

计算机等级考试教程

(四级)

离散数学

全国高等学校计算机教育研究会
教材与课程建设委员会 组编

李大友 主编

邵学才 叶秀明 编著

机械工业出版社

计算机等级考试教程(四级)
离散数学

机械工业出版社

0158

32

计算机等级考试教程

(四级)

离散数学

全国高等学校计算机教育研究会
教材与课程建设委员会 组编

李大友 主编

邵学才 叶秀明 编著



机械工业出版社

本书主要由集合论、代数结构、图论、数理逻辑四部分组成,在叙述上深入浅出,简明扼要。该书以众多的实例解释概念,使抽象理论转化为直观的认识,变得容易理解,其主要特点是适合于自学。

读者对象:计算机等级考试四级应试人员、大专院校师生、相关科技人员及电脑爱好者等。

图书在版编目 (CIP) 数据

2P21/58-19

计算机等级考试教程(四级):离散数学/李大友主编·邵学才、叶秀明
编著·北京:机械工业出版社,1996.4

ISBN 7-111-04992-6

I. 计… I. ①李…②邵…③叶… II. ①电子计算机-技术等级标准-考核-教材②离散数学-技术等级标准-考核-教材 N. ①TP3②0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 00275 号

出 版 人:马九荣(北京市百万庄南街1号 邮政编码100037)

责任编辑:何文军 版式设计:张世琴 责任校对:刘志文
桂 林

封面设计:郭景云 责任印制:卢子祥

三河永和印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

1996年6月第1版第1次印刷

787mm×1092mm¹/₁₆·14.5印张·345千字

0 001—5 000册

定价:24.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

《计算机等级考试教程》

编 委 会

主 编 李大友
副主编 袁开榜 何 莉 陈瑞藻
编 委 (按姓氏笔划为序)
邓德祥 李芳芸 邵学才
杨文龙 陈季琪 孟庆昌
宗大华 姜秀芳 陶龙芳
屠立德 葛本修 薛宗祥
秘 书 何文军

《计算机等级考试教程》序言

当前,在世界范围内,一个以微电子技术、计算机技术和通信技术为先导的,以信息技术和信息产业为中心的信息革命方兴未艾。信息技术和信息产业的发展,对国民经济的发展、国家经济信息化起着举足轻重的作用,并已成为衡量一个国家发展水平的重要标志。因此,实现国家经济信息化,已成为世界各国所追求的共同目标。

为了使我国尽快实现国家经济信息化,赶上发达国家的水平,必须加速发展我国的信息技术和信息产业。其中最关键的环节就是人才的培养,尤其是计算机应用人才的培养。有了人才,才能迅速提高全社会的计算机应用水平,促进国家经济信息化水平的提高。因此,解决全民普及计算机知识,尽快提高全民族整体的计算机应用水平,已成为当务之急。各行各业、各层次人员,不论年龄与知识背景如何,都应掌握和应用计算机,解决其各自专业领域的计算机应用问题,为本职工作或专业服务,使其与国家经济信息化的需要相适应。

国家教委考试中心为适应这一形势发展的需要,使所培养的计算机应用人才的水平有一个公正的、客观的统一标准,推出了全国计算机等级考试。这一考试,根据应试者所具有的计算机应用能力水平的不同,划分为不同等级,分别进行考核。

全国计算机等级考试共分为四级六类,其内容范围如下:

一级分为 A、B 两类,均面向文字处理和数据库应用系统操作人员。

一级 A 类要求掌握计算机基础知识、微机系统基本组成、操作系统功能和使用、字表处理软件的功能和使用、数据库应用系统的基本概念和操作。

一级 B 类要求掌握计算机基础知识、微机系统基本组成、DOS 操作系统基本知识及操作、文字处理软件 WPS 和数据库语言 FoxBASE 的操作。

二级面向使用高级语言进行程序设计的人员。要求掌握计算机基础知识、操作系统的功能和使用、数据库的基本概念及应用和具有使用一种高级语言(C 语言、PASCAL 语言、FORTRAN 语言、BASIC 语言或数据库语言)进行程序设计的能力。

