

高等学校教学用书

理論力学基本教程

上册

И. И. 蒲赫哥尔茨著

高等教育出版社

高等学校教学用书



理論力学基本教程

上册

H. H. 蒲赫哥尔茨著
錢尙武 錢敏譯

高等教育出版社

本書系根据苏联技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的蒲赫哥尔茨 (Н. Н. Бухгольц) 著“理論力学基本教程”(Основной курс теоретической механики) 1959 年修訂第四版譯出。原書經苏联高等教育部审定为綜合大学和师范学院物理系、数学系教科書。

本書中譯本分上下兩册出版。上册內容包括运动学、靜力学和質点动力学。

本書原由商务印書館出版,自 1957 年 8 月起改由本社出版。

理論力学基本教程 上册

Н. Н. 蒲赫哥尔茨著

錢尙武 錢 敏譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号
(北京市書刊出版業營業許可證出字第 054 号)

上海市印刷四厂印刷 新华书店发行

統一書号 13010·358 开本 850×1168 1/32 印張 12 15/16
字數 353,000 印數 12,001—16,000 定价 (4) 1.50

1954 年 1 月商务初版 (共印 23,000 册)

1957 年 8 月第 1 版 1959 年 11 月上海第 8 次印刷

第一版序

本教程目的爲供綜合大學和技術學院學生學習理論力學時作參考,在這些學校裏,理論力學已經成爲一個獨立的科目。本書也可以供工程師們用,假如他們希望補充和加深他們在技術學校所得到的關於這門學問的知識。

教程的材料就是我最近幾年在莫斯科國立大學授課時所給的講演;這些講演的一部分曾由我的學生們記錄下來,而用石印出版過,我對這些同學表示深切的謝意。

在講解中我力求運用新的方法,尤其是矢算,它是當前力學和數學物理各部門最適用的一種數學工具。關於矢算的必要知識都安置在教程第一章內。

這本書是全教程的第一部分,包括運動學、靜力學和質點動力學;教程的第二部分在短時期內就要出版,它包含質點組動力學、剛體動力學和分析力學。

И. 蒲赫哥爾次 1932 年序於莫斯科

第 三 版 序

“理論力學基本教程”的第三版是由該教程的前兩版改寫而成的，前兩版內的疏忽之處以及印刷上的小錯誤都已修正，同時也引進了一些更改和補充，一些表示矢量的符號也改變了，即以叉號而不以方括號表示矢積，而以兩相乘因子之間的一點表示標積；括號則在特殊的意義下才用，就是用作組合符號。

我謹向所有為本書各種缺點提過意見的同志表示深切的感謝。

И. 蒲赫哥爾次 1938 年序於莫斯科

上 冊 目 錄

第一章 引論	1
§ 1 理論力學的研究對象	1
§ 2 矢量	8
運動學	37
第二章 質點運動學	37
§ 1 基本概念	37
§ 2 直線運動	43
§ 3 曲線運動	49
第三章 質點系和剛體的運動學	75
§ 1 力學系統	75
§ 2 剛體的基本運動	79
§ 3 平面平行運動	92
§ 4 剛體繞固定點的運動	103
§ 5 剛體的複合運動	108
§ 6 剛體複合運動的一般情形	116
§ 7 相對運動	127
靜力學	137
第四章 初等(幾何的)靜力學	137
§ 1 動理學引論	137
§ 2 定義和公理	152
§ 3 作用於同一點的力所成的力系, 共點力	158
§ 4 摩擦和有摩擦的約束	164
§ 5 平行力	170
§ 6 重心	179
§ 7 力矩	193
§ 8 力偶論	196
§ 9 空間力系	203
§ 10 力系的特殊情形	210

§ 11 力系平衡的條件	215
§ 12 作圖靜力學原理	222
第五章 分析靜力學	231
§ 1 力所作的功和力場	231
§ 2 質點靜力學	247
§ 3 質點組靜力學	260
§ 4 柔順的不可伸長的線的平衡	269
動力學	281
第六章 質點動力學	281
§ 1 運動方程式和基本定理	281
§ 2 質點的直線運動	305
§ 3 諧振動	316
§ 4 自由質點的曲線運動	329
§ 5 自由質點在輻力作用之下的運動	335
§ 6 非自由質點的運動	348
§ 7 質點的相對運動	375
§ 8 曲線坐標下質點的運動方程式(拉格倫日方程式)	387
人名索引	397
索引	398

第一章 引論

§1 理論力學的研究對象

1. 理論力學是研究物體運動規律的科學。實質上理論力學是數學物理中的一部門，由於它對自然科學和技術的廣大應用，才分化出來成為一個獨立的科目而有了很大的發展。

因為運動，從這個字最廣泛的意義上來了解，是物質的存在形態，它包括宇宙間發生的一切變化和過程，所以理論力學是自然科學和技術科學的基礎之一。理論力學起源於技術，和它一齊發展，和技術科學之間有着緊密的聯繫，它的一些定律常被用來計算各種建築物。

物體運動^①是指它在空間發生了位移（亦即改變它的位置），而且這種改變是在時間的過程中完成的。

2. 在伽利略和牛頓所奠定了基礎的經典力學中，除了運動之外還引進了另一個基本概念——力。在牛頓力學中力是改變物質體運動的一種外在因素。和空間、時間及物質的概念一樣，力這個概念是從日常的經驗中產生的，它的產生是通過我們把改變或引起物體運動的原因和人們肌肉的作用同等看待這樣一條途徑的。因此經典即牛頓力學的基本概念是：時間，空間，物質（以質量為其度量）和力^②。

力學基本概念之間的關係由一些公理或者原理來確定，這些是由

① “運動”這個名詞我在此後都指機械運動。

② 也可以用能量代替力，作為基本概念，在分析力學中就是這樣做的；T. 赫芝 (T. Гепш) 所創立的力學體系中根本不用力作為基本概念。

牛頓在他的“Principia”^①一書中所提供的；這些公理就是運動的基本法則(Axiomata, sive leges motus)。

第一定律：祇要作用在物體上的力不逼使它改變運動狀態，一切物體皆保持靜止或等速直線運動狀態。

這條定律包括了慣性定律，同時規定了力是破壞物體慣性狀態的原因。根據這條定律，物體自己，不受任何外來的影響時，作最簡單的慣性運動，速度的大小和方向都不變，也就是說加速度(速度的改變)等於零；有了力的作用速度就改變了，因此也就出現了加速度。

第二定律：動量的變化和作用在運動物體上的力成正比，而且發生在作用力的方向上。

按照牛頓的定義，動量是一個物理量，正比例於質量和速度的乘積；因此動量的改變按照現代的用語是這個量的微商(或微分)，就是 $\frac{d(mv)}{dt}$ 。選擇質量和力的測量單位使得比例常數等於一，我們得到牛頓第二定律的分析表示式如下：

$$\frac{d(mv)}{dt} = F,$$

或者，把質量看作不變時，

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

因為 $\frac{dv}{dt}$ 是加速度，所以牛頓第二定律可以簡述為：力等於加速度和質量的乘積。這條定律是動力學的基本定律，它給出了力和加速度之間的關係。

第三定律：作用永遠引起相等和方向相反的反作用，換句話說——兩物體間彼此的相互作用永遠相等而方向相反。

前兩條定律談的是作用於物體的力以及力的大小和方向；第三定律指出假如某個力 F_A 作用於物體 A ，則恆存在一個物體 B ，在它上

① “自然哲學的數學原理”(1686)。

面 A 物體作用一個力 F_B ，大小等於 F_A 而方向和它相反；反之亦然。假如我們稱 F_A 爲作用，則 F_B 就是反作用。因此第三定律指出作用於物體 A 上的力 F_A 的來源是物體 B ，在 B 上面物體 A 作用一個力 F_B ，大小等於 F_A 而方向相反。

運動的公理或定律還包括以上定律的推論。牛頓的表述中的第一個推論是：“設二力分別作用於物體時，使它分別沿一平行四邊形的兩邊移動，則在兩力共同的作用下，物體沿這平行四邊形的對角線移動”。這個推論就是力的平行四邊形定律。

