

高等学校教学参考书

非线性电路分析

徐清华 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书是高等学校工科电工课程教学指导委员会电工学课程教学指导小组建议编写的电工学教学参考书之一。全书深入浅出地讨论了非线性电路分析中的几个基本问题,内容简明易懂,主要包括:非线性元件的特性,折线模型,电阻电路的图解法、节点法、混合法、表列法、分段线性法和牛顿-拉夫生法,动态电路的变型节点法、表列法、状态方程法、分段线性法、图解法、欧拉法以及若干非线性电路的性质等。

本书在选材上注意与电工学相配合,在深度上照顾了非电类专业的基础,可作为大专院校非电类专业师生的参考书,也可供一般工程技术人员研究非线性电路分析问题参考。

(京)112号

高等学校教学参考书

非线性电路分析

徐清华 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.75 字数 160 000

1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷

印数0001—2 969

ISBN 7-04-003140-X/TM·161

定价 4.20 元

目 录

| | |
|----------------------------|----|
| 第一章 简单非线性电阻电路 | 1 |
| 1-1 二端电阻的伏安特性..... | 1 |
| (一) 线性电阻和非线性电阻..... | 1 |
| (二) 伏安特性的分类..... | 5 |
| 1-2 伏安特性的折线近似..... | 8 |
| (一) 半导体二极管的折线模型..... | 9 |
| (二) 特种二极管的折线模型..... | 11 |
| 1-3 非线性电路分析的特点..... | 12 |
| (一) 电路分析的基本依据..... | 12 |
| (二) 图解法与解析法..... | 13 |
| (三) 唯一解、多解与无解..... | 15 |
| 1-4 伏安特性的图解组合..... | 17 |
| (一) 串联..... | 18 |
| (二) 并联..... | 20 |
| (三) 串并联..... | 22 |
| 1-5 简单电阻电路的图解分析..... | 23 |
| (一) 负载线法..... | 24 |
| (二) 图解消元法..... | 29 |
| (三) 模板法..... | 32 |
| 习题..... | 33 |
| 第二章 多端电阻的基本电路 | 38 |
| 2-1 受控电阻和多端电阻..... | 38 |
| (一) 受控电阻的伏安特性..... | 38 |
| (二) 多端电阻的伏安特性..... | 39 |
| 2-2 晶体管的数学模型..... | 45 |

| | |
|----------------------|------------|
| (一) EM 模型 | 45 |
| (二) 折线模型 | 47 |
| 2-3 三端电阻基本电路的分析 | 50 |
| (一) 双负载线法 | 50 |
| (二) 等效电路分析法 | 58 |
| (三) 小信号分析 | 60 |
| 2-4 集成运放电路 | 67 |
| (一) 理想的运放模型 | 67 |
| (二) 线性区和非线性区分析 | 70 |
| 习题 | 74 |
| 第三章 一般非线性电阻电路 | 77 |
| 3-1 克希荷夫定律和特勒根定理 | 77 |
| (一) 克希荷夫定律 | 77 |
| (二) 特勒根定理 | 81 |
| 3-2 电阻电路方程式 | 83 |
| (一) 节点电压方程式 | 83 |
| (二) 混合方程式 | 86 |
| (三) 表列方程式 | 90 |
| 3-3 严格无源二端电阻电路 | 93 |
| (一) 严格无源封闭性 | 93 |
| (二) 电压无增益性 | 94 |
| 3-4 严格单增二端电阻电路 | 96 |
| (一) 严格单增封闭性 | 97 |
| (二) 有唯一解性 | 98 |
| 3-5 电阻电路的迭代分析法 | 99 |
| (一) 牛顿-拉夫生法 | 100 |
| (二) 分段线性法 | 105 |
| 习题 | 107 |
| 第四章 储能元件和动态电路 | 112 |
| 4-1 储能元件 | 112 |

