系数线性微分方程	194
第二节 二阶常系数线性齐次微分方程	196
一、齐次方程解的性质(196) 二、齐次方程的解法(199) 习题一(208)	
第三节 二阶常系数线性非齐次微分方程	209
一、非齐次方程解的性质(209) 二、非齐次方程的解法(210) 习题二(218)	
第四节 微分方程的数值解法	220
一、欧拉折线法(221) 二、改进的欧拉折线法(222) 习题三(226)	
小 结	226
第十三章 级数	229
第一节 等差级数和等比级数	229
一、等差级数(229) 二、等比级数(232) 三、无穷级数(235) 习题一(239)	
第二节 幂级数	240
一、幂级数和它的收敛区间(240) 二、函数的幂级数展开式(243)	
三、幂级数的应用(249) 习题二(254)	
第三节 富氏级数	255
一、把非正弦周期函数展成富氏级数(260) 二、偶函数与奇函数的富氏级数(268) 习题三(277) 附注:非正弦周期函数展成富氏级数的条件(279)	
小 结	281
第十四章 算法语言初步	283
第一节 电子数字计算机与算法语言	283
一、电子数字计算机简介(284) 二、数在电子计算机中的表示形式(285)	
三、手编程序与算法语言程序(289)	
第二节 算法语言的基本成分	293
一、基本符号(293) 二、数、变量和标识符(295) 三、标准函数(297)	
第三节 赋值语句	298
一、算术表达式(299) 二、赋值语句(300)	
第四节 条件语句	301
一、带 else 型条件语句(301) 二、不带 else 型条件语句(302)	

三、多套式条件语句(303)	四、复合语句(303)	
第五节 循环语句		304
一、算术表达式型循环语句(304)	二、步长型循环语句(306)	
第六节 转向语句		307
一、转向语句(307)	二、空语句(310)	
第七节 输入语句和输出语句		311
一、输入语句(311)	二、输出语句(312)	
第八节 说明		313
一、简单变量说明(313)	二、数组说明(314)	三、开关说明(316)
第九节 分程序		319
第十节 过程		322
一、一般过程(322)	二、函数过程(325)	习题(329)
小 结		332
附录 I 复数		335
第一节 复数的概念		336
第二节 复数的几何解释及复数的几种表示式		338
一、复数的几何解释(338)	二、复数的几种表示式(339)	
第三节 用复数表示矢量和正弦量		344
一、用复数表示矢量(344)	二、用复数表示正弦量(346)	
第四节 复数的四则运算		349
一、复数的加、减法运算(349)	二、复数的乘、除法运算(351)	
附录 II 矩阵和线性方程组		354
第一节 行列式		354
一、二阶行列式(354)	二、三阶行列式(356)	三、 $n$ 阶行列式(359)
四、行列式的性质(360)		
第二节 矩阵		362
一、矩阵的概念(362)	二、矩阵的加减法(365)	三、数与矩阵相乘(367)
四、矩阵与矩阵相乘(369)		
第三节 线性方程组解法		376
一、逆阵与线性方程组的解(376)	二、高斯消去法(382)	三、主元素消去法(385)
四、简单迭代法(389)	五、赛德尔迭代法(393)	六、赛德尔迭代法的一般过程(396)
七、主元素消去法的一般过程(399)		
习题答案		402

## 第八章 指数函数与对数函数

上一章学习了微积分及其简单应用。从计算公式来说，它们是以幂函数  $y=x^n$  为主的。为了把微积分更好地应用于实际，我们有必要扩充函数的类型。在工程实践中，常见的函数类型还有指数函数、对数函数和三角函数等。本章将介绍指数函数与对数函数。