牛頓在 1687 年所給的定律就是這樣表述的。按照現代的用語，這兒的物體應該了解爲質點，就是充分小的物體（見第四章，§ 1, n°3）。

力學分爲運動學和動理學兩部份。運動學是從幾何的觀點研究運動的學問，不考慮產生運動的原因；因此運動學是空間運動體的幾何學，或者用拉格倫日的說法，是以時間爲第四個變數的四度空間幾何學。

動理學是研究力的作用和運動的關係的學問，又分爲研究力的平衡規律的靜力學和研究受力物體的運動的動力學。

因此動力學解決的是理論力學中的一般問題，就是：給了作用於物體的力決定這物體的運動，反過來，給了物體的運動求作用於它的力。

3. 力學的發展短史 和幾何學一樣，力學由於實用的需要發源於上古時代。在建造我們在古代文明殘餘中發現的一些大型的建築物時，古人遵循着他們本能的經驗處理事物，這經驗就逐漸轉化爲一些力學定律的知識，而使人們有可能製造各種建築和戰爭上需要用的機器。

力學作爲一門科學是產生在多多少少把經驗中積累起來的資料系統地化爲一些定律的第一部著作出現的時候。傳留下來的第一部力學著作是在古希臘時代出現的。好些精確的科學都發源在這時代。

古代偉大的思想家和學者亞里斯多德，伯拉圖的學生，生在紀元前四世紀（430—347），在他的著作“物理學”，“力學”，“天與世界”中，闡明

了運動和力的學問，而第一次引進“力學”這個字眼，它是從希臘字 $\mu\eta\chi\alpha\nu\eta$ 來的，意味着發明、機器或是建築。上述著作內包含關於槓桿和其他機械的平衡的學說，以及運動的一般學說。亞里斯多德用的方法本質上和現代精確的科學方法不同，它帶有形而上學的特色。亞里斯多德企圖從單純思考的途徑來闡明現象的原因，不依靠觀察和經驗，因此有時得到與事實不符的結論；所以亞里斯多德的著作具有更多哲學的，而不是自然科學的特徵。

歐幾利得(公元前三世紀)所著“原理”一書的出現，激發了古代的數學思想，引來了西拉古斯著名的幾何學家和力學家阿幾米德(公元前三世紀—212)的著作，他給了力學真正的科學基礎。阿幾米德在他的兩本著作內，敘述槓桿的平衡學說時，奠定了幾何靜力學和重心的靜力學理論的基礎；在同書內包含有液體中浮體的平衡學說。阿幾米德著作的特徵在於其推論的嚴格性和方法的細緻。

由於希臘幾何學家們的工作，古代力學進一步的發展方才得以完成，這些人中必須提到的是亞歷山大城來的力學家哥羅(紀元前二世紀)，他曾從事於研究簡單機械的平衡理論，還有天文學家奇巴爾黑(紀元前二世紀)和普多羅米(紀元前二世紀)，他們研究了星球在天空中運動的現象。普多羅米作出了他著名的以地球為中心的宇宙圖，它在哥白尼前的十二個世紀內一直為人們所重用着。

中世紀羅馬帝國傾覆之後，和其他自然科學一樣，力學的發展停止了，這是由於歷史上的原因，也由於受了形而上學和經院哲學的影響；後兩者乃是該時代的特色。

自然科學和力學在文藝復興時代，從十五世紀起，又一次開始發展，主要在意大利，後來波及其他國家。這個時代特別傑出的天才藝術家，幾何學家和工程師，意大利人雷那爾德·達·芬奇作了關於機構理論，機器的摩擦和斜面運動的研究。此外他還從事於研究透視論和投影論，製造了飛行機器的模型。橢圓鏟床也是由他第一個製造的，所以