| | |
|--------------------|-----|
| (一) 二端电容 | 112 |
| (二) 二端电感 | 117 |
| (三) 耦合储能元件 | 120 |
| 4-2 动态电路方程式 | 122 |
| (一) 变型节点方程式 | 122 |
| (二) 表列方程式 | 124 |
| (三) 状态方程式 | 126 |
| 4-3 动态电路的分类 | 133 |
| (一) 电路的复杂度 | 133 |
| (二) 自治与非自治电路 | 136 |
| 习题 | 137 |
| 第五章 一阶非线性电路 | 139 |
| 5-1 一阶自治电路 | 139 |
| (一) 自治状态方程 | 139 |
| (二) 状态方程的平衡点 | 143 |
| (三) 平衡点的稳定性 | 147 |
| 5-2 自治电路的分段线性法 | 152 |
| (一) 时域解和动态路线 | 154 |
| (二) 跳跃现象和张弛振荡 | 158 |
| (三) 储能元件的分段线性化 | 160 |
| 5-3 一阶开关电路 | 161 |
| (一) 定时区的分段线性法 | 161 |
| (二) 单稳态和双稳态电路 | 165 |
| 5-4 一阶非自治电路 | 168 |
| (一) 导向场和等斜线法 | 168 |
| (二) 欧拉法 | 171 |
| 习题 | 174 |
| 第六章 二阶自治电路 | 177 |
| 6-1 状态方程和状态轨线 | 178 |
| (一) 状态方程 | 178 |

| | |
|----------------------------|------------|
| (二) 状态轨线..... | 182 |
| 6-2 图解分析法..... | 186 |
| (一) 等倾线..... | 186 |
| (二) 等倾线的等效电路..... | 191 |
| 6-3 电路的平衡点及稳定性..... | 192 |
| (一) 平衡点..... | 192 |
| (二) 平衡稳定性..... | 195 |
| (三) 全局稳定性的概念..... | 198 |
| 6-4 非线性周期振荡..... | 199 |
| (一) 负阻振荡电路..... | 199 |
| (二) 范德堡方程的定性性质..... | 203 |
| 习题..... | 204 |
| 参考文献..... | 206 |

第一章 简单非线性电阻电路

大多数现代电子器件和电力系统部件是非线性的，当我们用适宜的电路元件的组合来模拟这些器部件时，电路中往往要出现具有非线性 $u-i$ 特性、 $u-q$ 特性或 $\Phi-i$ 特性等元件，这就是非线性的电阻元件、电容元件或电感元件。含有非线性电路元件的电路称为非线性电路。仅由非线性电阻元件、线性电阻元件和独立电源组成的电路称为非线性电阻电路。非线性电阻电路在非线性电路中占有重要的地位，它不仅是许多实际电路的合理模型，也是含有电容元件、电感元件的非线性动态电路的分析基础。

本章讨论仅由非线性及线性二端电阻元件和独立电源的串并联组成的简单非线性电阻电路。首先介绍二端电阻元件的伏安特性和折线模型，接着讨论非线性电路分析的若干特点，最后介绍简单非线性电路的图解分析法。

1-1 二端电阻的伏安特性

(一) 线性电阻和非线性电阻

二端电阻是一种用其端电压 u 与通过的电流 i 之间的关系 $f(u, i) = 0$ 来表征其特性的二端电路元件。按照国际单位制，电压 u 的单位是伏(V)，电流 i 的单位是安(A)，所以，二端电阻的特性又称为伏安特性。凡是用伏安特性表征的二端元件都是二端电阻。通常，二端电阻的伏安特性是用 $u-i$ 平面内的几何图形来表示的。图 1-1(a)~(g)是几种常见的伏安特性几何图形，图 1-1(h)是非线性二端电阻的一般图形符号和惯用的 u, i 参考方向。我

们注意到,二端电阻的 u 、 i 参考方向是一致的,即选定 i 从电阻的高电位端流入、低电位端流出,这种 u 、 i 一致的参考方向称为关联参考方向。今后,在涉及二端元件的特性时,元件的 u 、 i 参考方向都选定为上述关联方向。

在电工学中,我们已经很熟悉服从欧姆定律的二端电阻。它的端电压 u 与通过的电流 i 成正比

$$u = Ri$$

比例常数 R 称为二端电阻元件的电阻,单位是欧 (Ω)。所以,其伏安特性是一个线性函数,它在 u - i 平面内的几何图形是一条通过坐标原点的直线,如图 1-1(a)所示,直线上各点的斜率不变,恒等于电导 G