三级分为 A、B 两类

三级 A 类面向测控领域的应用人员。要求掌握微机原理、汇编语言程序设计、微机接口技术、软件技术基础以及微机在测控领域的应用。

三级 B 类面向软件方面的应用人员。要求掌握计算机基础知识、数据结构与算法、操作系统、软件工程方法以及具有微机在管理信息系统或数值计算或计算机辅助设计方面的应用能力。

四级要求达到相当于大学计算机专业本科毕业生水平,具有计算机软件 and 硬件系统的设计开发能力。要求掌握计算机系统原理、计算机体系结构、计算机网络与通信、离散数学、数据结构与算法、操作系统、软件工程和数据库系统原理等方面的基础理论知识。

为推动全国计算机等级考试的健康发展,满足社会上对等级考试教材的迫切要求,全国高等学校计算机教育研究会课程与教材建设委员会组织了高等院校多年从事计算机教育的第

一线专家教授，编写了《计算机等级考试教程》系列教材，并得到机械工业出版社的大力支持与合作，使得这套教程能够及时与广大读者见面。

这套教程严格按照各级各类考试大纲的要求编写，内容深入浅出、图文并茂，每本书均附有习题，便于自学。

由于计算机技术是一门迅速发展的学科及作者水平所限，这套教程肯定会有很多不足之处，衷心希望得到社会各界和广大读者的批评指正。

主编 李大友

1995年11月

前 言

离散数学是理工科高等院校计算机专业的主要专业基础课。离散数学的基本内容为：集合论、代数结构、图论和数理逻辑等，其研究目标是离散量的结构与相互间的关系，其研究对象为有限或可数个元素，所以充分体现了计算科学的离散性特点。

本书是专为参加计算机等级考试的同志编写的教材。作者充分考虑到离散数学所独有的“内容涉及广泛，抽象理论多”的特点，对于书中抽象内容的叙述都作了精心安排，运用大量的说明性例子，有层次地剖析抽象理论的内涵，使抽象的理论转化为直观的叙述，深入浅出，易懂易学。本书的最大特点是：便于自学。

本书有大量的、有趣的有关离散数学的应用实例，使读者进一步加深对理论的理解，并能逐步了解理论如何应用于实践的过程和方法。

为了适应计算机等级考试的形式，本书在每一章后都附有综合练习，它是以选择题的形式出现的。

本书可以作为理工科高等院校计算机专业本科生的教材，也适合于各类函授大学、职工业余大学等成人教育中计算机专业本科生的教学。

本书由上海大学叶秀明教授和北京工业大学邵学才教授编写。在编写过程中得到上海计算技术研究所吕听泉和上海大学黄智强副教授的悉心帮助，对此作者表示诚挚的谢意。对于支持和关心编写工作的北京工业大学刘椿年教授和复旦大学胡美琛教授表示深切的谢意。

