蘇聯高等學校教學用書

最小二乘法

希洛夫著

測繪書籍編譯社譯

地質出版社

最小二乘法

希 洛 夫 著
測繪書籍編譯社譯

前蘇聯人民委員會高等學校委員會
審定作爲高等測量學校教科書

本書係根據蘇聯人民委員會測繪總局測繪書籍出版社（Издательство геодозической и картографической литературы ГУГК при СНК СССР）1941 年於莫斯科出版的"最小二乘法"（Способ наименьших квадратов）譯出的、本書作者是蘇聯希洛夫（П. И. Шилов）教授。

全書由測繪書籍編譯社朱新美、鄭景乾、朱裕棟同志合譯，由胡明城、馮尊湯同志校訂。

書號 0135　**最小二乘法**　360 千字

著者	希洛夫
譯者	測繪書籍編譯社
出版者	地質出版社 北京安定門外六舖炕 北京市書刊出版業營業許可證出字第零伍零號
發行者	新華書店
印刷者	地質印刷廠 北京廣安門內教子胡同甲32號

印數（京）—8.500冊　一九五五年五月北京第一版

定價（8）2.49 元　一九五五年五月第一次印刷

開本31″×43″1/25　印張 $17\frac{22}{25}$　插頁 3

原　序

本書係根據"最小二乘法"課程大綱編寫而成，作爲高等測量學校教科書之用。全書共分三篇：第一篇爲觀測誤差理論（直接觀測），第二篇爲最小二乘法（間接觀測及條件觀測），第三篇爲或然率理論及其在觀測誤差方面的運用。

編寫本書第一篇時，將我以前所寫的"最小二乘法"第二版(1936年出版)中的某些章節作了適當的修正及補充，第二篇的內容則幾乎全是重新寫成的。

在社會主義條件下，由於蘇聯大地測量學迅速的發展，湧現了大量的斯達哈諾夫式工作方法，這在平差計算上不能不有所反映。以前在大地測量作業中很少使用的間接觀測法，近年來在蘇聯由於補充網的廣泛發展而具有特殊的意義。

由於適宜地利用了採取改化條件方程式（用克呂格法）的兩組平差的思想，平差計算的實踐就大大簡化了。有關平差值精度估計的問題，亦具有很大意義。所有這些都反映在課題的大綱中，並且在本書中得到了適當的發揮。

本書最後一篇是完全重新寫成的，在1936年版中完全沒有提到這一篇。看起來，作爲觀測誤差理論之基礎的這一部分似乎應該放在前面來談，但是教學實踐證明，只有把材料相反配置，方能最好地保證學生成功地研究本科目。這種順序在課程大綱中已有規定，它被實踐所證實，並反映在依維羅諾夫教授和契巴塔廖夫教授的名著中。在約爾旦的經典著作"測量學手冊"第一卷中亦採用同樣的順序。

"最小二乘法"課程大綱陳述了用於計算精度所必需的觀測誤差之一般學理，及基於最小二乘原理的平差計算之一般理論。至於誤差

理論及最小二乘法在大地測量學、天文學及重力測量學等方面的各種運用問題，則包括在相應的科目中。特別是關係到基本測量工作之精度計算及平差計算的問題，在 1938 年和 1939 年莫斯科出版的克拉索夫斯基教授和達尼洛夫教授合著的"大地測量學"第一卷第一分冊和第二分冊中佔有很多的篇幅。

根據高等測量學校的教育計劃，"最小二乘法"是給已學過許多測量工作技術的二年級學生講授的。這樣，在極大程度上決定了課程各部分的配置及敘述的方法，這是一方面；另一方面也決定了有許多大地測量的問題可以用來在敘述本課程時作為說明材料。

由於本書篇幅有限，故除第一篇按其性質需作詳盡說明以外，其餘兩篇內所舉的例題是很少的。

例題和習題的資料多半是取自赫格曼（E. Hegemann）的"實用幾何學中最小二乘法平差計算之應用習題選"（"Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrata auf die praktische Geometrie"）和約爾旦（W. Jordan）的"測量學手冊"（"Handbuch der Vermessungskunde"）卷一。

技術科學博士　布洛夫教授

一九四〇年於莫斯科

目　錄

第二章　非等精度觀測

第三章　運用誤差理論估計按近似數計算的結果之精度

第四章　誤差理論運用於大地測量實際中的若干問題

第二篇　最 小 二 乘 法

第五章　最小二乘原理及最大權原理

第六章　間接觀測

第七章　條件觀測

第三篇　或然率理論及其在觀測誤差方面的運用

第八章　或然率之基本理論

第九章　或然率理論在觀測誤差方面的運用

緒　論

§ 1. 觀測誤差理論及最小二乘法的對象

觀測過程通常就是將觀測時所採用的量度單位與被觀測的量重合和比較，在此過程中，一方面必須使用為此而特製的器械或儀器，另一方面必須利用觀測者的感覺器官。所以，不論觀測進行得多麼細緻，也不論所使用的儀器多麼完善，一切觀測都不可避免地要產生誤差。只要對某一量進行多次觀測，就會確信這一點。差不多經常是這樣的，一切觀測結果相互間總有些差別；這就是說，一切測得的結果都和觀測量的眞值有所差別，即包含有誤差在內。觀測誤差的產生，主要是由於觀測者的感覺器官不够完善、觀測儀器的缺陷以及進行觀測時所處的外界條件的影響（溫度、空氣濕度、風等等）。

由於不可避免的觀測誤差之積累，因而造成實際的數據和理論上的結果不符合，這種不符合稱為閉合差。譬如在幾何學上說，任何平面多角形的各角之和均等於 $180°(n-2)$（這裏 n 是多角形角的數目），但實際上這一相等的關係幾乎是從來不會有的，而且所測的角之和或比理論上的大，或比理論上的小，即必有閉合差。不可避免的觀測誤差是很小的，而且它們的積累是依從於一定的法則的，根據這些法則，可以規定在某個觀測過程中所能容許的最大閉合差。觀測誤差理論就是敘述所發現的不可避免的觀測誤差之積累法則及所規定之容許的最大閉合差。如果在觀測過程中所得的閉合差仍保持下去，那麼在隨後處理觀測結果時，就會產生新的不符合；這時自然就會對產生新的不符合的原因發生疑問，計算者將不能知道是因為不可避免的觀測誤差還是因為計算時小的疏忽而造成各結果間不符合。如果在處理觀測結果以前，將閉合差消除，改變觀測所得結果，使它們滿足於理

論上的要求，比方說使改正後的平面多角形各角之和恰好等於180°$(n-2)$，那麼這類的疑問也就沒有了。這種改正稱爲觀測之調整或平差。

測量平差能消除在以後處理觀測結果時的矛盾。如果經觀測平差後還有新的不符合出現，那麼就只是由於計算的錯誤所致，這種情形經常在第二次計算或用檢核公式計算時就會發現出來。用以改正觀測結果的方法很多，其目的是使觀測結果同理論上的要求相符，這樣一來，這個問題就成爲變化無常的了。任意選定一些決定觀測結果改正數的補充條件，變化無常的平差問題就可以成爲完全肯定的了。補充條件的選擇決定着平差的方法。事實上，選擇補充條件時不僅要使它能滿足理論的要求，還要儘可能可靠地求得觀測量之最後值。

在這方面最完善的方法是大數學家勒戎德爾和高斯的方法❶，即著名的勒戎德爾和高斯的最小二乘法。這種方法的補充條件，是在於使所求的改正數平方之和爲最小，即小於用另一種方法所得的類似的改正數平方之和。一般說來，用這種方法平差，平差後的觀測成果，同理論上的要求極爲接近。用這種方法求得的改正數稱爲最或然改正數，它能使改正後的結果爲最可靠的。在以測量和觀測爲基礎的科學中，在天文學和大地測量學中，這種處理觀測結果和由觀測中求得最可靠的成果的方法，已經採用了百年以上。

1794年高斯就發明了最小二乘法，那時他只有十七歲，但直到1809年方才在他的著作"天體沿圓錐截面圍繞太陽運動的理論"(Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium）中發表出來。

在高斯未發表他的著作以前，於1805年勒戎德爾在他自己的作品"決定慧星軌道的新方法"(Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des Comètes)中提出了同樣的處理觀測的方法。

❶ 勒戎德爾（legendre）阿德里埃瑪利(1752-1833)，法國數學家，巴黎科學院院士。高斯（Gauss）卡爾弗里德里赫(1777-1855)德國數學家，測量學家和天文學家。

"最小二乘法"這一名稱是勒戎德爾決定的，勒戎德爾提出的最小二乘法，作爲一種極簡單的同時又是一般的方法，主要用以消除在解答由觀測得出的方程式時的不定性；同時，高斯採用了不賴於勒戎德爾的方法，得出了第一個論證，並提出了估計所得成果之可靠性的方法。

§ 2. 觀測誤差理論及最小二乘法的參考文獻

在觀測誤差理論及其平差的問題方面，經典著作是1809年到1826年這個時期內所發表的卡·弗·高斯的作品。在這些問題方面由拉丁文翻成法文和德文的高斯著作，出版的計有：（1）C• F• Gauss "Méthode des moindres carrés" Traduit en francais par I. Bertrand. paris, 1855（167頁）。（2）C. F. Gauss "Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate". In deutscher Sprache herausgegeben von D-r A. Börschund D-r P. Simon. Berlin. 1887（208頁）。