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{R} = G$$

习惯上,这类二端电阻常用它的电阻值 R ($R > 0$) 来表征,称为正线性二端电阻,简称线性电阻。

非线性二端电阻与线性电阻不同,它不服从欧姆定律,它的伏安特性是一个非线性函数,在 u - i 平面内的几何图形是一条特定的曲线。非线性二端电阻的一个典型例子是半导体 PN 结二极管,图 1-1(b)画出了它在直流和低频区正常工作时的伏安特性曲线,该曲线可以用一个指数函数来描述

$$i = I_s (e^{\frac{u}{U_T}} - 1) \quad (1-1)$$

式中 I_s 是反向饱和电流,微安级常量,其大小取决于材料类型; U_T 是温度的电压当量,室温时约为 0.026 V。上式又称为理论二极管模型。

当非线性二端电阻在直流电路中工作时,它的电压值 U_Q 和相应的电流值 I_Q 都是直流值,在伏安特性曲线上得到的点 $Q(U_Q, I_Q)$ 称为工作点[图 1-1(b)]。在工作点处的电压与电流之比称为

静态电阻(或直流电阻) R_s ,即

$$R_s = \frac{U_Q}{I_Q} \quad (1-2)$$

当电路中还有较小的时变信号作用时,在非线性二端电阻的工作点Q附近,势必引起电压和电流的微小变化。在特性曲线的Q点附近,增量电压 Δu 与增量电流 Δi 之比在 $\Delta i \rightarrow 0$ 时的极限——Q点斜率的倒数称为动态电阻(或微变电阻、增量电阻) R_d ,即

$$R_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} \Big|_Q = \frac{du}{di} \Big|_Q \quad (1-3)$$

PN结二极管的动态电阻可以从式(1-1)求得

$$R_d = \frac{U_T}{I_s + i} \Big|_Q = \frac{0.026}{I_s + I_Q}$$

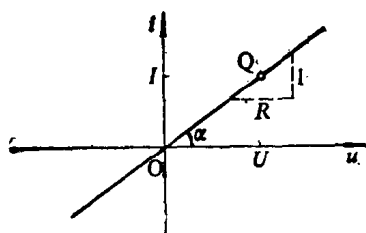
当二极管工作于正向偏压时, $u > 0$, $I_s + I_Q \approx I_Q$,正向动态电阻 R_{df} 是相当小的,其计算式是

$$R_{df} = \frac{0.026}{I_Q}$$

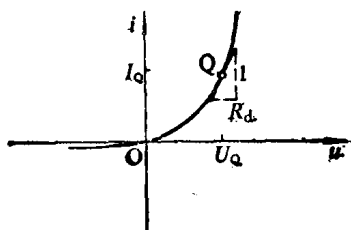
当二极管工作于反向偏置时, $u < 0$, $I_Q \approx -I_s$,反向动态电阻 R_{dr} 是无穷大。 R_{dr} 与 R_{df} 的数值上的悬殊是由PN结二极管的 $u-i$ 特性曲线对于坐标原点的严重不对称性造成的,这种不对称性又称为“单向性”,是大多数非线性二端电阻的重要特征。

从上面的讨论可以看到,对于非线性电阻伏安特性上的任何一个工作点,有两个不同的电阻 R_s 和 R_d 来分别表征其静态性质和动态性质。它们都不是常数,当工作点在特性曲线上移动时,它们的数值也分别随之而改变。所以,为了表征一个非线性电阻的特性,必须给出它的完整的伏安特性曲线,并设法写出它的解析形式。

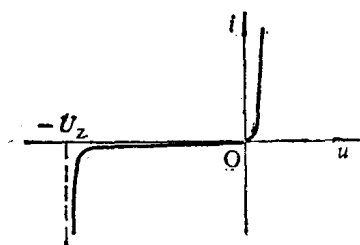
图1-1(c)、(d)和(e)都是对原点不对称的非线性伏安特性曲线。图(c)是硅稳压管的 $u-i$ 特性,图中的 $-U_Z$ 是它的反向稳定



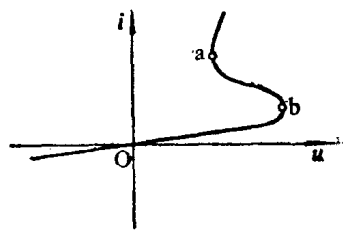
(a)



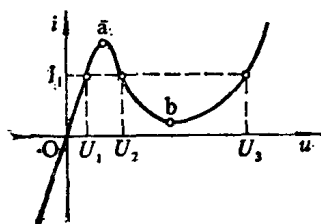
(b)



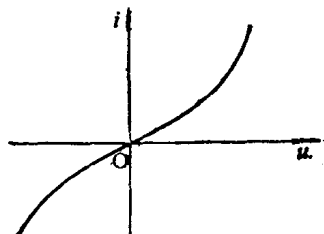
(c)



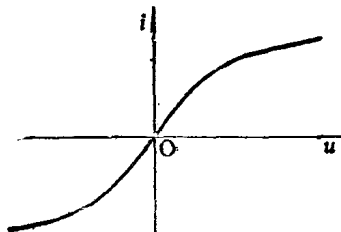
(d)



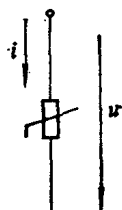
(e)



(f)



(g)



(h)

图 1-1

电压。图(d)中的曲线表示电弧炉、探照灯以及具有负温度系数的热敏电阻的 $u-i$ 特性。图(e)是隧道二极管的特性，它是一条“N”形曲线。图 1-1(f)和(g)都是对称于原点的非线性伏安特性曲线，其中图(f)代表变阻管，图(g)代表金属丝白炽灯。

(二) 伏安特性的分类

二端电阻的特性是由 $u-i$ 平面内的曲线规定的， $u-i$ 曲线的不同类别是二端电阻的分类依据。因此，讨论伏安特性的分类就是讨论二端电阻的类别。

首先要指明的是，图 1-1 中的各种 $u-i$ 曲线都是一些与时间无关的特性曲线，它们都不随时间而变化，这些曲线所表征的电路元件称为时不变(或非时变、定常)二端电阻。如果伏安特性曲线随时间而变化，就称为时变二端电阻。时不变二端电阻是时变二端电阻的特殊情况。在以后的讨论中，如果不作特别声明，提及的各类元件都是时不变的集中参数电路元件。

按照伏安特性的不同情况，二端电阻可以按下列各项分类。

(1) 单增电阻和负电阻元件。设二端电阻的伏安特性上有任意二点 $P_1(u_1, i_1)$ 和 $P_2(u_2, i_2)$ ，当 $u_1 > u_2$ 时有 $i_1 \geq i_2$ ，该二端电阻是单调增加的或单增的；如果 $u_1 > u_2$ 时有 $i_1 > i_2$ ，该二端电阻是严格单增的。图 1-1 中的(a)、(b)、(f)、(g)等都是严格单增二端电阻的伏安特性曲线。

严格单增的伏安特性必定是单增的。在严格单增的和单增的伏安特性上，每一个点的增量电阻都不为负($R_d \geq 0$)。伏安特性上各点都有 $R_d \geq 0$ 的二端电阻又称为正电阻元件。正线性二端电阻是正电阻元件的特例。

如果二端电阻的伏安特性上面包含有负的动态电阻(或增量电导)，就称为负电阻元件。一般说，在负电阻元件的 $u-i$ 特性曲

线上,并非在任一点都具有负的动态电阻或电导。在图 1-1 (d)、(e)中,a—b 段上的各点具有负的动态电导或动态电阻 ($R_d < 0$),它们所表征的二端电阻都是负电阻元件。

在图 1-1(e)的 N 型曲线上,给定一个 U_i 时,有且仅有一个 I_1 与之对应, i 是 u 的单值函数,曲线的函数式可写为

$$i = f(u) \quad (1-4)$$

这种二端电阻称为电压控制型电阻,简称压控电阻。类似地,图 1-1(d)中曲线表明, u 是 i 的单值函数,函数式可写为

$$u = g(i) \quad (1-5)$$

这种二端电阻称为电流控制型电阻,简称流控电阻。在图 1-1(c)的硅稳压管 $u-i$ 特性中,电压 $-U_Z$ 是稳压管的反向稳定电压,元件电压 u 不允许在 $(-\infty, -U_Z)$ 区间之内存在,因此 i 不是 u 的函数,但 u 可看为 i 的函数,故硅稳压管是流控电阻元件。

对于压控或流控电阻元件,如果伏安特性上各点的动态电阻都不为负 ($R_d \geq 0$),又称为局部无源元件;否则是局部有源元件。例如,硅稳压管是局部无源元件,隧道二极管是局部有源元件。负电阻元件又是局部有源元件,因为在它的 $u-i$ 特性上至少有一部分的动态电阻是负的。

最后还要指出的是,严格单增二端电阻是局部无源的,在它的全部特性上,动态电阻为正,它不仅是压控二端电阻,即 $u-i$ 特性可写为

$$i = f(u)$$

并且也是流控二端电阻,其 $u-i$ 特性还可表示为

$$u = g(i)$$

函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 互为反函数。

(2) 单向性和双向性。如前所述,根据伏安特性是否对称于 $u-i$ 坐标的原点,电阻元件又有双向性和单向性之别。大多数非

线性电阻的特性不对称于原点,属单向性元件。在图 1-1 中, (a)、(f)和(g)是双向性元件的特性,满足性质 $f(u, i) = f(-u, -i)$ 。

(3) 热惯性和无热惯性。二端电阻通电后会产生热量而使温度升高。加热和散热的过程是一个惯性过程。如果伏安特性的非线性主要起因于热过程,就属于热惯性电阻元件;如果伏安特性的非线性是由其它的非热过程所形成的,就属于无热惯性电阻元件。白炽灯是最常见的热惯性元件,它的直流值伏安特性和有效值伏安特性都是非线性的[图 1-1(g)]。热惯性元件的加热时间常数远大于交流电的周期时,其电阻值来不及随交流电的瞬时值而变化,所以瞬时值伏安特性仍是线性的[图 1-1(a)]。电子器件在直流和低频运用时,它们的非线性伏安特性是由 PN 结、电场效应等形成的,均属于或可归入无热惯性电阻元件范围,在同一时间的直流特性和瞬时值伏安特性是一致的。

(4) 无源元件与有源元件。如果电阻元件的伏安特性都位于 $u-i$ 平面的第一、第三象限,从而 $ui \geq 0$,即消耗的功率恒为非负,该元件是无源的;否则为有源的。如果元件的特性除原点外恒有 $ui > 0$,就称为严格无源的。图 1-1 中的特性曲线都在第一、三象限内,各元件除原点外都消耗电功率,都是严格无源电阻。

独立电源是有源元件,但是也可以看作非线性二端电阻。图 1-2(a)是独立电压源的图形符号和特性。由于端电压 u 等于给定

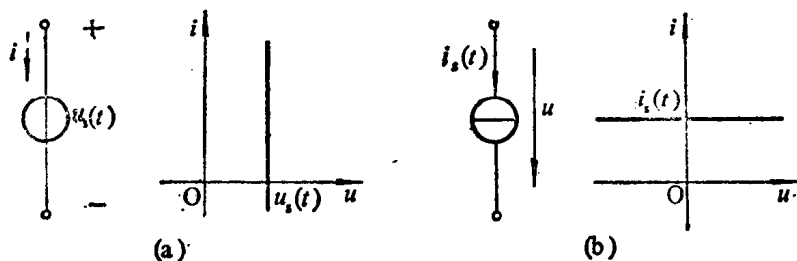


图 1-2

的关系式 $u_s(t)$ 而与通过的电流 i 无关, 元件方程表示为

$$u = u_s(t), \quad -\infty < i < \infty \quad (1-6)$$

这是一个时变的伏安特性, 对于任一时间 t , 在 $u-i$ 平面内, 它是一条电压截距为 $u_s(t)$ 的 i 轴平行线。因此, 独立电压源是有源的时变的流控型二端电阻。当 $u_s=0$ 时, 伏安特性与 i 轴重合, 成为零电阻元件。图 1-2(b) 是独立电流源的图形符号和伏安特性, 它的元件方程为