最后，作者对于在本书编辑过程中付出辛勤劳动并提出不少有益建议的机械工业出版社何文军先生和桂林先生表示感谢。

作 者

1995 年 10 月

目 录

《计算机等级考试教程》序言

前言

第1章 集合 1

1.1 集合的基本概念 1

1.1.1 集合的表示方法 1

1.1.2 子集 2

1.1.3 幂集 3

1.2 集合的运算 4

1.3 包含排斥原理 9

综合练习 12

第2章 二元关系 15

2.1 二元关系及其表示方法 15

2.1.1 集合的笛卡儿乘积 15

2.1.2 二元关系的定义 16

2.1.3 关系的三种表示方法 17

2.2 关系的基本类型 21

2.3 等价关系和划分 30

2.3.1 等价关系 30

2.3.2 等价类 34

2.3.3 集合的划分 35

2.4 相容关系和覆盖 37

2.4.1 相容关系 37

2.4.2 覆盖 40

2.5 偏序关系 41

2.6 复合关系和逆关系 47

2.7 关系的闭包运算 51

综合练习 54

第3章 函数 57

3.1 函数的定义 57

3.2 特殊函数 58

3.3 复合函数和逆函数 60

综合练习 64

第4章 代数结构 66

4.1 代数系统 66

4.2 特殊运算和特殊元素 68

4.3 同构 74

4.4 半群 77

4.5 群的定义和性质 81

4.6 子群 84

4.7 循环群 87

4.8 置换群 90

4.9 陪集和拉格朗日定理 93

4.10 同态和同余 97

4.10.1 同态 97

4.10.2 同余关系 103

4.10.3 正规子群 110

4.11 群码 113

4.12 环和域 116

4.13 格 120

4.13.1 格和子格 120

4.13.2 格和偏序集 122

4.13.3 分配格 125

4.13.4 有界格 127

4.13.5 有补格 128

综合练习 130

第5章 图论 133

5.1 图的基本概念 133

5.2 通路和赋权图的最短通路 138

5.2.1 通路和回路 138

5.2.2 赋权图的最短通路 139

5.3 图和矩阵 148

5.4 欧拉图 152

5.5 哈密顿图 155

5.6 中国邮路问题和旅行售货员问题 159

5.7 二部图 162

5.8 平面图 165

5.9 无向树 171

5.10 有向树 173

5.11 图在计算机中的存储 179

综合练习	181
第 6 章 命题逻辑	183
6.1 命题和联结词	183
6.2 真值表和逻辑等价	187
6.3 永真蕴含式	191
6.4 推理理论	192
6.5 范式	198
6.5.1 析取范式和主析取范式	198
6.5.2 合取范式和主合取范式	202
综合练习	206

第 7 章 谓词逻辑	208
7.1 谓词	208
7.2 命题函数和量词	209
7.2.1 命题函数	209
7.2.2 量词	209
7.2.3 谓词合式	212
7.3 约束元和自由元	213
7.4 等价式和蕴含式	215
7.5 谓词演算的推理理论	218
综合练习	220

第1章 集 合

集合论是现代数学的基础,集合论几乎与现代数学的各个分支都有密切联系,并且也渗透到各个科技领域。集合论的内容是极其丰富的,本章主要介绍朴素集合论的基本内容,包括:什么是集合以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等概念;集合的基本运算和集合代数的有关公式,在组合计数中有着广泛应用的包含排斥原理等。

1.1 集合的基本概念

集合就是具有某种特点的对象聚合,其中每一个对象称为这个集合的元素。例如,北京工业大学学生的全体可以构成一个集合,而北京工业大学的每一个学生就是这个集合中的一个元素。又如正整数的全体可以构成一个集合,而每一个正整数就是这个集合中的元素。通常用大写的英文字母; $A, B, C, \dots$ 等来代表集合,用小写的英文字母; $a, b, c, \dots$ 等来代表集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的元素,称 a 属于 A ,并记作

$$a \in A$$

如果 a 不是集合 A 中的元素,称 a 不属于 A ,并记作

$$a \notin A$$

1.1.1 集合的表示方法

集合有多种表示方法,这里介绍常用的两种方法。

(一) 列举法

这种表示方法是把集合中的所有元素一一列举出来,元素间用逗号分开,并用花括号把它们括起来。如集合 A 含有5个元素,它们分别是2,4,6,8,10。用列举法可把集合 A 表示成

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

又如

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

这就表明集合 B 有5个元素,它们分别是 a, e, i, o, u 。

易见, $4 \in A, a \in B$,但 $5 \notin A, b \notin B$ 。

(二) 特征法

集合的另一种表示方法是特征法,它是以某个小写的英文字母来统一表示该集合的元素,并指出这类元素的共同特征。如

$$C = \{x | x \text{ 是不大于 } 10 \text{ 的偶数}, x > 0\}$$

花括号内的符号“ $|$ ”读作“系指”,花括号内的逗号读作“并且”。因此集合 C 中的元素是一些不大于10的偶数,并且大于0。或者简单地说, C 是由不大于10的正偶数组成。实际上,集合 C 的元素就是:2,4,6,8,10。可见集合 C 和列举法中所提到的集合 A 的元素是完全相同的。又如

$$D = \{x | x \text{ 是英文字母}, x \text{ 是元音}\}$$

易见, D 中元素就是: a, e, i, o, u 。它和列举法中所提到的集合 B 的元素是完全相同的。

当两个集合 X 和 Y 有相同的元素时,称这两个集合相等,记作 $X=Y$ 。容易看到,上面提到的集合 A, B, C, D 中,有 $A=C$ 和 $B=D$ 。