在高斯的著作中，不僅有最小二乘法的理論基礎及估計觀測質量的方法，而且還敘述了最小二乘法在大地測量學和天文學中的實際運用的方法。

附有卡·弗·高斯作品的俄文書籍，有：白塞爾"科學叢書"1859年莫斯科出版，由德文譯出。在這本書裏，同白塞爾的作品並列的有：（1）卡·弗·高斯著"天體沿圓錐截面圍繞太陽運動的理論"由拉丁文譯出，1859年莫斯科出版（293頁，其中有20頁爲三張圖表）；（2）卡·弗·高斯著"最小二乘法"、"關於觀測之聯合記事"，由法文譯出，1859年莫斯科出版（32頁）。

觀測誤差理論及最小二乘法的發展與或然率理論（見第三篇）方面的成就是緊密相連的。在這方面的經典著作，是1812年在巴黎以第一版發表的拉伯拉斯❶的著作"或然率分析理論"（Théorie analytique des probabilités）。此著作與通論一起組成兩卷完整的拉伯拉斯著作集

---

❶ 拉伯拉斯（laplace）別爾西蒙（1749-1827），法國數學家，巴黎及其他科學院院士。

（理論 645 頁，通論 148 頁）。通論譯成俄文，並以"或然率理論的哲理經驗"的名稱於 1908 年在莫斯科出版（206 頁）。通過或然率理論的複雜問題解法的共同性，拉伯拉斯把此理論提到了高級階段。拉伯拉斯的嚴密分析已成爲高斯理論的可貴補充。

促成觀測誤差理論及最小二乘法之繼續發展的一些作品，在本書適當的地方均有所叙述。在這裏我們僅舉出一些作品，它們能作爲研究本科目時的參考資料。

（1）約爾旦（D-r W. Jordan），測量學手册（"Handbuch der vermessungskunde"）卷一，1939 年蘇聯出版，此卷係由 1935 年德文第八版譯出，編輯爲日伏諾夫，見約爾旦著"測量學手册"第一卷，蘇聯人民委員會測繪總局 1939 年莫斯科版（692頁）；

（2）契巴塔廖夫"以或然率理論爲基礎的最小二乘法"第三版，1936 年莫斯科——列寧格勒 ОНТИ 出版（470 頁）；

（3）赫爾默特（F.R. Helmert），最小二乘法平差計算（"Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate"），此書的譯本有從1907 年德文第二版譯出者，見蓋里米爾特之"用最小二乘法之平差"一書。測量工程師協會著作第三册，1913 年莫斯科出版（320頁）；

（4）麥立曼（Merriman）著"最小二乘法教科書"紐約（1907年出版，228 頁）。

除了上所舉出的作品外，在不同時間內還出版了許多教材性質的最小二乘法書籍，其作者有：巴胡林教授（教程的專門部分"礦坑測量術"）、依維羅諾夫教授、依萬諾夫教授、依捷爾松、馬吐謝維奇、索伯列夫斯基教授、赫道羅維奇教授、西皮辛等人。此外，在大地測量學和天文學教程中還經常能找到有關最小二乘法的章節；同時應當說明，相當多的教程都是叙述或然率理論的。誤差理論及最小二乘法在大地測量學中的運用問題通常是在大地測量學教程中來叙述。對於這些問題，特別是誤差理論及最小二乘法，在定期刊物上均予以極

大注意。

世界文獻（其中包括定期的）有關大地測量，特別是最小二乘法的詳細目錄，可在國際測量學文獻目錄（"Bibliographie géodesique internaticnai"）中找到。

最小二乘法的實踐部分在高斯博士的外業中三角測量和導線測量之計算（"Die Trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst"）（1922 年出版，第一部分 620 頁，由附錄組成的第二部分 96 頁）中有詳細的叙述。

習題選可以用：博布克（K. J. Bobck）博士所著的最小二乘法平差計算教科書（"Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate"）；赫格曼教授所著的"最小二乘法平差計算應用習題選"（"Ubungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate"）；佛格勒（Vogler）博士所著的大地測量習題（"Geodätische Übungen"）B. I, II。

§ 3. 觀測誤差理論及最小二乘法在組織大地測量工作中的意義

欲正確地組織大地測量工作，只有儘早地完成適當的計算，並預料到不可避免的觀測誤差之影響的情形下，方有可能；而只有正確地考慮到觀測誤差的可能影響時，方能很順利地選擇儀器及作業方法。但在某項工作的組織中，當已經决定儀器時，誤差積累和發生總跟上面所估計的有些不同。觀測時還應該善於用適當的方法來估計它們，並確定不可避免的觀測誤差對所得觀測結果的影響；此後更應組織將未加工的材料進行處理，將矛盾、閉合差消除，也就是進行測量平差。

§ 4. 觀 測 種 類

平差中將觀測區分爲：直接的及間接的；以一定條件互相聯系的及互相獨立的；等精度的及非等精度的。如果直接地確定未知量，比

如要確定某一角的值而直接觀測這一角，那麼這種觀測就稱爲直接觀測。如果要確定某未知量，比如 x,y,z(圖 1)，不是直接去測定未知量，而測定其函數 $x+y+z$, $x+y$ 和 $y+z$，那麼這種觀測就稱爲間接觀測。有時當我們已經知道了觀測量的平差值必須嚴格地滿足於一定的、有理論根據的條件，那麼在這種場合下的觀測就稱爲條件觀測；比如已經知道平面三角形的平差值之和應等於180°，因而此三角形各角之直接觀測即可稱爲條件觀測。

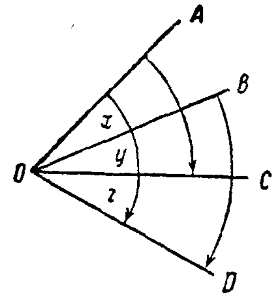

圖 1

在測量平差過程中，要注意觀測的質量。觀測結果的質量能够用數字表示出來，即所謂這個結果的權。觀測的質量取決於進行觀測時所處的條件。在可以認爲全部結果同樣可靠的條件下所進行的觀測，稱爲等精度觀測。等精度觀測的結果就有同樣的權。在不能認爲全部結果都同樣可靠的條件下所進行的觀測，稱爲非等精度觀測。平差時非等精度觀測的結果得出不同的權。

§5. 眞觀測誤差

談到任一物體被觀測的量之精確值或眞值時，是假定存在有這樣的一段時間，在此段時間中，被觀測的物體之大小實際上可認爲是不變的。這樣一個在一定時間內實際上不變的被觀測的物體之眞正大小，就稱爲該物體被觀測的量之精確值或眞值[1]。

以 X 表示某量之眞值，以 l 表示此量之觀測值，則差數 $X-l=\Delta$ 稱爲眞觀測誤差。決定眞誤差者通常是差數 $X-l=\Delta$，而不是 $l-X$。實際上很顯然，爲此目的，不論取差數 $X-l$ 或取差數 $l-X$ 都是一樣。但要注意，在大多數的誤差理論及最小二乘法的參考書籍中，都是用公式 $\Delta=X-l$ 表示眞誤差，故以後我們將用此公式來求眞誤差。

---

[1] 見契巴塔廖夫著"最小二乘法"1936 年版第 13 頁。

第一篇　觀測誤差理論

第一章　等精度觀測

§6. 觀測誤差及其分類

觀測誤差根據其產生來源，通常可分爲儀器誤差，人的誤差和外界誤差三種。第一種誤差之產生，是由於器械或儀器的缺陷；第二種誤差之產生是由於觀測者的感覺器官不完善；而最後一種誤差的產生則由於觀測時受了外界環境的影響，這裏包括有：空氣的濕度和溫度、風、照明、地球的彎曲、重力等等的影響。按照性質和特性，誤差又分爲：系統的、偶然的和過失的三種。

系統誤差在一定的反覆觀測的條件下常保持同一數值和同一符號。系統誤差是按一定的法則變化着的，或者保持常數。譬如，如果磁針的幾何軸與磁軸不重合，那麼在用羅盤測量方位角時，全部結果都會導入在數值上和符號上都是一定的誤差。這種誤差即爲系統誤差。如果20公尺長的鋼帶尺比標準尺短或長 a，那麼用這種不可靠的鋼帶尺丈量出的長度 D 就會包含有 $\frac{a}{20}D$ 的誤差。這也是一種系統誤差。這種誤差與所測之距離成正比，並常使結果的誤差同方向。如果水準儀望遠鏡的照準軸不平行於水準器軸，那麼標尺讀數由此而產生的誤差，就會與水準儀至標尺的距離成正比。這種誤差亦屬於系統誤差。在測定照準軸和水準器軸之間的夾角以後，就可以預先計算出該段距離的這種誤差值。

上面所列舉的系統誤差之所以產生，或者由於儀器的構造有缺點，或者由於沒有很好地校正儀器，因而它們是儀器的系統誤差。必須研