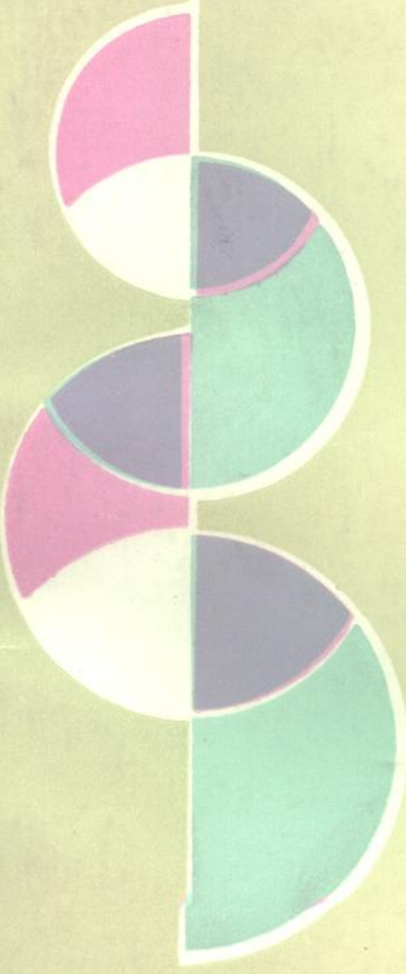
实变函数论

И. П. 马卡罗夫 著
王谅儒 译

实变函数论



中国
科学技术出版社

实变函数论

И. П. 马卡罗夫 著

王谅儒 译

王一了 校

中国科学技术出版社

内 容 提 要

本书系根据И. П. 马卡罗夫（И. П. Макаров）所著《实变函数论》（Теория Функций Деиствительного переменного）第二版译出。原书为前苏联的师范学院教学参考用书。

全书内容包括集合的一般理论、实数集合、点的集合、函数、连续曲线、测度和积分等六章，每章末都配有大量的练习题。在叙述上，遵循由具体到抽象的认识原则，着重例释，精简扼要，是本书的特色之一。

本书适合于师范院校及其他的理工科院校师生使用，也可作为函授或自学教材。

（京）新登字175号

实 变 函 数 论

И. П. 马卡罗夫 著

王谅儒 译

王一了 校

责任编辑：陈金凤

技术设计：武万荣

*

中国科学技术出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京昌平长城印刷厂印刷

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：6.5 字数：144千字

1992年3月第1版 1992年3月第1次印刷

印数：1—2 100册 定价：5.00元

ISBN 7-5046-0676-6/O·10

主 编 的 话

本书是供师范学院学生用的。

本书的特点是备有不同难度的练习题。目前，还没有关于集合论和实变函数的练习题汇编，所以，本书就显得特别有用。

应当指出，实数理论的叙述方法和若尔当测度的详尽叙述，是本书的另一特点。借助有理数基本序列阐述实数理论，比起实变函数教程中普遍采用的戴德金实数理论来，这样的叙述更接近中学学习的初等数学。

在我们看来，本书对师范学院函授部的大学生也是有用的。

И. Я. 韦尔琴科

第一版序

根据师范学院教学大纲，实变函数论课程的任务，首先是用已熟悉的数学分析课程的严密论证来培养未来的教师；其次，传授给他们一系列同教学和数学研究有关的近代概念的重要知识：集合，数，函数，极限，曲线和积分。由于这个缘故，读者还可以发现许多早已在数学分析中就知道的概念，而在本书中对它们作了新的深刻的叙述。这些概念是实数，函数，函数的界、连续性、积分等等。本书所给出的实数理论的叙述方法与数学分析不同，这还是头一次。函数不仅在已知的开区间和闭区间上进行研究，而且在更为复杂的点集合上来研究。黎曼可积函数类的完整叙述，也是同类书中的第一次。