一般地讲,用列举法来表示集合时,往往显得冗长而繁复,但当我们对集合的某些特征作抽象的讨论时,列举法能使问题显得直观和容易理解。

1.1.2 子集

如果集合 A 中每一个元素又都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的子集,也可以说 A 含在 B 中,或 B 含有 A ,这种关系写作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

如果 A 不是 B 的子集,也就是说在 A 中至少有一个元素不属于 B ,则称 B 不包含 A ,记作

$$B \not\supseteq A \text{ 或 } A \not\subseteq B$$

例如,在集合 $A=\{1,3,4,5\}$ 和集合 $B=\{1,2,5\}$,集合 $C=\{1,5\}$ 中, C 是 A 的子集,即 $A \supseteq C$; C 又是 B 的子集,即 $B \supseteq C$,但 B 不是 A 的子集,因为元素 $2 \in B$ 而 $2 \notin A$,所以 $A \not\supseteq B$;同理 A 也不是 B 的子集,因为元素 $3 \in A$ 而 $3 \notin B$,所以 $B \not\supseteq A$ 。

由集合间的包含关系,容易得到:

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是, $A \supseteq B$ 且 $B \supseteq A$ 。

这一结论在证明两个集合相等时,往往是一种有效而简便的方法。

如果 A 是 B 的子集,但 A 和 B 不相等,也就是说在 B 中总有一些元素不属于 A ,则称 A 是 B 的真子集,记作 $B \supset A$,如集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$,那么 A 是 B 的真子集。

不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$ 。

由空集的定义可知,空集是一切集合的子集。

在实际工作中,我们所研究的对象总是限制在一定的范围内,比如我们要研究北京市大学学生的学习情况时,研究对象可以是清华大学的学生,也可以是北京工业大学的学生,但研究的对象总是限制在北京市大学生这个范围内。在这种情况下,我们称“北京市大学生的全体”组成的集合为全集。又如在初等数论中,研究的对象是整数,在这种情况下,全体整数组成的集合是全集,全集通常用 U 表示。

请注意,全集的概念和研究对象所处的范围密切相关的,不同的情况就有不同的全集,例如,当我们研究人口问题时,全世界所有的人就构成了全集;当我们研究中国妇女的生活状况时,全中国所有妇女就构成了全集;甚至当研究的对象仅限制在一个较小的范围时,如仅研究北京工业大学计算机科学系学生的学习情况时,北京工业大学计算机科学系的全体学生就是全集。总之,全集是和研究对象密切相关的。一般地讲,当我们的讨论总是限制在某个集合的子集时,这个集合就是全集。

与全集有密切关系的集合是补集。

设 A 是集合,且 $A \subseteq U$,由属于全集 U 但不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 的补集,记作 $\bar{A}$ 或 $\sim A$ 。例如

$$U = \{x | x \text{ 是上海大学的学生}\}$$

$$A = \{x | x \text{ 是上海大学的女学生}\}$$

则 A 的补集

$$\bar{A} = \{x | x \text{ 是上海大学的男学生}\}$$

又如

$$U = \{x | x \text{ 是实数}\}$$

$$A = \{x | x \text{ 是有理数}\}$$

则 A 的补集

$$\bar{A} = \{x | x \text{ 是无理数}\}$$

1.1.3 幂集

集合中的元素是可以多种多样的,因此一个集合作为另一个集合的元素是完全可以的,例如集合 $A = \{a, b, \{c, d\}\}$, 这表明集合 A 含有 3 个元素: $a, b, \{c, d\}$, 这里集合 $\{c, d\}$ 就成为集合 A 的一个元素了。

