现代通信译丛

网论—网络流

[美] 陈惠开 著

吴哲辉 刘昌孝 译

王兆明 审校

人民邮电出版社

登记证号(京)143号

内容简介

本书阐述了网络的基本理论；讨论了诸如电话网、管道网、电力网以及航空网等网络共同的基本问题、基本性质和求解方法。

全书共六章。第一章给出图与网络的基本术语和分析结论；第二章介绍最短有向路径问题；第三章讨论有限容量网络中点到点的最大流问题；第四章讨论最小树问题并将端点对流推广到多端点流；第五、六两章讨论网络流定理用于网络可行性和子图问题。

全书力求数学严密，定理证明严格且方法新颖，还给出了一些有效算法，定义了一些基本概念并辅以大量实例。不要求读者具备网络预备知识。

本书可供我国大专院校的电子工程、计算机科学的专业师生、工程师和科技人员阅读。

现代通信译丛
网论—网络流
〔美〕陈惠开　著
吴哲辉　刘昌孝　译
王兆明　审校
*
人民邮电出版社出版发行
北京东长安街27号
人民邮电出版社河北印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所经销
*
开本：850×1168　1/32　　1992年　8月　第一版
印张：15 24/32　页数：252　1992年8月河北第1次印刷
字数：416千字　　印数：1—2 000 册
ISBN7-115-04710-3/TN·531
定价：12.80元

目　　录

前　言

自本世纪五十年代初以来，网络流理论取得了重大的发展。它广泛应用于电气工程、计算机科学、社会科学，也用于解决经济问题。实际上，任何一个包含二元关系的系统都可以用网络来描述。本书阐述了网络的基本理论，讨论了所有这些网络共同的基本问题、基本性质以及求解的方法。这些网络可以是电话网、管道网、电力网以及航空网等等；它们分别承担通讯、传送、输配或商品流通等任务。全书力求数学严密，几乎所有的定理都有严格的证明，并采用了许多新颖的证明方法。此外，还给出了一些有效的算法，定义了一些基本概念并辅以大量实例予以说明。因此，不要求读者具备网络方面的预备知识。

全书共六章。第一章给出了描述图和网络的基本术语和许多在后面分析中要用到的结论。读者在学习其它章节前应仔细地阅读这一章。第二章全面介绍了最短有向路径问题。第三章讨论在有限容量的网络中，从一点到另一点的最大流问题。这是本书最基本的论题，其结论可用于回答网络可行性及其组合问题。第四章讨论最小树问题并将端点对流推广至多端点流。第五、六两章讨论网络流定理用于网络可行性和子图问题。

本书所论述的内容已在伊利诺大学芝加哥校区讲授过多年。本书既可选作一学期课程，也可选作一季的课程。例如，前五章的内容可作为一学期的课程，而前四章的内容则可作为一季的课程。此外，本书的叙述与结构也适用于工程师和计算机专家们自学。

著者感谢这几年来参加本书内容检验的众多学生。特别感谢博士研究生唐惠、杨柳和天津大学的访问学者王慧云，他们仔细地阅读了本书手稿。唐惠还协助编制了索引并与杨柳一道校对了全部手稿。最后，向我的妻子筱玲和两个孩子杰罗米和梅里莎致谢，感谢

他们在本书编写过程中所表现出的耐心和理解。

陈惠开
于芝加哥

第一章　图和网络

许多实际的网络，诸如电话网、管道网、电力网以及航空网等，它们承担着通信、传送、输配或商品流通等任务。我们可以直观地用一个称为图的几何图形来描绘这些网络。这里要讨论的图是由节点或点、以及连接一些节点的边或线构成的简单几何图形。这种图有时称为线图。本章将给出描述图的基本术语和在以后分析时要用到的基本结论。

1.1　抽象图的基本定义

抽象图$G(V, E)$或简单地称图G，由集合V和E构成。集合V的元素称为节点；集合E的元素称为边，它是以(i, j)或(j, i)形式出现的无序对，其中$i, j \in V$。与节点等价的名称有顶点、点、连结点、零单纯形、零元胞和元素。与边等价的名称有线、支路、弧、1单纯形和元素。我们说边(i, j)连在结点i、j间，也可以说边(i, j)与节点i、j相关联，或者说节点i、j与边(i, j)相关联。在实际应用中，图常常用一个几何图表示。图中节点用小圆圈或小黑点表示。设任意两个节点i和j，若(i, j)是集合E中的边，则用连续曲线或直线连结节点i和j。

在许多情况下，允许一对节点间连结几条不同的边会给我们带来方便。这几条边称为并行边。连结节点i，j的并行边可记为$(i, j)_1$，$(i, j)_2$，…，$(i, j)_k$，$k \geqslant 2$。除非特别说明，(i, j)通常表示节点(i, j)间的任意一条边。节点i、j称为边(i, j)的端点。我们也允许边的两个端点是同一点，这样的边

称为自环。若一个节点有两个以上的自环，这些自环也称为并行边。在几何图中，并行边可用连结同一对节点的连续曲线表示，自环（i，j）则用不经过其它节点的闭合圆弧线来表示。

例如，考察图$G(V、E)$，其中

$$V=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\} \tag{1.1}$$

$$E=\{(1,\ 2),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6)_1,\ (4,\ 6)_2,\ (3,\ 3)_1,\ (3,\ 3)_2,\ (6,\ 6),\ (7,8)_1,\ (7,\ 8)_2,\ (7,\ 8)_3\} \tag{1.2}$$

相应的几何图如图1.1所示。其中节点6处有一个自环，节点3处有两个自环，节点4和6间有两条并行边，节点7、8间则有三条并行边。这里需要强调指出，在一个图中，边（i，j）中的节点i，j的顺序并不重要。我们认为（i，j）=（j，i）。也就是说（1，2）=（2，1），$(7,8)_1=(8,\ 7)_1$等等。

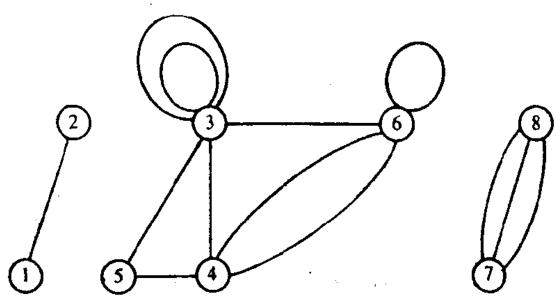

图 1.1　抽象图的几何图表示

若集合V和E是有限集，则图$G(V,\ E)$是有限图。在本书中，我们将仅讨论有限图。无限图具有一些非常有趣的性质，有兴趣的读者可参阅*König*（1950）和*Ore*（1962）的著作。

若V_s和E_s分别是V和E的子集，那么图$G_s(V_s,\ E_s)$是图$G(V,\ E)$的子图，若V_s或E_s是真子集，则该子图称为真子图。若$V_s=V$，则该子图称为生成子图。若V_s和E_s是空集，则该子图是空图，用符号ϕ表示。空图可以认为是任意图的子图。不与任何边相关联的节点称为孤立节点。

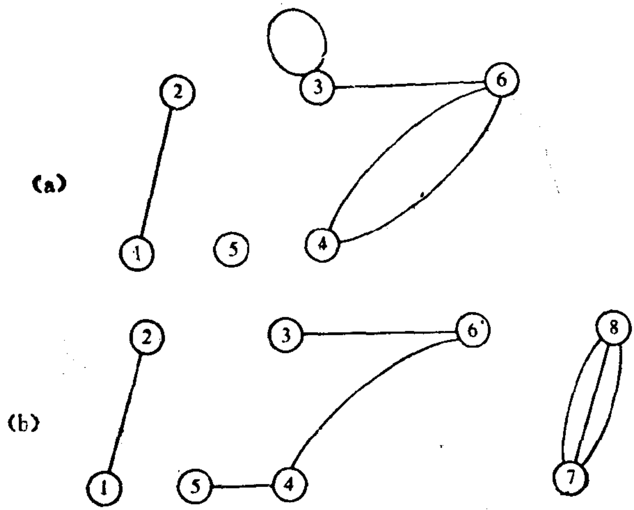

图 1.2　图1.1所示图的两个子图
(a)含孤立节点 5 的子图
(b)生成图

图1.2画出了图1.1所示图的两个子图。在图1.2(a)的子图中，节点 5 是孤立节点。图1.2(b)是一个生成子图，因为它包含了图1.1所示图的所有节点。最后，图1.2中的两个子图都是真子图。