分析指数函数时，我们将引进分数指数幂，从而扩充幂的概念，并把幂与根式统一起来。这样，不仅可以简化根式的运算，而且也为对数的引进作了准备。

对数是作数字计算的一个重要工具。借助对数，可以把乘与除转化为加与减，把乘方与开方转化为乘与除，使计算既迅速又准确。

### 第一节 指数函数及其图形

#### 一、指数函数

我们知道，对于幂

$$N = a^b,$$

若底数  $a$  是自变量  $x$ ，指数  $b$  是常量  $n$ ，那末幂  $N$  就转化为幂函数

$$y = x^n.$$

关于幂函数的图形及其应用，在第六章已有说明。

现在研究指数函数，先看两个例子。

我们知道，在爬山时，越往上爬空气越稀薄。登山队员们必须



了解空气压强  $p$  随高度  $h$  的变化规律。在实践的基础上，人们把这个规律总结为

$$p = p_0 e^{-kh},$$

其中  $p_0, k$  是常量， $h$  是自变量，底数  $e \approx 2.718$ 。因此，压强  $p$  是高度  $h$  的函数。

又如在  $RC$  串联电路中，人们必须掌握电容  $C$  的放电规律，这个规律是

$$u = u_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

其中  $u_0, R, C$  是常量， $t$  是自变量，底数  $e \approx 2.718$ ，可见电容  $C$  的电压  $u$  是时间  $t$  的函数。

以上两个例子表明，实践中有这样一类函数，底数是常量，而指数是自变量，通常把这类函数叫做指数函数，它的一般形式为

$$y = a^x,$$

其中  $a$  是一个正的常量，且不等于 1。比如  $y = 2^x$ ， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，

$y = e^x$ ， $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ ， $y = 10^x$ ，等等，都是指数函数。

人们在实践中，为了计算方便，把指数函数的数值列成表格，同时，也画出指数函数的图形。表格和图形是互相补充的。为了说明方便起见，下面以  $y = 2^x$  为例，用列表、描点的方法画出它的图形。

根据第四章讲过的整数指数幂的概念，我们可以求出函数  $y = 2^x$  的下列数值，并列成表格：

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

将每一组数  $(x, y)$  作为点的坐标, 在坐标系中描出这些点, 然后, 用光滑曲线连接各点, 便得函数的图形(图 8-1)。由图可见这个函数是增加的, 即自变量  $x$  的值越大, 函数  $y$  的值也越大, 并且图形通过点  $A(0, 1)$ , 定义域是  $-\infty < x < +\infty$ 。

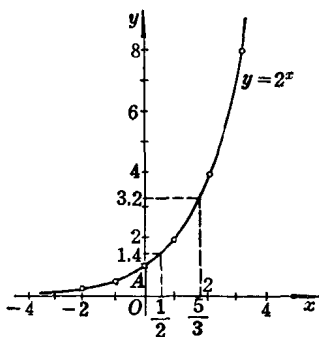


图 8-1

如图所示, 当自变量  $x$  连续变动时, 它既可以取上表所列的整数值, 也

可以取分数值, 比如  $x = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{3}$ , 相应的函数值为

$$y = 2^{\frac{1}{2}}, \quad y = 2^{\frac{5}{3}}。$$

这两个幂的指数是分数, 叫做分数指数幂。对于整数指数幂的意义, 在第四章已有明确规定: 比如  $a^2$  是表示两个  $a$  相乘; 而  $a^{-2}$  是表示  $a^2$  的倒数, 即

$$a^2 = a \times a;$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}。$$

我们还记得, 负整数指数幂之所以这样规定, 是为了使幂的运算法则能同正整数指数幂一样适用。因此, 要了解分数指数幂  $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{5}{3}}$  的意义, 我们也从运算法则来说明。

对于分数指数幂  $2^{\frac{1}{2}}$ , 应用整数指数幂的运算法则, 得

$$(2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2} \times 2} = 2^1 = 2。$$

对于  $\sqrt{2}$ , 应用根式的运算法则, 得

$$(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2。$$

因此, 把  $2^{\frac{1}{2}}$  规定为  $\sqrt{2}$ , 即

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},$$

既能使整数指数幂的运算法则在分数指数幂中照样适用，又能符合根式的运算法则。同样，把 $2^{\frac{5}{3}}$ 规定为 $\sqrt[3]{2^5}$ ，即

$$2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}.$$

根据以上规定，便可以计算 $2^{\frac{1}{2}}$ 、 $2^{\frac{5}{3}}$ 的值，得

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.414, \quad 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} \approx 3.175.$$

从 $y=2^x$ 的图形上来看， $2^{\frac{1}{2}}$ 、 $2^{\frac{5}{3}}$ 是与横坐标 $x=\frac{1}{2}$ 、 $x=\frac{5}{3}$ 相应的纵坐标，在图 8-1 中，可以得到它们的近似值

$$2^{\frac{1}{2}} \approx 1.4, \quad 2^{\frac{5}{3}} \approx 3.2.$$

对于负分数指数幂的意义，规定为正分数指数幂的倒数。比如

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}.$$

**例 1** 计算  $2^{\frac{1}{3}}$ ， $3^{\frac{3}{2}}$ ， $4^{\frac{3}{2}}$ ， $27^{-\frac{2}{3}}$ 。

解：  $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} = 1.260;$

$$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27} = 5.196,$$

$3^{\frac{3}{2}}$  也可利用幂的运算法则化简后，再计算，即

$$3^{\frac{3}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{3} = 3 \times 1.732 = 5.196;$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^{2 \times \frac{3}{2}} = 2^3 = 8;$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(3^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3^{3 \times \frac{2}{3}}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0.1111.$$

## 二、根式与分数指数幂

把平方根 $\sqrt{a}$ 和立方根 $\sqrt[3]{a}$ 推广,还有四次方根 $\sqrt[4]{a}$ 、五次方根 $\sqrt[5]{a}$ 、 $n$ 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 等。 $n$ 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 代表一个数,这个数的 $n$ 次方等于 $a$ ,即

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,$$

其中 $a$ 是正数。

第一章讲的平方根的两条性质,对于 $n$ 次方根也适用,即

$$(I) (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a, (a \geq 0);$$

$$(II) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$(III) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (a \geq 0, b > 0)。$$

关于平方根式的运算,比如,将根号内的因式提出根号外,把根号外的因式移入根号内,以及合并同类项等,对于 $n$ 次根式也适用。

**例2** 化简下列各式:

$$(1) \sqrt[3]{27a^4}; \quad (2) \frac{2}{3}\sqrt[3]{8a} + 6a\sqrt{\frac{a}{4}} - a^2\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}。$$

$$\text{解: } (1) \sqrt[3]{27a^4} = \sqrt[3]{27a^3 \cdot a} = \sqrt[3]{(3a)^3 \cdot a} = \sqrt[3]{(3a)^3} \cdot \sqrt[3]{a} \\ = 3a\sqrt[3]{a};$$

$$(2) \frac{2}{3}\sqrt[3]{8a} + 6a\sqrt{\frac{a}{4}} - a^2\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} \\ = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt[3]{a} + \frac{6a}{2}\sqrt{a} - a^2\sqrt[3]{\frac{a}{a^2 \cdot a}} \\ = \frac{4}{3}\sqrt[3]{a} + 3a\sqrt{a} - \frac{a^2}{a}\sqrt[3]{a} \\ = \frac{4}{3}\sqrt[3]{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt[3]{a}$$

$$= 3a\sqrt{a} + \left(\frac{4}{3} - a\right)\sqrt[3]{a}.$$

对于被开方数为负数的情况,我们作如下的说明:当  $a$  是负数时,如果  $n$  是偶数, $\sqrt[n]{a}$  是复数,在这里我们不讨论;如果  $n$  是奇数,则负号可以提到根号外。这样一来,对于负数的奇次方根计算,提出负号后,就化为正数的奇次方根计算了,比如  $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$ 。