$$i = i_s(t), \quad -\infty < u < \infty \quad (1-7)$$

对于任一时间 t , 在 $u-i$ 平面内, 它是一条电流截距为 $i_s(t)$ 的 u 轴平行线。因此, 独立电流源是有源的时变的压控型二端电阻。当 $i_s=0$ 时, 伏安特性与 u 轴重合, 成为零电导元件。显然, 直流电源是有源的非时变二端电阻元件。

这里有必要指出, 我们以元件的伏安特性为准绳, 把独立电源列入非线性二端电阻范围, 不仅体现了元件的本质, 还会给分析问题带来方便。譬如对于蓄电池, 从电工学观点看, 它本是具有电源和负载两重性、统一性的一种设备, 当它工作于伏安特性曲线的第一象限区域时吸收功率, 作为负载运行(蓄电池充电), 静态电阻 R_s 为正值; 而工作于第四象限时发出功率, 作为电源运行, 静态电阻 R_s 为负值。我们在进行电路的分析与综合时, 把独立电源视为广泛意义上的二端电阻, 就可以采用统一的伏安特性处理原则。但在通用场合, 我们仍强调它的有源性, 把它同普通的电阻元件区别开来, 宁愿称之为电源。

1-2 伏安特性的折线近似

一般说, 二端电阻用 $u-i$ 平面内的一条曲线来表征, 唯有线性电阻的特性才是通过原点的一条直线。二端电阻的非线性伏安特性, 如果用若干段直线的组合来逼近, 就可以在每一个直线段区间

内把非线性问题转化为局部线性问题，这不仅简化了图解手续并利于解析运算，还为计算机辅助分析提供了方便条件。当我们用折线去逼近一条曲线时，折线的分段越多，精度就越高，分析计算也越繁难；反之，则精度越低，分析也越简易。一般说，在满足实际要求的前提下，分段越少越好，即模型越简单越好。

(一) 半导体二极管的折线模型

半导体二极管是一种单向性无源二端电阻，按照对于单向性、动态电导($G_d = 1/R_d$)和死区阈值 U_0 的不同选择和组合，图 1-3 (a) 中的二极管及其特性曲线可以按不同要求采用图 1-3

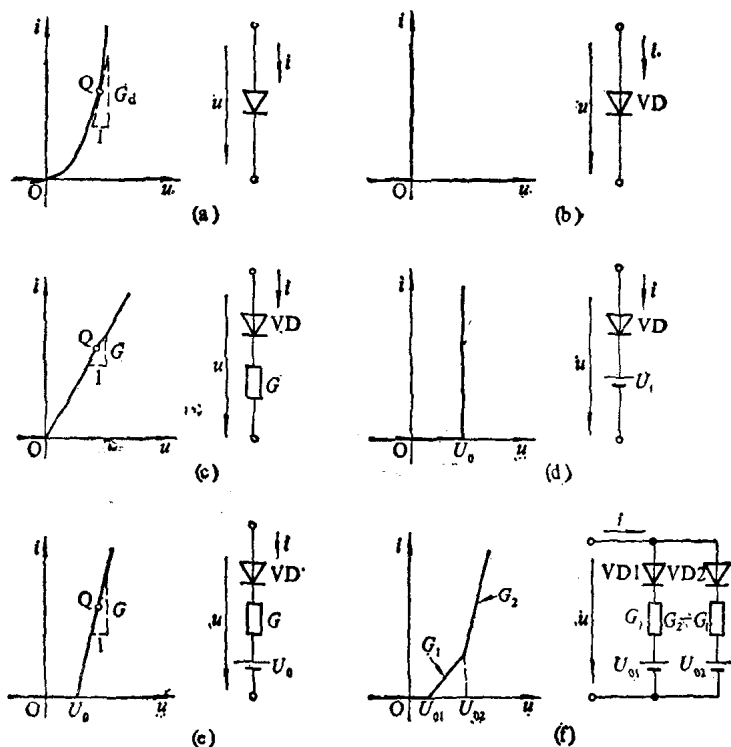


图 1-3

(b)~(f)等五种折线模型。图 1-3(b)是理想二极管模型, 伏安特性由正 i 轴和负 u 轴两条垂直线组成, 特性方程可表示为

$$\left. \begin{aligned} i &= 0, & (u \leq 0) \\ u &= 0, & (i > 0) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