若两个子图没有共同的边，我们说这两个子图是边不相接子图。若两子图没有共同的节点，则这两个子图是节点不相接子图。显然，两个节点不相接的子图必定是边不相接子图。但是反过来却不一定成立。对于不含孤立节点的子图，我们可以通过列出所有边来表示这个子图。例如图1.1的两个子图

$$G_1=(1,\ 2)(3,\ 3)_1(3,\ 6)(6,\ 6) \qquad (1.3a)$$

$$G_2=(4,\ 5)(7,\ 8)_1(7,\ 8)_2 \qquad (1.3b)$$

是节点不相接子图，因此也是边不相接子图，在图1.3中画出了这两个子图。另一方面，图1.2(a)和图1.3(b)是两个边不相接子图，但不是节点不相接子图。

在图G中，若 (i, j) 是G的一条边，我们说节点i, j邻接。所

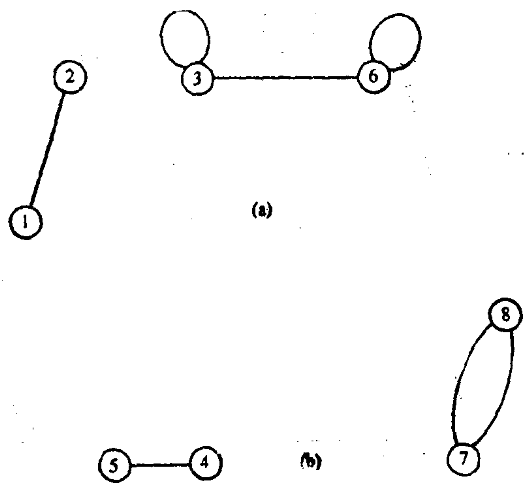

图 1.3 图1.1的两个节点不相接子图 (a)G_1 (b)G_2

有与 i 邻接的节点称为 i 的邻接节点。若G_s是G的一个子图，$\overline{G_s}$也是G的子图，它由G中所有不属于G_s的边集$\overline{E_s}$、所有不属于G_s的节点以及在$\overline{E_s}$中的节点构成。$\overline{G_s}$和G_s互补。显然，G_s和$\overline{G_s}$边不相接，但不一定节点不相接。它们的节点集不一定互补。在G中，空图的补图是G本身，而G的补图是空图。我们说G_s和$\overline{G_s}$是G的互补子图。例如，图1.4是图1.1所示图的两个互补子图。

在上述讨论中，我们说一个图可以用一个几何图形表示。然而，作图时无论节点位置以及连线形式的选取都有很大的自由度。因此，表示同一图的几个几何图形可能看起来迥然不同。这样，我们希望寻求一种确切的方法来说明两个画得不同或者标记不同的几何图形确实代表同一个图。为此，我们引入以下几个必要的术语。

定义1.1

同构 若两个图G_1和G_2的节点集的元素一一对应，边的元素也一一对应，并且相应的边和相应的节点相关联，则这两个图G_1和G_2同构，记为$G_1=G_2$。

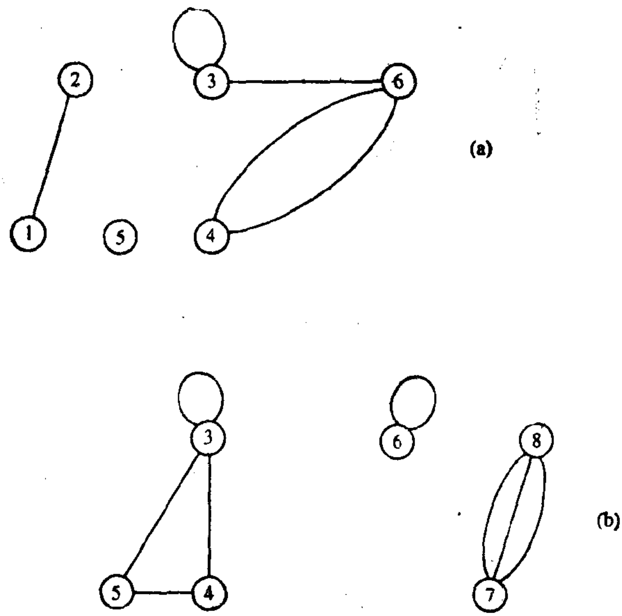

图 1.4 图1.1的两个互补子图

因此，当且仅当一个图中各条边所连接的节点与另一图中相同数量边所连接的节点对应时，这两个图同构。这个定义说明了两个图同构的两个条件：首先，它们有相同数目的边和节点；其次，关联关系相同。但后者往往难以确定。

图1.5中的$G_1(V_1, E_1)$和$G_2(V_2, E_2)$看起来迥然不同，但却同构。我们通过考察它们的节点集中相应的元素$i \in V_1$和$i' \in V_2$（$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$）来确定这种同构关系。不难看出两图中相应的边和相应的节点相关联。换言之，它们的关联关系也是一致的。然而，图1.6中两个图的节点集虽然一一对应，并有一些相同的邻接关系，它们却不同构。

对图中的节点或边加注适当标记的图称为标记图。本书中，图和标记图被认为是同义词。迄今为止，我们讨论的图都是标记图，

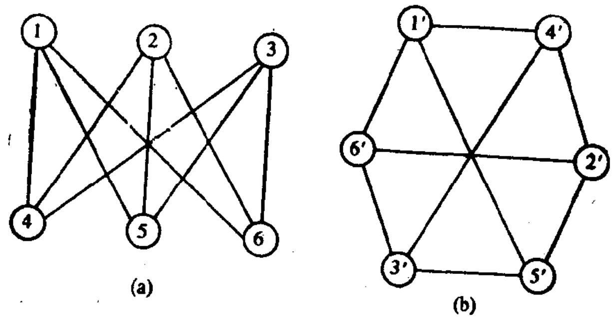

图 1.5 同构图G_1(a)和G_2(b)

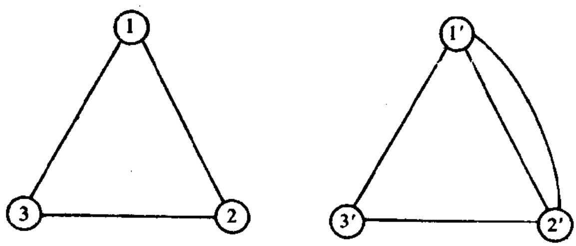

图 1.6 两个不同构图

用整数1，2，…或1′，2′，…作为节点的标记。若在图中对边或节点，或两者同时赋以权重的图称为加权图。图1.7是一个标记加权图的实例。图中对节点标以整数1，2，3，4，5，对边则赋以权重，例如，权可用以代表两节点间的距离。

定义1.2

边序 图G中边的有限序列

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{k-1}, i_k) \tag{1.4}$$

称为长度为$k-1$的边序，其中$k \geqslant 2$。若$i_1 = i_k$，则称边序是闭合的，否则便是开放的。在开放边序中，节点i_1称为始点，节点i_k称为终点，i_1和i_k都称为端点，所有其它节点称为内节点。

在一个边序中，同一节点可以重复出现，同一条边也可以出现几次。例如，在图1.7中，边序

$$(1,2), (2,4), (4,2), (2,3), (3,5), (5,3), (3,4) \tag{1.5}$$

是长度为 7 的开放边序。节点 1 是始点，节点 4 是终点。边序

(5,2)，(2,4)，(4,3)，(3,4)，(4, 1)，(1,5)　　(1.6)

是长度为 6 的闭合边序。

我们说边序（1.4）连接在始点和终点或者节点i_1与节点i_k之间。当$k \geqslant 2$时，(i_{x-1}, i_x)和(i_x, i_{x+1})，$1 < x < k$，称为边序中的顺序边。孤立节点可以认为是长度为零的边序。

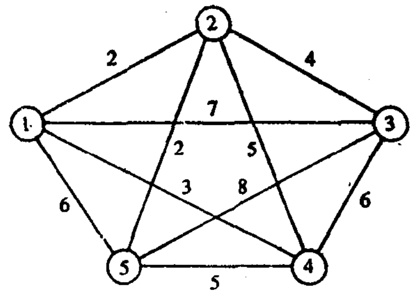

图 1.7　标记加权图

定义1.3

边列　若边序中所有的边都各不相同，则称这样的边序为边列。

由此可见，边列可以多次通过同一节点但不能重复已通过的边，边序却不受此限制。在图1.7中

(1,2)，(2,4)，(4,3)，(3,5)，(5,4)　　(1.7)

是长度为 5 的一条开放边列。若除始点和终点外，边列中所有节点都各不相同，则引出常用的路径和回路的概念。

定义1.4

路径　在式(1.4)中，若节点i_1，i_2，…，i_k都不相同，则此式所表示的开边序称为长度为$k-1$的路径。孤立节点可以认为是长度为零的路径。

定义1.5

回路　在式(1.4)中，若$i_1 = i_k$，且节点i_1，i_2，…，i_{k-1}都不相同，则此式所表示的闭边序称为长度为$k-1$的回路。

因此，自环是长度为 1 的回路。就字面意义而言，回路就是闭合环或环。在图1.7中，开边序

(1,2)，(2,4)，(4,5)，(5,3)　　(1.8)

是长度为 4 的路径。闭边序

(1,2)，(2,4)，(4,5)，(5,3)，(3,1)　　(1.9)

是长度为 5 的回路。

定义1.6

连通性 若图中每一对节点间都存在着路径，则此图是连通图。

直观地说，连成一片的图是连通图。图1.5(a)、图1.5(b)和图1.7都是连通图，而图1.1是非连通图。

定义1.7

连通片 图中含有最大边数的连通子图称为该图的连通片，或简称片。孤立节点也是一个连通片。

由此可推断，非连通图必定含有多个连通片。其中一个或几个连通片可能是孤立节点。例如，图1.2(a)有三个连通片，其中一个连通片是孤立节点。

定义1.8

秩 若图含有n个节点和 c 个连通片，$r=n-c$定义为该图的秩。空图的秩是零。

定义1.9

零度 若图含有 b 条边、n个节点和 c 个连通片，$m=b-n+c$ ($=b-r$) 定义为该图的零度。空图的零度是零。秩和零度是图论中经常遇到的两个数。与零度等价的名词有回路秩、绕动数、环秩、连接度和一阶贝蒂数。所有这些数都是非负数。这将在下述定理中得到说明。

定理1.1

图的秩和零度是两个非负数。当且仅当图内不含回路时，该图的零度为 0 。当且仅当图内仅含一个回路时，该图的零度为 1 。

不难证明，非连通图的秩和零度是各连通片的秩和零度之和。

定义1.10

度 图中某节点 i 的度$d(i)$等于与该节点相关联的边数。

由此，孤立节点的度数是 0 。由于每条边与两个节点相关联，因此所有节点的度数和是边数的两倍：

$$\sum_{i=1}^{n} d(i)=2b \tag{1.10}$$

定理1.2

图中所有节点的度数和是该图边数的两倍。

若V_1和V_2分别是图中度数为奇数与偶数的两个节点集，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(i)-\sum_{j\in V_2} d(j)=\sum_{k\in V_1} d(k) \tag{1.11}$$

并且左端点总是偶数。由此得出下述推论：

推论1.1

图中度数是奇数的节点数总是偶数。

在图1.8中，图G的秩是5（$=7-2$），零度是6（$=11-7+2$），各节点的度数是：

$$d(1)=2,\ d(2)=2,\ d(3)=2,\ d(4)=6$$
$$d(5)=3,\ d(6)=3,\ d(7)=4 \tag{1.12}$$

度数和是

$$\sum_{i=1}^{7} d(i)=2+2+2+6+3+3+4=22=2\times 11 \tag{1.13}$$

奇度数的节点有两个，它们是节点5和节点6，这就验证了奇度数的节点数为偶数的论断。

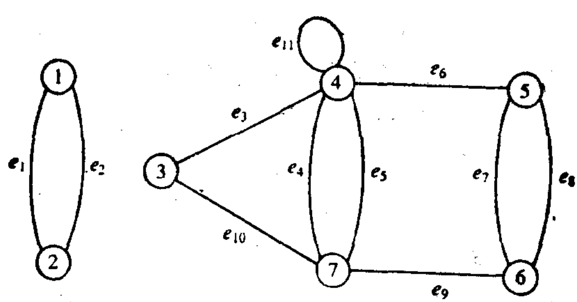

图 1.8 用以说明秩、零度和度的图