有用的0与1

YOU YONG DE 0 YU 1

科学普及出版社

有用的0与1

唐　洪　编著

科学普及出版社

1979年北　京

内 容 提 要

随着数字电子计算机的问世与广泛应用，有限数学越来越受到人们的重视，而中学数学教材中很少有这样的内容。本书用师生对话的形式，通俗地介绍了有限数学的一些最基本的内容以及它们的一些应用，内容涉及集合、二进位数、电子计算机、逻辑代数、逻辑方程和逻辑设计等。可供中学生、中学教师及计算机工作者阅读参考。

有用的0与1

唐 洪 编著

科学普及出版社出版（北京西郊友谊宾馆）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

外文印刷厂印刷

•

开本：787×1092毫米1/32 印张：$2\frac{3}{4}$ 字数：62千字

1979年6月第一版 1979年6月第一次印刷

印数：1—400,000册 定价：0.25元

统一书号：13051·1010 本社书号：0011

目　　录

引　　子

故事发生在一个中学里，讲的是两个师生谈数学问题。年青人小明，是一个勤学好问的初中三年级学生，又是个球迷；年长者姓李，是一位兴趣颇为广泛、酷爱钻研的数学教师。他们是师生，小明经常在课堂上听李老师的讲解。他们又是邻居，课后联系十分方便。但是他们所以来往频繁，主要还是因为他们都对数学有一种特殊的爱好。在他们的交往中，李老师给小明讲了不少有趣的数学故事和数学知识。他们从看球谈到编码、二进位数；又由电子计算机谈到逻辑代数、逻辑方程和逻辑设计。这

0 与 1

就是在他们的全部话题中经常提到的两个字。

一、由看球想到的集合

一个星期六的晚上，李老师和小明一起来到首都体育馆的看台上。不一会，参加比赛的队员就一个个入场了。小明问：

“李老师，我们现在看到的球场上有什么数学吗？”

李老师说：“有！你看，这些队员每一个人的运动衣上都印一个号码（图 1-1），这是为了让裁判员、记分员和我们

图 1-1

这些观众看清，是几号进了一球，是几号犯了规。由于这个原因，同一个队的队员每人只能给一个号码，不同的人需给不同的号码。这叫给每个队员编排号码，简称为编码。编码是一门学问，其中用到的数学还不少呢。你要有兴趣，回去给你慢慢讲。”

比赛开始了，他们立即被精彩的球艺吸引住，但是一散场，小明就又问开了：

“李老师，您刚才是说，编码也是一种数学吗？”

“确切一点说，”李老师一边走一边说，“是编码中要用到一些数学知识。首先要用到集合的概念。”

“听说以后中学里也要讲集合了，但我还不知道什么是集合？它有定义吗？”

“在逻辑严格的数学中，集合这个概念是不加定义的。”

“那为什么？”小明问。

“这是因为，在这种数学中概念是分层次的，集合是最原始、最抽象的概念之一。只能用这种概念来定义其他较具体的概念，而不能用其他的概念来‘定义’它们。这叫做数学的概念体系。在这种数学中，定理也有类似的情况，最原始的、不可用其他定理来证明的定理叫公理(或公设)。只能用公理来证明其他的定理，而不能用其他定理来证明公理。否则就要发生逻辑循环，引起逻辑混乱。”

“那如何解释集合的定义呢？”

“有两种办法，一种是通过举例来说明什么是集合；另一种是离开这种数学的概念体系，用日常的语言来阐述集合的含义。”

“用日常的语言怎么阐述？”

“经验告诉我们，世界上的一切事物，都有一定的性

质。只有某些事物才具有的性质，叫做这些事物的特有性质，也就是通常所说的特性，某些事物都具有的性质，则叫做这些事物的共性。按照特有性质，可将事物划分为不同的类，这种类就是所谓的集合（也简称为集）。组成集合的成员叫做集合的元素（也简称为元）。”

“您说得太抽象了，我还不很懂。您能举一两个具体的例子解释一下吗？”

“当然可以。例如你们三二班共有35个同学，这35个同学就组成一个集合，叫全集（也就是全体成员组成的集合）；由全集中的一部分成员组成的集合叫子集（或部分集）。例如由你们班挑6个人组成一个球队，则这6个人组成的集合（可叫球队集合），就是班集合的一个子集。”

“怎样表示一个集合呢？”

“有两种办法。一种叫枚举法，就是把集合的元素一个一个列举出来，然后在它们的前后加一个花括号。例如，你们班的6个队员分别叫a, b, c, d, e, f；球队叫A；那么用枚举法来表示就是

$$A=\{a, b, c, d, e, f\},$$

这个数学表达式的意思是说，球队集合A是由队员a, b, c, d, e, f组成的。”

“另一种表示集合的方法是什么呢？”

“另一种叫示性法。因为集合是按特性划分出来的，指出这种特性也就表示了相应的集合。所谓示性法，也就是这种用指出特性来表示集合的方法。例如，假如你们班叫B，用示性法表示则B就可写成

$$B=\{x \mid x\text{是三二班的同学}\},$$

其中的x代表你们班的每一个人，叫代表元，竖号右边的话

‘x 是三二班的同学’就是 x 的特性。由于集合与划分有关，所以集合的代表元的特性，也常常表达为从属特性，这种特性通常叫特有属性。‘x 是三二班的同学’就是代表元 x 的特有属性。”

“球队集合 A 用示性法怎么表示？”

“表示为

$$A=\{x \mid x\text{ 是三二班的同学，}x\text{ 是兰球队员}\},$$

注意，这时 x 的特有属性是两个。”

“这是日常生活中的例子。请您举个数学上的集合的例子，好吗？”

“数学上的集合的例子就更好说了。由一些点组成的集合叫点集，由一些数组成的集合叫数集。以数集为例，所有正整数组成的集合叫正整数集，数学上通常用 Z^+ 表示：

$$Z^+=\{1, 2, 3,\cdots\}。$$

如果取正整数集 Z^+ 为全集，则从正整数中随便取出 6 个，例如

$$1, 2, 5, 6, 8, 9,$$

那么，这 6 个正整数就又组成一个集合：

$$\{1, 2, 5, 6, 8, 9\}。$$

如果用这 6 个数作为号码，那么这个集合就是一个号码集。要是用 C 表示这个号码集，则可写成

$$C=\{1, 2, 5, 6, 8, 9\}。$$

现在我来问你：这里的号码集 C 与正整数集 Z^+ 是什么关系？”

“C 是 Z^+ 的子集。”

“对。Z^+ 的子集是很多的，例如正偶数集

$$E^+=\{2, 4, 6, \cdots\}$$

及正奇数集

$$O^{+}=\{1,3,5,\cdots\}$$

也是正整数集Z^{+}的子集。”

“李老师，有人说一个集合也是它自己的子集，这种说法对吗？”

“这样说是对的。因为在数学上子集是这样定义的：如果集合 N 的元素都是集合 M 的元素，就称 N 是M的子集。因为任何一个集合的元素当然都是它自己的元素，所以任何一个集合（根据上述定义）也是它自己的子集。”

“这就是说，全集也是一种子集？”

“对。不是全集的其他子集叫真子集。在数学上，若N是 M 的真子集，则用

$$N \subset M$$

表示；但如果说N是 M 的子集，则应写成

$$N \subseteq M,$$

读作‘N属于M’或‘M包含N’意即

$$N \subset M \quad 或 \quad N = M,$$

其中 N = M 即全集是子集的情况。”

“李老师，我看这

$$M \supseteq N$$

有点象我们代数中的

$$a \geqslant b,$$

是吗？”

“是有点象，例如，由

$$M \supseteq N \quad 及 \quad N \supseteq L,$$

可推得

$$M \supseteq L,$$

这与由

$$a \geqslant b \quad 及 \quad b \geqslant c$$

可推得

$$a \geqslant c$$

相似；又如，由

$$M \supseteq N \quad 及 \quad N \supseteq M$$

可推得

$$M = N,$$

这与由

$$a \geqslant b \quad 及 \quad b \geqslant a$$

可推得

$$a = b$$

相似。但是也有不相似的地方，例如，对于任意的两个实数 a 和 b，关系式

$$a \geqslant b \quad 与 \quad b \geqslant a$$

至少有一个成立；但并不是任意两个集合M及N也有这种性质。例如，当

$$M = \{1, 2, 3\}, \ N = \{2, 3, 4\}$$

时，M与N谁也不包含谁，也就是说，这时

$$M \supseteq N \quad 及 \quad N \supseteq M$$

都不成立。”