上一段中,我们举例说明了分数指数幂的意义。分数指数幂的一般形式为  $a^{\frac{m}{n}}$ ,把它规定为

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

其中  $m, n$  是正整数,  $a$  是正数。

负分数指数幂的意义是

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

有了上述规定,利用幂的运算法则,不但可以计算一些分数指数幂,还可以化简根式,下面举例说明。

**例3** 化简下列根式:

$$(1) \sqrt{125} \cdot \sqrt[4]{5}; \quad (2) 2\sqrt{ax} \cdot 5\sqrt[6]{a^2x^3};$$

$$(3) \frac{a\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[10]{a^7}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } (1) \sqrt{125} \cdot \sqrt[4]{5} &= \sqrt{5^3} \cdot \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \\ &= 5^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{4}} = 5^{1 + \frac{3}{4}} = 5^1 \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 5\sqrt[4]{5^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 2\sqrt{ax} \cdot 5\sqrt[6]{a^2x^3} &= 2(ax)^{\frac{1}{2}} \cdot 5(a^2x^3)^{\frac{1}{6}} \\ &= 10a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \cdot a^{2 \times \frac{1}{6}}x^{3 \times \frac{1}{6}} = 10a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}} \\ &= 10a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 10a^{\frac{5}{6}}x = 10x\sqrt[6]{a^5}; \end{aligned}$$

$$(3) \frac{a \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[10]{a^7}} = \frac{a \cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{10}}} = a \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{7}{10}}$$

$$= a^{1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} - \frac{7}{10}} = a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}.$$

**例 4** 化下列双重根式为单重根式:

$$(1) \sqrt[3]{\sqrt{3a^3}}; \quad (2) \sqrt{2a\sqrt[3]{x}}.$$

解:

$$(1) \sqrt[3]{\sqrt{3a^3}} = [(3a^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}} = (3a^3)^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = (3a^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3a^3};$$

$$(2) \sqrt{2a\sqrt[3]{x}} = (2ax^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = [(2^3 a^3)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}} = [(8a^3 x)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (8a^3 x)^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = (8a^3 x)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{8a^3 x}.$$

**例 5** 计算  $10^{\frac{1}{4}}$ ,  $10^{\frac{3}{4}}$ .

解:  $10^{\frac{1}{4}} = (10^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3.162} = 1.779,$

$$10^{\frac{3}{4}} = (10^{\frac{1}{4}})^3 = (1.779)^3 = 5.63.$$

**例 6** 验证

$$(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

解:  $(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)$

$$= (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x(2x)(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(a^2 + x^2) - x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

### 三、 $y=e^x$ , $y=10^x$ 的图形

指数函数  $y=e^x$  是工程技术中常用的一个函数，底数  $e=2.7182\dots$  是一个无理数，通常取三位或四位作为它的近似值，即  $e\approx 2.72$  或  $e\approx 2.718$ 。与前面一样，我们可以将这个函数的数值列成表格，并画出它的图形(图 8-2)。

$x$	...	-2	-1	0	1	2	...
$y$	...	0.135	0.368	1	2.72	7.40	...

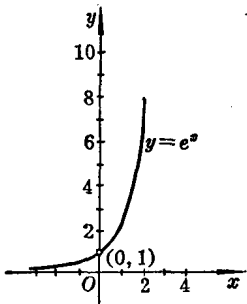


图 8-2

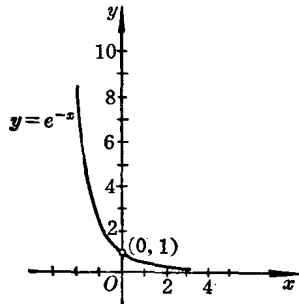


图 8-3

由图可见这个函数是增加的，函数值大于零，图形经过点  $(0, 1)$ ，定义域是  $-\infty < x < +\infty$ 。

图 8-3 是指数函数  $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$  的图形，这个函数是减少的，函数值大于零，图形经过点  $(0, 1)$ ，定义域是  $-\infty < x < +\infty$ 。

下面再研究指数函数  $y=10^x$  的图形，先列表：

$x$	...	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	...
$y$	...	0.1	0.17	0.32	0.56	1	1.78	3.16	5.63	10	...