一般地讲,从属关系“ $\in$ ”是元素和集合之间的关系;包含“ $\supset$ ”则是集合和集合之间的关系,但也存在着这样的情况:集合 A 含在集合 B 中,集合 A 又属于集合 B , 如

$$A = \{a, b\}$$

$$B = \{a, b, \{a, b\}\}$$

这里就有 A 既是 B 的子集,又是 B 的元素,即有 $A \subset B$ 和 $A \in B$ 同时成立。

下面介绍有着广泛用途的集合——幂集。

定义 1.1.1 设 A 是集合,由 A 的所有子集作为元素而构成的集合称为 A 的幂集,记作 $P(A)$ 。

例如集合 $A = \{a, b, c\}$, A 的子集有 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ 等,另外由于空集 $\emptyset$ 是一切集合的子集,所以 $\emptyset$ 也是 A 的子集,而 A 的本身也是 A 的子集,由此可得 A 的幂集

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

又如

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

则 A 的幂集

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$$

$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

当一个集合中的元素个数为有限时,该集合称为有限集;集合中的元素的个数为无限时,该集合称为无限集。有限集 A 中元素的个数称为集合 A 的基,记作 $|A|$,如 $A = \{a, b, c\}$, 则 $|A| = 3$ 。

现在讨论有限集 A 的基与其幂集 $P(A)$ 的基的关系,由上面提到的两个幂集的实例可以看到,当 $A = \{a, b, c\}$ 时,即 $|A| = 3$ 时,其幂集的基 $|P(A)| = 8 = 2^3$; 当 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 时,即 $|A| = 4$ 时,其幂集的基 $|P(A)| = 16 = 2^4$ 。在一般情况下有:

定理 1.1.2 A 是有限集, $|A| = n$, 则 A 的幂集 $P(A)$ 的基为 2^n 。

证明 由排列组合的知识可知:

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

又由二项式定理可知:

$$(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + \cdots + C_n^{n-1} a \cdot b^{n-1} + C_n^n b^n$$

特别取 $a = b = 1$, 则有

$$(1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

由此可得

$$|P(A)| = 2^n$$

习 题

1. 用列举法表示下列集合。

- (1) 小于 20 的素数集合
- (2) $\{x|x \text{ 是正整数}, x^2 < 50\}$
- (3) $\{x|x^2 - 5x + 6 = 0\}$
- (4) $\{x|x \text{ 是正整数}, x+1=3\}$

2. 用特征法表示下列集合。

- (1) $\{1, 3, 5, 7, \dots, 99\}$
- (2) $\{5, 10, 15, \dots, 100\}$
- (3) $\{1, 4, 9, 16, 25\}$

3. 设 A, B, C 是集合, 确定下列命题是否正确, 说明理由。

- (1) 如果 $A \in B$ 与 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ 。
- (2) 如果 $A \in B$ 与 $B \subseteq C$, 则 $A \in C$ 。
- (3) 如果 $A \subseteq B$ 与 $B \in C$, 则 $A \in C$ 。
- (4) 如果 $A \subseteq B$ 与 $B \in C$, 则 $A \subseteq C$ 。

4. 确定下列命题是否正确?

- (1) $\emptyset \subseteq \emptyset$
- (2) $\emptyset \in \emptyset$
- (3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- (4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

5. 设 A, B, C 是集合

- (1) 如果 $A \in B$ 且 $B \in C$, 是否一定有 $A \in C$?
- (2) 如果 $A \in B$ 且 $B \in C$, 是否一定有 $A \subseteq C$?
- (3) 如果 $A \subset B$ 且 $B \in C$, 是否一定有 $A \in C$?