此外，本书还向读者介绍了集合概念、集合论初步知识，连续曲线概念以及较之黎曼积分更为广泛的积分概念的某些基本知识。他们未来的工作是数学教师，研究这些问题是必要的。

我应向苏联科学院通讯院士П．С．洛维柯夫，Н．В．斯米尔诺夫教授，А．Г．宾什克尔教授和Е．Г．苏里格费尔表示衷心的感谢，因为他们阅读本书原稿，并给予详细的指示。对本书的主编И．Я．韦尔琴科教授表示深深的感谢，他的宝贵意见使我改正了书中许多不足之处。梁赞师范学院数学分析教研组的全体工作人员对本书工作的帮助和关心，特别是副教授А．А．弗里德曼，研究生В．Ф．沃朗洛娃和В．В．伯特洛夫，他们阅读原稿并提出意见，实验助理大学生В．П．瓦丽娜为原稿的出版在技术准备上给以很大帮助，在此表示热烈的感谢。

И．马卡罗夫

第二版序

本书第二版与第一版的区别，在于对黎曼积分存在性的勒贝格定理以及可数集合与实数的某些定理都做了新的叙述；增加了大量的练习题；许多定理的证明更为精练。

所有这些改进，都应归功于广大的师范学院科技工作者。他们热情地告诉我，本书作教学参考书使用的实际效果，尤其是A．B．沃罗布耶夫（莫斯科）、И．Я．巴尔科夫（车里雅宾斯克），B．C．洛希宁（巴拉索夫），M．Φ．别兹博罗德尼科夫（斯特尔里塔马克），Ш．H．努特富林（克梅罗夫），H．C．卡普拉洛夫（梁赞）和B．A．卡基切夫（沙赫特恩）。他们和本书的主编И．Я．韦尔琴科教授的许多宝贵意见，提高了本书的质量，特此表示深切的谢意。

И．马卡罗夫

目　　录

第一章 集合的一般理论

§1 集合的概念

在现实生活中，我们既能观察到个别的对象（木头、细尘、汽车、生物、书、黑板、书桌），又能观察到它们的总集或集合（森林中的木材，图书馆的书，集体农庄的土地上使用的农业汽车等总集或集合）。除了直接以现实中的具体对象为内容的总集或集合外，我们还可以很容易地想象到内容更加抽象的总集或集合，例如，以一定的方法选取的数的集合，某种矢量的集合，有确定形式的函数的集合，等等。在构成这些集合时，利用了抽象的数学概念，而这些概念是包含在现实的空间形式与数量关系的研究过程中的。总集或集合[1]是不能再由某些更简单的概念给以定义的。就这个意义而言，它是最基本的科学概念之一。集合的元素可以有极不相同的形式和性质，但只要知道组成集合的元素，那么这个集合就被认为是已知的。

集合的例子：

教科书的页的集合；

有理数的集合；

恒星和行星的集合；

专业学校的大学生的集合；

几何图形的名称的集合；

我国在现阶段供给工业或农村集体农庄的一切机器设备的集合；

平面上不在一条直线上的任意三点为顶点的三角形的集合；

[1] 我们约定，今后只使用集合这个名称。

已知的代数方程的根的集合；

我国的初级和高等学校的集合；

集体农庄在今年内所收获的小麦、大麦等粮食的集合。

从以上的例子，不难看出，每个集合的名称本身，就完全确切地决定了该集合内含有什么样的元素。

我们常常以指出某种法则或规律来给出集合。它的元素完全由这些法则或规律所确定。例如：

各位数之和能被 7 除尽的整数的集合；

正分数$\frac{n}{n^2+n+3}$的集合，其中n是自然数；

由方程$y=c(x+c)$所确定的直线的集合，其中c是任意实数。

必须把集合的所有元素一一列出来的情况（例如，多边形$ABCDEFGIKL$的顶点A，C，F和L的集合M，或元素a，c，d的集合E。此时分别记为$M=\{A, C, F, L\}$和$E=\{a, c, d\}$）是很少遇到的。若要表明集合P是由确定形式的元素x组成的，则写作$P=\{x\}$。

§2　有限集合与无限集合

如果不将集合分类，那么就根本不可能去研究任何集合。首先约定，把集合分为有限的与无限的。

如果集合的元素的个数能够用某一数来表示，不管这个数求得出来或求不出来，只要这个数存在，那么此集合就称为**有限的**。

有限集合的例子：

书的页的集合；

在指定时间内，地球上一切图书馆里所有的书的集合；

为望远镜所能看见的恒星和行星的集合；

在指定地段的森林里的树木的集合；

太阳系的行星是原子构成的，这些原子的集合；

经常遇到的不是有限集合，而是所谓的**无限集合**。

无限集合的例子：

一切有理数的集合；

平面上一切点的集合；

长度为0.0001毫米的线段上的一切点的集合；

一切连续函数的集合；

平面上相交于同一点的一切直线的集合；

我们把仅仅由一个元素组成的集合——**一元集合**；不含任何元素的集合——**空集合**，都列入有限集合这类中。聚然看来，似乎没有必要引入这些名称：一元集合——自然是一个元素所组成的集合；空集合——自然是集合没有了。事实上，这些概念是需要的。因为讲到集合时，我们有时不能预先知道它是无论什么样的元素都包含着呢，还是只包含一个或比一个还多的元素呢。例如，考察代数方程$x^4-4x^3+9x^2-10x+6=0$，要弄清它的由虚部系数是正整数的复根组成的集合以及它的实根集合。为此，在进行适当的计算之后，求得此方程的根是 $1+i$，$1-i$，$1+i\sqrt{2}$，$1-i\sqrt{2}$，于是可知第一个集合是一元的，$1+i$ 是其唯一的元素；而第二个集合是空的。空集合用符号$\varnothing$❶表示。可以看出，空集合的记号虽然与零相似，但是它不表示零。通常由上下文保证了它不会和零相混淆。

§3 子集合 包含

我们约定，用大写拉丁字母表记集合，小写拉丁字母表记集合的元素。当集合A和B重合时，也就是，它们的元素完全一样

❶ 原书以O表示空集合，现一律改用ϕ表示。——译者注

时，就记为$A=B$。当集合A的一切元素同时又都是集合B的元素，即属于集合B时，就用包含符号$A\subseteq B$或$A\subset B$（记法$B\supseteq A$或$B\supset A$，与前之记法的意义相同）。当集合A的一切元素不仅可能属于集合B，而且可能与集合B重合（$A=B$）时，就用符号$A\subseteq B$。如果集合$A\subseteq B$或$A\subset B$，那么集合A称为集合B的部分或**子集**。集合B本身与空集合$\varnothing$，显然是包含于任意的已知集合B中。$B\subseteq B$，$\varnothing\subseteq B$称为集合B的假部分或**假子集**；集合B的其他的一切子集合(部分)，称为它的**真子集合**(真子部分)。为表记个别的元素a属于集合A的情形，就使用单个元素的属于符号$a\in A$。

子集合的例子：

偶数集合A是整数集合B的子集合，$A\subset B$；

有理数集合R是实数集合Z的子集合，$R\subset Z$；

某学院各系和各年级的大学生集合A是该学院所有大学生集合B的假子集合 $A\subseteq B$（此时$A=B$）；

已知代数方程的实根集合A，是这个方程的一切根的集合B的子集合，$A\subseteq B$（符号$\subseteq$此时表示A可能与B重合）；集合A有时可能是空的。

空集合$\varnothing$是正数集合B的假子集合，$\varnothing\subset B$。

§4 集合论运算

集合的加法、减法以及称之为集合乘法的集合的公共部分的定义，是集合论运算。

集合的每一个元素至少属于集合A与B之一，这样的集合称为集合A与B的和。

相加的集合A与B可以有公共元素，也可以没有公共元素。既属于集合A，同时又属于集合B的元素，在和中只算一次。

类似地，可以定义任意多（有限或无限）个集合的和：如果A_i是任意的集合，那么它们的和是这样一个集合，它包含的一切元素中的每一个元素，至少属于集合A_i之一，而不含有任何其他