理想二极管 VD 作为二极管的最简模型, 它突出了 PN 结的单向导电性, 在简化电路和器件造型等方面用处很大。图 1-3(c)中的折线模型兼顾了单向性和正向电导 G 而略去阈值 U_0 , 特性方程为

$$\left. \begin{aligned} i &= 0, & (u \leq 0) \\ i &= Gu, & (u > 0) \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

在确定折线倾斜段的斜率 G 时, 要正确预计静态工作点 Q 的位置。在精度要求不高时, 它具有使用方便的优点。图 1-3(d)则兼顾了单向性和阈值 U_0 , 略去了正向电导 G , 特性方程为

$$\left. \begin{aligned} i &= 0, & (u < U_0) \\ u &= U_0, & (i > 0) \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

图 1-3(e)是半导体二极管的一般模型, 它兼顾了 PN 结的单向性、阈值 U_0 和动态电导 G 等性质, 特性折线由 $u \leq U_0$ 的 u 轴部分和非负斜率 G 的倾斜段组成, 特性方程为

$$i = \frac{1}{2}G\{|u - U_0| + (u - U_0)\} \quad (1-11)$$

当 $u > U_0$ 时, 二极管导通, 式(1-11)可写为

$$u = U_0 + i/G$$

图 1-3(f)为二极管规范模型, 它采用了两个倾斜段($G_2 > G_1 > 0$), 从而更接近特性曲线, 其电路模型由两个一般模型并联而成, 特性方程为

$$i = A + Bu + C_0|u - U_{01}| + C_1|u - U_{02}| \quad (1-12)$$

式中 $A = -\frac{1}{2}(G_1U_{01} + G_2U_{02})$, $B = \frac{1}{2}(G_1 + G_2)$,

$$C_0 = \frac{1}{2}G_1, \quad C_1 = \frac{1}{2}G_2$$

通过上面的讨论可以看到，当我们用模型去逼近一个二端电阻时，都要采取某种近似的或理想化的方案，即略去一些次要因素而保留其主要本质。我们的原则是一切从实际出发，注重实效。采用模型以后，某些性质会发生变化。例如，图 1-3(a) 是严格单增的，即既是压控型又是流控型的，但是，图 1-3(b)、(d) 既不是压控型又不是流控型的，图 1-3(c)、(e)、(f) 是单增的、压控型的。元件的单向性和无源性则始终未变。

(二) 特种二极管的折线模型

硅稳压管的折线模型如图 1-4(a) 所示，其特性方程为

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, & (i > 0) \\ u &= -U_Z, & (i < 0) \\ i &= 0, & (-U_Z < u < 0) \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

隧道二极管的折线模型示于图 1-4(b)，其特性方程为

$$i = A + Bu + C_0 |u - U_1| + C_1 |u - U_2| \quad (1-14)$$

式中
$$A = \frac{1}{2} [(G_a - G_b)U_1 + (G_b - G_c)U_2],$$

$$B = \frac{1}{2} (G_a + G_c),$$

$$C_0 = \frac{1}{2} (G_b - G_a),$$

$$C_1 = \frac{1}{2} (G_c - G_b)$$

从图 1-3、1-4 所示的折线特性及其等效电路不难看出，折线的分段数越多则等效电路的分支数也越多。二端电阻的等效电路和折线化特性之间的关系可参阅本章第四节伏安特性的组合内容。关于二端电阻的折线模型方程，比较式(1-12)所表示的普通二极管折线方程和式(1-14)所表示的隧道二极管折线方程，可以