到現在一直還以他的名字爲其名稱。不久以後尼古拉·哥白尼創造了他的日心宇宙圖，用以代替普多羅米的地心圖，這引起了科學宇宙觀上的大革命。由於哥白尼的工作和丹麥天文學家第谷·勃拉格的許多觀測，依沃岡·開普勒(1571—1630)得到了他有名的行星運動三定律，這些定律發表在他的著作“*Harmonices mundi*”上，成爲牛頓萬有引力定律的基石。此後還應該提到荷蘭人斯梯文(1548—1620)的工作，他研究了物體在斜面上平衡的定律，根據這些定律總結出了一些靜力學的基本定律，

中世紀時期的力學發展是以天才研究家伽利略(1564—1642)和惠更斯的工作爲終結的。伽利略之前力學的主要發展是在研究力的平衡的那一部門，即靜力學；至於物體在力的作用下的運動規律，即動力學這一部門裏，則還存在着一些相當混亂的概念，因爲受了當時佔有統治地位的亞里斯多德的形而上學理論的影響，運動這個現象本身就似乎是玄妙莫測的，常被人們用些很古怪的方法來解釋。伽利略以他雄厚的智慧佔定了觀測和實驗對研究現象的重要性，因此建立了對運動規律的正確了解，這樣，奠定了動力學的起步。通過落體的研究，他指出在真空中所有的物體以同樣的速度等加速下落，他給出了等加速運動的規律，這樣引進了加速度的概念，他研究了斜面上物體的運動，從而考慮斜面水平時的極限情形，而確立了慣性定律和物體的運動狀態不影響作用力的定律。伽利略的研究刊述在他的著作“*Discorsi*”內(意思是“論談”，這是用意大利文寫成，1638年在列基那(Лейдена)發表的^①。

伽利略的工作又爲荷蘭人克利斯基·惠更斯(1629—1695)所繼續，他研究了擺的運動，綜合了伽利略所引進的加速度的概念，又給出

① 有俄譯本：Галилео Галилей “Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки и относящиеся к механике и местному движению”，ГТИИ，莫斯科 1934。

了一串關於離心力的定理。

力學發展的新階段是從偉大的數學家和思想家依薩克·牛頓(1643—1727)的時代開始的,他創立了現代的經典力學,又和萊勃尼茨同時創始了微積分(大約在1670年)。

在他的著作“*Philosophiae naturalis principia mathematica*”(1686)^①(拉格倫日稱這著作爲“人類智慧最偉大的產物”)中牛頓像是爲以前所有的工作做了一個總結,創立了有邏輯結構的,完美的力學體系;從牛頓的時代開始力學變成了一門精確的數學科學。

在他的“*Principia*”中牛頓解釋並定義了力學的基本概念:質量,時間,空間,力,還確立了前面(n°2)所引進的運動基本定律。以這些概念和公理爲基礎,作爲觀測到的現象的綜合,所有的力學體系通過了形式邏輯和數學分析而建立起來。力學體系的創立之外,牛頓還發現了萬有引力定律,成爲理論天文學和天體力學的基礎。牛頓在他的研究中並沒有用到他自己發明的微積分的方法,他主要地用了幾何法,按照了歐幾利德“原理”的方式敘述一切。

在牛頓萊勃尼茨創立的微積分出現後,十八世紀的數學科學開始蓬勃地生長,其中包括力學;十八世紀和十九世紀初葉無疑地可以稱爲是數學科學的“黃金時代”。由於強有力的數學工具——微積分的應用,力學的方法開始很快地完善起來,力學的發展和純粹數學的發展一齊向前邁進,在數學的“黃金時代”,這些科學之間的區分和界線幾乎是不存在的。

在這時期雅可偉和依凡·柏努利弟兄在解析地研究受重力的質點在各種不同的曲線上的運動時,開創了變分法。依凡·柏努利精確表述了力學基本定律中的一條——虛位移原理(1717)。偉大的數學家列那爾德·歐勒(1707—1783)闡明了解決力學問題的分析方法,並給出了剛

^① 有俄譯本:И. Ньютон, Математические начала натуральной философии(А. Н. Крылов, 院士譯)。蘇聯科學院出版,莫斯科1936。

體運動的分析理論，第一本分析處理力學的書是由他寫的（*Mechanica sive motus scientia*, 1736）^①。1743年出現了法國博學家達朗貝爾的著作，其中作者樹立了力學的基本原理——達朗貝爾原理；這個原理使有可能把動力學的問題變為平衡的問題來處理，給了動力學問題一個一般的解法。力學發展中的分析趨向以拉格倫日的大型著作“*Mécanique analytique*”（1788）^②為頂點，在這部書裏整個的力學是從一個總的出發點用嚴格的分析方法處理的，這兒沒有一個圖。

分析力學進一步的發展由於拉格倫日的學生們的工作得以完成，這些人是：拉普拉斯，“天體力學的”（1799）的創立人，富立葉，高斯、泊松，雅可俾，哈密頓，赫姆霍茲，開爾維因公爵，赫芝以及其他數學家。

和力學的分析發展同時，在幾何的一方面也在發展着。法國幾何學家普安素（1777—1859）在他的著作“*Éléments de statique*”（1804）中創立了幾何靜力學的體系；此外，他還給了剛體運動一個幾何圖象。十九世紀中葉，由於技術的迅速發展，為着一些實用性的目的，工藝力學也發展起來。工藝力學要求盡可能的簡單，並用了分析和幾何的方法；可是，由於現代技術中問題的廣泛和複雜性，現代的工藝力學之要求高級的數學方法，並不亞於理論力學。

在本二十世紀初葉亞貝爾特·愛因斯坦力圖把所有自然界的現象統一在同一種理論之內，創立了相對論，這是牛頓之後力學發展上的又邁一大步。愛因斯坦思想的萌芽已由亨利·赫芝在他的著作“*Die Prinzipien der Mechanik*”中提出過，這本書出現於1894，這個偉大的學者逝世的那年；更早在1883年馬赫也提出過這一點。以相對論為基礎的相對性力學為力學在關於空間，時間，質量的基本概念上加上了完全新的內容，給了一個數學上極其精雅的宇宙的總圖象，而且經典的牛頓力學恰好又是它的一個特殊情形，在速度很小距離質量很遠的極

① 參看俄譯本：Л. Эйлер, Основы динамики точки. ГИИТ, М. 1938。

② 拉氏分析力學第一冊 1938年譯成俄文。

限情形下,它和相對性力學是一致的。此外,愛因斯坦,引進了關於空間的嶄新的概念,創立了引力論——引力這現象到那時候為止還一直沒有得到解釋。

4. 本二十世紀初物理學的成就,表現在關於電動力學和物質構造的新的研究上,它指出經典伽利略—牛頓力學的定律只能應用於那類物體,就是它們的維度大大地超過原子的維度,而速度則大大地小於光的速度。對於很小的物體和速度很大的物體經典力學的結論喪失了效用,而力學還需要進一步的發展。

愛因斯坦創立的相對論已在經典力學的基礎上引進了相當本質的改變,指出了牛頓關於空間、時間和質量的概念的局限性,從而有可能給一些現象以簡單的理論根據,這些現象從經典力學的觀點是不能解釋的。此外,經典力學又不適用於原子構造的理論,這個事實乃是原子或量子力學發生的原因。量子力學現在正處在它發展的過程中,是現代物理學中活躍的問題之一。

雖然如此,伽利略—牛頓的經典力學作為各種自然科學和技術問題的科學研究中強有力的工具來看,卻有着極大的價值,它的定律在實際運用的條件下是完全準確的。所有各色各樣的技術建築都是建立在經典力學定律的基礎上的,而且經驗證明,它很成功地完成了自己的使命。相對論和量子力學帶給經典力學定律的修正和更改在一般的條件下小到幾乎沒有,僅僅當速度很大,接近於光速,或者物體的大小和原子的大小等級時它才變得很明顯;因此伽利略牛頓的經典力學將永不喪失它的科學意義和實用價值。

§ 2 矢量

1. 近來在力學裏乃至於數學物理的其他部門裏,廣泛地採用了矢量分析的方法。這種方法較之坐標法在書寫的簡化,公式的明化和物理圖象化上,都有極大的優越性;可是這種方法最主要的優越性還在於

矢量的公式不依賴於標向系統(即坐標系),當坐標系更換的時候它們卻是不變的;換句話說矢量公式是坐標變換下的不變式。可是也不應該認為可以完全忽視坐標法:後者有些時候要比矢量法來得方便,尤其當我們需要進行計算到底而得到具體的數字結果的時候。

2. 標量與矢量 在數學物理中我們會碰到兩類量:標量和矢量。那些用一個數目(它們的數值)就完全決定了的量叫做標量。對任一種標量而言,我們可以確立一個標度(拉丁字 *scala*),在這標度內對應於標量的任一個值有一個確定的位置;這就是標量這個字眼的來源^①。一般說來一個標量可以用一個正的或是負的實數來表示。質量,溫度,能量,體積和許多其他的物理量都是標量。

最簡單的矢量要算是有向線段,它完全決定於用某一種尺度來量時它的長短(矢量的值)和它在空間的方向。物理量諸如速度、加速度和力等具有有向線段的一切性質,因此也可以看作是矢量:這些量只有當在它們的數值之外還指出了它們的方向時,才具有意義。從定義,矢量是有向的線段或是可以用有向線段來表示的那些量,因此數值相等的矢量,假如方向不同,是不相等的。矢量這名詞來自拉丁字 *vector*,是“帶”的意思。

從解析幾何已知,一個矢量的方向 l 和直角坐標軸形成的三個夾角的餘弦之間有一個關係:

$$\cos^2(\widehat{lx}) + \cos^2(\widehat{ly}) + \cos^2(\widehat{lz}) = 1;$$

因此矢量的方向決定於兩個數;再注意矢量有它的值,我們就得到矢量的另一個定義:矢量是用三個數完全決定了的量。

3. 矢量的幾何表示,矢量的要素,矢量乘以標量 在幾何上矢量可以用一有向直線段 AB 來表示(圖 1),其長度在一定的尺度下相當於矢量的值,方向和矢量的方向一致。包含矢量的直線 l 叫做矢量的作用線或基線。

① 因為標量的俄文譯名是 *шкала*, 和 *scala* 相似。

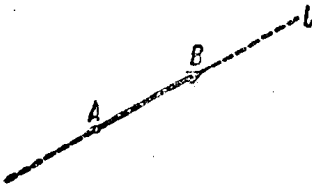


圖 1

因此矢量在幾何上決定於以下元素：(1)作用線(基線)，(2)表示矢量的線段 AB ，(3)作用的方向(這個方向用箭頭來表示)。

矢量的絕對值有時叫作它的模數。矢量的模數相當於線段 AB 的長度。

表示矢量的線段 AB 的兩端 A 與 B 叫作 $\overline{AB}$ 矢量的起點和終點。通常 AB 只表示這線段而不將方向考慮在內。在要指明代表矢量的線段 AB 有方向時，我們在 AB 上加一橫線，它表示這是個矢量，就是說：

$$\text{矢量 } AB = \overline{AB};$$

而線段 AB 的長度代表矢量的模數：

$$\text{矢量 } \overline{AB} \text{ 的模數} = |\overline{AB}| = AB。$$

一個矢量往往用上面帶一橫的一個字母來表示，或者用一個粗號字母表示：

$$\text{矢量 } a = \bar{a} = \boldsymbol{a},$$

他的模數表示起來就用這同一個字母再加上絕對值的符號，或者用這字母的普通印刷體，也就是說 $|a| = a$ 。我們以後用粗號字母表示矢量。

我們認為兩個矢量相等，假如它們平行，方向相同而且有相等的模數，也就是假如(圖 2)

$$a = b \text{ 且 } a \downarrow\downarrow b,$$

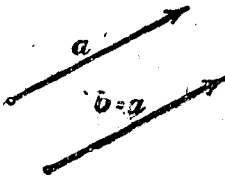


圖 2

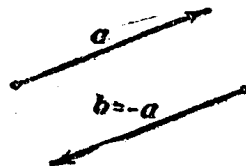


圖 3