“对于数可以进行加、减、乘、除等运算，对于集合也可以进行运算吗？”

“可以，而且你们早就做过这类运算。”

“是吗？”

“是的。例如，用两个集合 M 与 N 的公共元素组成的集合叫做 M 与 N 的交集，记为 $M \wedge N$。由两个（或多个）

已知集合求它们的交集的运算叫做交运算。这种运算你们过去就已经做过，只是因为当时头脑中没有集合的概念，因而并未自觉地意识到。”

“请您举个例子说明一下。”

“例如三角形 ABC 的重心，就是这个三角形的三边中线的交点。每一条中线就是这条中线上的点所组成的一个点集合，三条中线的交点就是三个点集合的公共点，这个公共点组成的集合就是这三个点集的交集。所以当你作三条中线以求它们的交点时，你实际上是在由三个点集合求它们的交集。”

“原来是这样。”

“如果用示性法来表示集 M 和 N 的交集，则应写成

$$M \wedge N = \{x \mid x\text{是 M 和 N 的公共元素}\}$$
$$= \{x \mid x\text{是M的元素而且 x 也是N 的元素}\}。$$

除交运算外，还有并、求补及求差几种集合运算。”

“什么是并运算？”

“集合M的元素与集合N的元素合在一起（相同的元素只算一个）组成的集合，叫做M与N的并集，记为M ∨ N：

$$M \vee N = \{x \mid x\text{是 M 的元素或x是 N 的元素}\}。$$

由已知集合求并集的运算叫并运算。当

$$M = \{1, 2, 3\}, \quad N = \{2, 3, 4\}$$

时，二者的交集是

$$M \wedge N = \{2, 3\},$$

二者的并集为

$$M \vee N = \{1, 2, 3, 4\}。”$$

“李老师，并运算我们过去没有做过吧？我想不到有什么例子。”

“也做过。例如，小刘有3种文具：

铅笔，直尺，橡皮，

小王有4种文具：

铅笔，刀子，直尺，钢笔，

现在我问你，他们共有几种文具？”

“不能说共有7种，只能说共有……” 小明想了一下说：“共有5种。”

“对。共有7个，但总共只有5种。问题在于，这5种是怎么算出来的？这里实际上应用了并集的概念。这是因为，小刘的文具集

A＝{铅笔，直尺，橡皮}

与小王的文具集

B＝{铅笔，刀子，直尺，钢笔}

的并集为

A∨B＝{铅笔，直尺，橡皮，刀子，钢笔}，

它的元素共有5个，故他们共有5种文具。所以这5种实际上是由并集的元素数出来的。由此看出，一些知识就象空气一样充满在我们的周围，但我们往往熟视无睹，并不自觉。这就存在一个善于学习的问题。就是说，不但要多看，还要多想，多提几个为什么。”

“什么是求补及求差运算？”

“用是M的但不是N的元素组成的集合，叫做M与N的差集，记为M—N：

M—N＝{x|x是M的元素，但x不是N的元素}，

求差集的运算叫求差运算。当N是M的子集时，则M与N的差集改叫补集，记为$\overline{N}$：

$\overline{N}$＝{x|x是全集M的元素，但不是子集N的元素}。

求补集的运算叫求补运算。若

$$M=\{1,2,3\},\qquad N=\{2,3,4\},$$

则差集

$$M-N=\{1\};$$

若

$$M=\{1,2,3\},\qquad N=\{1,3\},$$

则补集

$$\overline{N}=\{2\}。$$

为了简单明了，我只是用元素很少的有限集做例子来说明这几种运算，对于无限集情况也类似。”

“什么叫有限集？”

“从组成集合的元素的多少，可将集合大体分为两种。一种集合，象正整数集，三角形 ABC 的中线 AD 上的所有的点组成的点集等，它们的元素有无限多个，这种集合叫无限集；另一种集合，象班集合，球队集合等，它们的元素是有限个，这种集合叫有限集。与有限集有关的数学叫有限数学。相当简单但又相当有用的有限集是

$$\{0,1\},$$

与这个集合有关的有限数学，在电子计算机的计算与设计中已得到广泛的应用。”