的元素。两个集合的和，记为$A+B$或$A\bigcup B$。如果$A=A_1+A_2+\cdots+A_n$，那么简记为$A=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$或$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；如果$A=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$，那么简记为$A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$或$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。对于最简单情形，我们就采用第一种记法。不难看出，根据集合的定义，$A+A=A$。集合论加法的这个性质是与代数加法不同的。如果把A和B看作平面上的点的集合，那么它们的加法运算如图1所示。

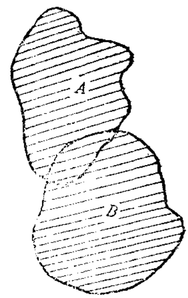


图 1

集合的和的例子：

整数集合是偶数集合A、奇数集合B与素数集合C的和；

三角形的集合是直角三角形集合、斜三角形集合、等边三角形集合与钝角三角形集合的和；

闭区间[0，5]的点的集合是闭区间[0，3]的点的集合与闭区间[2，5]的点的集合的和。

一集合含有集合A的一切元素，而不含集合B的元素，也不含其他的任何元素，这个集合称为**集合A与集合B的差**，并记为$A-B$或$A\setminus B$。

我们约定，仅当$A\supseteq B$时，使用第一种记法。在其他情形，也就是，当“减数”集合B的一切元素，不是都包含于“被减数”集合A中时，或者甚至集合A和B没有公共的元素时，就用第二种记法。这样一来，$A\setminus B$表示从集合A中把同时是集合B的一切元素即集合A与B的公共元素，去掉后所得到的集合。显然，$A-A=\varnothing$以及如果$A-B=C$，那么$A=B+C$。这个变换对于$A\setminus B=C$的情形已不适用。假定A与B是平面上点的集合，差$A-B$或$A\setminus B$如图2所示。

集合的差的例子：

偶数集合是整数集合与奇数集合的差；

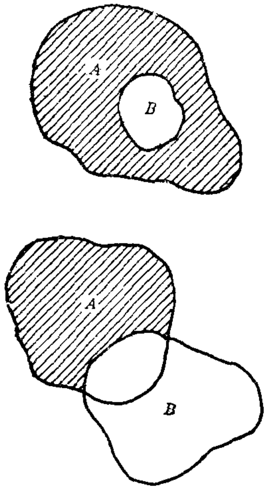


图 2

看得见的恒星和行星的集合是宇宙中一切恒星和行星的集合与看不见的恒星与行星的集合的差；

假设A是一切矩形的集合，B是一切菱形的集合，那么$A\setminus B$是不等边的矩形的集合；

如果A是闭区间$[0，1]$的一切点的集合，而B是闭区间$[2，3]$的一切点的集合，那么$A\setminus B$是闭区间$[0，1]$的一切点的集合；

如果A是一切有理数的集合，而B是一切实数的集合，那么$A\setminus B$是空集合。

如果同时由既属于集合A，又属于集合B的一切元素组成的集合，而且该集合只由这样的元素所组成，那么该集合称为**集合A与集合B的公共部分或交。**

一切由同时属于已知集合A_1，A_2，…，A_n，…中的每一个集合的元素组成，而且仅由这样的元素组成的集合，称之为任意多（有限或无限）个集合A_1，A_2，…，A_n，…的交。两个集合的交是非空集合时，就称这两个集合是相交的。两个集合的交是空集合时，就称这两个集合是不相交的。集合A与集合B的交，记为$A\cdot B$或$A\cap B$。如果$A=A_1\cdot A_2\cdots A_n$，那么简记为$A=\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$；或$A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；如果$A=A_1\cdot A_2\cdots A_n\cdots$，那么简记为$A=\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$或$A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。我们将使用第一种记法（在最近时期，数学书籍里才广泛地使用符号$\cup$和$\cap$）。

从集合的交的定义可知，$A\cdot A=A$；又若$A\subset B$，则$A\cdot B=$

A。假定A与B是平面上点的集合，它们的交如图3所示。

回到 $A\backslash B$ 型的减法。由差 $A\backslash B$的定义，可以得出等式$A\backslash B=A-A\cdot B$，今后将用到。

集合的交的例子：

矩形集合与菱形集合的交是正方形集合；

偶数集合与奇数集合的交是空集合；

圆心在坐标原点的一切圆内的点的集合的交，是它们的公共圆心，即坐标原点。

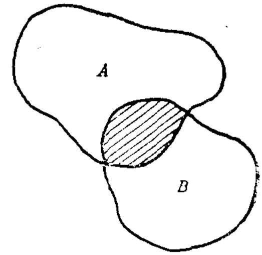


图 3

从集合的和及交的定义可知，集合的加法与乘法具有结合律和交换律的性质，即

$$A+B=B+A;$$
$$A\cdot B=B\cdot A;$$
$$(A+B)+C=A+(B+C);$$
$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C).$$

此外，可以证明集合的乘法具有关于加法或减法的分配律的性质，即

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C;$$
$$(A-B)\cdot C=A\cdot C-B\cdot C。$$

这些等式的证明方法是类似的。现在证明其中的第一个等式是正确的。为此，分别证明 $(A+B)\cdot C\subseteq A\cdot C+B\cdot C$ 和 $(A+B)\cdot C\supseteq A\cdot C+B\cdot C$，这就表明此两集合是重合的，即$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$。

设x是等式左边的集合$(A+B)\cdot C$的任一元素，$x\in(A+B)\cdot C$，由此推出，x同时属于$A+B$和C。如果$x\in A$与$x\in C$，那么，$x\in A\cdot C$，于是$x\in A\cdot C+B\cdot C$；如果x只属于B，且同时有$x\in C$，那么$x\in B\cdot C$，于是，$x\in A\cdot C+B\cdot C$。这样一来，属于等式左边的集合的一切元素，也属于等式右边的集合，即

$$(A+B)\cdot C\subseteq A\cdot C+B\cdot C。$$

再设x是等式右边的集合$A\cdot C+B\cdot C$的任一元素。如果$x\in A\cdot C$，那么$x\in A$，于是$x\in A+B$，又同时有$x\in C$，所以，$x\in(A+B)\cdot C$；如果$x\in B\cdot C$，那么，分别有$x\in(A+B)$和$x\in C$，由此得知，$x\in(A+B)\cdot C$。这样一来，属于等式右边的集合的一切元素，同时属于等式左边的集合，也就是，

$$(A+B)\cdot C\supseteq A\cdot C+B\cdot C。$$

§5　集合的等价性

设已给两个有限集合：含有n个元素的集合A；含有m个元素的集合B。于是它们之间只可能有下列的三种关系之一：

$$n=m；\ n>m；\ n<m。$$

关于应该有哪一种关系成立的问题，是不难解决的。我们可以对其中每一种情形用直接算出已给集合的元素数目的方法或者在它们的元素之间建立一一对应的方法。后一种方法的实质在于：如果进行比较的两个有限集合的元素数目是相等的，那么，第一个集合的每一个元素可以和第二个集合的元素“配成对”。例如，右手的每个手指可以和左手的同名手指合起来。两只手上所有的手指能配成对的事实，证明了两只手上的手指数目是相等的。显然这并没有直接计算手指的数目。又如，在中学生的航空节时，假如在广场上出现了关于两个学校参加节目的人数是否相等的问题，那么，可以不必用清点人数的直接计算方法来解决，我们可以把这两个学校的学生这样来配成对，使得每一对中，一个是第一个学校的学生，一个是第二个学校的学生。于是问题就解决了；或者两校的学生全部配成对，那么它们的人数是相等的；或者其中一个学校的某部分学生，由于另一个学校缺少与之对应的学生而没有配成对，那么有一个学校的学生就多些。

如果已给的集合A与集合B是无限的，那么讨论其元素的数目是没有意义的，也就是说，按元素的个数来比较两个无限集合