然后描点，再把各点连成光滑曲线(图 8-4)。同样，这个函数也是增加的，函数值为正，图形也通过点(0, 1)，定义域是 $-\infty < x < +\infty$ 。

根据这个图形，还可以从已知的  $y$  值，求出相应的  $x$  值，比如  $y=2, y=4$ ，在图上可以找到相应的  $x$  的近似值 0.3、0.6，即

$$2 \approx 10^{0.3}, \quad 4 \approx 10^{0.6}.$$

这样，就把一个正数转化为以 10 为底的幂了。借助于  $y=2^x, y=e^x$  的图形，我们还可以把一个正数转化为以 2 为底、以  $e$  为底的幂。正如恩格斯指出的：“关于幂的关系，问题就更进一步：每个数都可以当做其他任何一个数的幂”。<sup>①</sup>

在下一节，我们将讲到，把一个正数转化为以 10 为底的幂，这种方法是人们在长期实践中，为了解决大量的复杂的数字计算总结出来的。

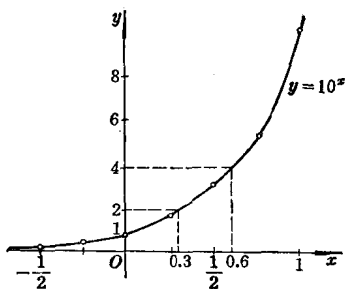


图 8-4

### 习 题 一

1. 画指数函数  $y=2^{-x}$  的图形。

2. 求下列分数指数幂的值：

$$8^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{2}}, 27^{\frac{5}{3}}, 8^{\frac{4}{3}}, 125^{-\frac{2}{3}}, 100^{\frac{1}{4}}, 100^{-\frac{3}{4}}.$$

3. 把下列根式化为分数指数幂：

$$\sqrt{a^5}, \sqrt[3]{x^2}, 2x\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \sqrt{x\sqrt{x^3}}.$$

4. 化简下列各题：

<sup>①</sup> 《自然辩证法》第 237 页。



$$(1) \sqrt[4]{49x^2y^2}; (2) \sqrt{9a^2bc^3}; (3) \sqrt[3]{\frac{a^4x^5}{81by^6}};$$

$$(4) \sqrt[3]{xy\sqrt[4]{x^3y}}; (5) \sqrt{\sqrt[3]{4}}; (6) \sqrt[3]{2\sqrt{7}}.$$

5. 计算下列各式:

$$(1) \left[ \left( \frac{81}{625} \right)^3 \right]^{\frac{1}{4}}; (2) \left( -\frac{1}{2} \right)^{-2} \cdot (0.04)^{-\frac{1}{2}};$$

$$(3) \left( \frac{8a^{-6}}{27b^2} \right)^{\frac{1}{3}}; (4) x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

6. 验证:

$$\frac{1}{2} \cdot x(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) - (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

7. 利用图 8-4, 填写下列括号:

$$3 \approx 10^{(\quad)}; \quad 6 \approx 10^{(\quad)}.$$

## 第二节 对数及其运算法则

在工程实践中, 有时会遇见一些复杂的数字运算。比如, 考查地球卫星运行一周的时间  $T$ , 就需要计算

$$T = 2 \times 3.1416 \times \sqrt{\frac{6371}{9.8 \times 10^{-3}}} \times \sqrt{\left( 1 + \frac{439 + 2384}{2 \times 6371} \right)^3} \text{ (秒)}.$$

这里既有乘法与除法, 又有乘方与开方, 计算它们要花费很多时间, 并且容易产生差错。那末, 我们怎样才能又快、又准确地进行计算, 并且尽可能减少差错呢? 人们为了计算的需要, 创造了许多计算方法和计算工具(如对数表、计算尺和计算机等), 使复杂的计算得到简化。对数运算就是简化计算的一种方法。利用对数可以把乘与除转化为加与减, 乘方与开方转化为乘与除。怎样实现这些转化呢? 先看一个简单的例子。

**例 1** 计算  $2.13 \times 3.25$ 。

解: 我们记得, 同底数的幂相乘, 底数不变, 指数相加, 即