他们一边走一边谈，不知不觉已回到了家门口，李老师说：“好了，到家了，以后再谈。”

二、数与数字的故事

李老师一家每逢星期天总要去公园玩一玩。小明的问题还没问完，也就跟他们一起去了。

盛夏的公园，景色特别宜人。

李老师他们来到湖边，上了一只游艇。他们一边划船一边又谈开了昨天的话题。小明问：

“李老师，给几个队员编号码，不是很简单的事吗，有什么大学问？”

“昨天已说过集合。在这种编码中要涉及到两个集合：队员组成的集合

$$A=\{a, b, c, d, e, f\},$$

与号码组成的集合

$$C=\{1, 2, 5, 6, 8, 9\},$$

这种编码要求：每个队员只能给一个号码，不同队员必须给不同号码。例如可以这样分配号码：

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 8 & 9 \end{array}$$

这在数学上叫‘一一对应’。”

“这不是很简单吗?!”

“只有几个元素的集合，当然简单。要是一个集合的元素很多，成千上万，另一个又很少，例如只有两个，那你怎样去编码，怎样去对应呢?!”

“我还不明白您具体指什么。”

“例如，把队员变成所有的汉字，不是成千上万吗？把

号码变成点和划这两个符号，不是很少吗？你能用什么办法标记、区别那么多的汉字？”

“这倒有点难。”

“再说，用很少的几个数，怎样表现很多的数？例如，只用 0 及 1 这两个数，怎样表现所有的非负整数？

“只用 0 和 1 表现所有的非负整数？”

“对。由于 0-1 集

$$\{0,1\}$$

是非负整数集

$$\{0,1,2,3,\cdots\}$$

的一个真子集，所以这个问题也可以这样说，怎样用一个真子集去给全集编码？而且是真子集的元素个数很少，只有两个，而全集的元素个数又很多，有无限多个。”

“有只用 0 和 1 表现的数吗？”

“有。这种数叫‘二进位数。’电子计算机中就使用这种数。用 0 和 1 编所有的非负整数，就象用英文字母拼英文字一样。用 0 与 1 拼数时，0 仍代表‘零’，1 仍代表‘一’，但‘二’就没有数字代表了（见表 2-1），就得用添一位的办法来解决，用

$$10$$

来代表。所以在这种拼数法中是逢二进一的，因此这样拼出的数叫二

表 2-1

二进位数	十进位数
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
……	……

进位数，而其‘字母’0及1就叫二进位数字。”李老师停了一下，又说：

“我在课堂上多次讲过，你们学数学要注意举一反三，触类旁通。现在你想想，通常的数叫十进位数，这十进位数的‘字母’是什么？又为什么叫‘十进位数’？”

小明点了点头，但没有马上回答。他用心地想了一下才说：

“拼成通常的十进位数的数字不出如下的十个：

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

这十个数字就是十进位数的全部‘字母’了；而这十个‘字母’分别代表从零到九的十个数，但“十”就没有数字代表了，因而就得添一位，用两位数字

10

来代表，这就是说，在这种拼法中是逢十进一的，所以这种数叫‘十进位数’。”

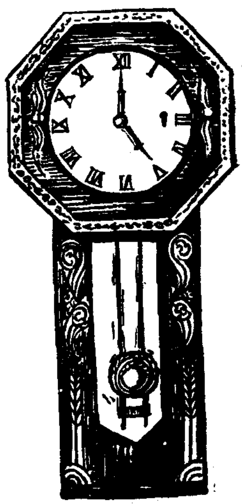

图 2-1

“很好，就是这个道理。要知道，人们找到这个简便办法，搞清楚这个道理，是花了很多心血，走过了漫长的道路的。”李老师停了一下，想到一个与此有关的故事，“现在美国有个大城市叫纽约，它的原文是 New York，意思是‘新约’，就是说它是新约城。”

“有旧约城吗？”

“有。这个城市的名字叫 York。”

“它在那儿？”