6. 求下列集合的幂集

- (1) $\{a, b, c, d\}$
- (2) $\{a, b, \{a, b\}\}$
- (3) $\emptyset$
- (4) $\{\emptyset\}$
- (5) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1.2 集合的运算

本节介绍 4 种常用的集合运算及有关公式。

(一) 集合的并运算

定义 1.2.1 两个集合 A, B 的并记作 $A \cup B$, 它也是一个集合, 由所有属于 A 或者 B 的元素合并在一起而构成的, 即

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例如

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{b, c, d, e\}$$

则

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

又如

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7\}$$

则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

集合的运算可以用文氏图形象地表示,在图 1-2-1 中,矩形表示全集 U ,两个圆分别表示集合 A 和 B ,阴影部分就是 $A \cup B$ 。

由集合并运算的定义可知,并运算具有以下性质:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup \emptyset = A$
5. $A \cup U = U$

(二) 集合的交运算

定义 1.2.2 两个集合 A 和 B 的交记作 $A \cap B$,它也是一个集合,由属于 A, B 两集合的所有共同元素构成,即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例如

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{a, b, d, f\}$$

则

$$A \cap B = \{a, b\}$$

又如

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7\}$$

则

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

如果集合 $A \cap B = \emptyset$,也就是说 A 和 B 没有共同元素,则称 A, B 不相交。例如

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

则 $A \cap B = \emptyset$,即 A, B 不相交。

集合的交运算的文氏图表示见图 1-2-2,图中阴影部分就是 $A \cap B$ 。

由集合交运算的定义可知,交运算具有以下性质:

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cap A = A$

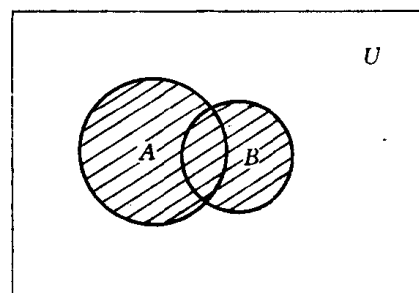


图 1-2-1

$$4. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$5. A \cap U = A$$

定理 1.2.1 设 A, B, C 为 3 个集合, 则下列分配律成立。

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明 只证第一等式, 第二等式的证明是类似的。证明的方法是这样的, 先证

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

再证

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

从而证得

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

为了证明 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 也即要证明 $A \cap (B \cup C)$ 是 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 的子集, 所以只需证明: 对于任意的 $x \in A \cap (B \cup C)$, 都有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

对于任意的 $x \in A \cap (B \cup C)$, 即有 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 也即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$, 这就表明 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$, 所以有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 由此可得 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

再证 $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

对于任意的 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 则 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$; 即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$; 也即 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$; 所以有: $x \in A \cap (B \cup C)$, 从而得到 $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

综合上述结果就证得 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

由集合的并与交运算的定义可知, 当 $A \supseteq B$ 时, $A \cup B = A$, $A \cap B = B$; 显然 $A \cup B \supseteq A$, $A \cap B \subseteq A$, 所以有下列定理:

定理 1.2.2 设 A, B 为集合, 则

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

定理 1.2.3 设 A, B 为集合, 则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

这两个定理的证明与定理 1.2.1 的证明方法类似, 请读者自己证明。

定理 1.2.2 称为吸收律, 定理 1.2.3 称为摩根律, 它们在集合的运算中有着广泛的用途。

(三) 集合的减运算

定义 1.2.3 由属于集合 A 但不属于集合 B 的那些元素构成的集合称为 A 减 B 的差, 记作 $A - B$ 。即

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

例如

$$A = \{a, b, c\}$$

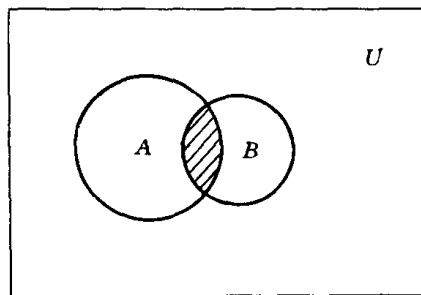


图 1-2-2

则

$$B = \{a, b\}$$

$$A - B = \{c\}$$

又如

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{a, b, e, f\}$$

则

$$A - B = \{c, d\}$$

再如

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{e, f\}$$

则

$$A - B = \{a, b, c\}$$

集合的减运算的文氏图表示见图 1-2-3。

由减运算的定义可知, A 的补集就是全集减 A 的差, 即

$$\bar{A} = U - A$$

集合的减运算有以下性质:

1. $A - A = \emptyset$
2. $A - \emptyset = A$
3. $A - U = \emptyset$
4. $A - B = A \cap \bar{B}$

性质 1, 2, 3 是显然成立的, 性质 4 也可由减运算的定义直接得证。

定理 1.2.4 设 A, B, C 为集合, 则

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

证明 利用性质 4, 右式

$$\begin{aligned} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\ &= (A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) \\ &= (A \cap B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap (B - C)) \\ &= A \cap (B - C) \end{aligned}$$

(四) 集合的对称差

定义 1.2.4 集合 A 和 B 的对称差记作 $A \oplus B$, 它是个集合, 其元素或属于 A , 或属于 B , 但不能既属于 A 又属于 B 。即

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

例如

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{a, c, e, f, g\}$$

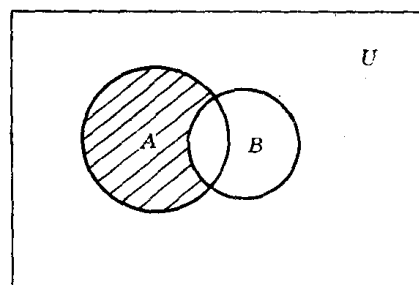


图 1-2-3

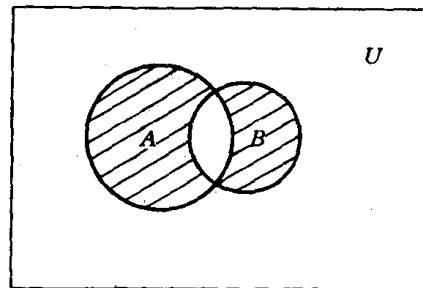


图 1-2-4

则

$$A \oplus B = \{b, d, e, f, g\}$$

集合对称差的文氏图表示见图 1-2-4。

由对称差的定义易得下列性质:

1. $A \oplus A = \emptyset$
2. $A \oplus \emptyset = A$
3. $A \oplus U = \bar{A}$
4. $A \oplus B = B \oplus A$
5. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
6. $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

习 题

1. 设 I_+ 是所有正整数组成的集合, A, B, C 是 I_+ 的子集, 且

$$A = \{i | i^2 < 50\}$$

$$B = \{i | i \text{ 能整除 } 30\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7\}$$

求下列集合:

- (1) $A \cup C$
- (2) $A \cup (B \cap C)$
- (3) $C - (A \cap B)$
- (4) $(B \cap C) - (A \cup B)$
- (5) $B \cap \bar{C}$
- (6) $A \oplus C$

2. 给定正整数集合 I_+ 的子集:

$$A = \{x | x < 12\}$$

$$B = \{x | x \leq 8\}$$

$$C = \{x | x = 2k, k \in I_+\}$$

$$D = \{x | x = 3k, k \in I_+\}$$

试用 A, B, C, D 表示下列集合:

- (1) $\{2, 4, 6, 8\}$
- (2) $\{1, 3, 5, 7\}$
- (3) $\{3, 6, 9\}$
- (4) $\{10\}$
- (5) $\{x | x \text{ 是大于 } 12 \text{ 的奇数}\}$

3. 设 A, B 是任意集合, 将 $A \cup B$ 表示为不相交集的并。

4. 设集合 $A \neq \emptyset$, 如果 $A \cup B = A \cup C$, 且 $A \cap B = A \cap C$, 证明 $B = C$

5. 设 A, B, C 是集合, 求下列各式成立的充分必要条件。

- (1) $(A - B) \cup (A - C) = A$
- (2) $(A - B) \cup (A - C) = \emptyset$
- (3) $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$

6. 如果 $A \oplus B = \emptyset$, 证明 $A = B$ 。

7. 证明下列各等式: