研究生教材

集值测度与随机集

张文修 著

西安交通大学出版社

内 容 简 介

集值测度与随机集是近 20 年发展起来的新的数学学科。它不仅深化了测度论与概率论的研究，以新的观点处理随机过程的问题，而且广泛应用于系统识别、图象处理、经济系统、控制系统与随机规划等实际问题和科学领域。

本书着重叙述了拓扑空间的超空间，集值测度与随机集的基本内容。同时，包含了作者在集值测度方面多项尚未发表的成果。

本书适合于作高等学校数学系研究生和高年级大学生的教科书，也可供从事集值测度与随机集理论研究的科技人员阅读参考。

集值测度与随机集

张文修 著

责任编辑 王延华

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路 28 号）

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 7 字数：174 千字

1989 年 9 月第 1 版 1989 年 9 月第 1 次印刷

印数：1——3000 册

ISBN 7-5605-0180-X/O·38 定价：1.85 元

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的，因此在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样的高层次教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

序　言

20世纪初期，由于 Lebesgue 积分的引进产生了实变函数论。测度论则是它的进一步抽象和概括，并且被应用在概率论的理论研究中。集值测度与随机集进一步深化了测度论的研究范围，并被应用到随机过程与现代鞅论的理论研究中。

但是，集值测度与随机集的引进，首先来源于经济系统与控制系统的需要。比如在经济系统中，消费计划、预算和供给、生产计划等都是商品空间的集合。为了要研究经济系统的均衡问题，必须研究取集值的映射和取集值的集函数，因为在经济系统中有不可忽视的人的动因产生的不同效应。1964 年，R.J.Aumann 与 K.Vind 从经济系统理论的研究出发，提出了两种不同的观点。R.J.Aumann 从单个动因的效应出发引进了集值映射，而 K.Vind 从群体动因的效应出发，引进了集值集函数。1972 年，G.Debreu 与 D. Schmeidler 研究了集值集函数的 Radon-Nikodym 导数，指出了两种观点的内在联系，即群体动因的效应是个体动因效应的总积累。1972年，Z.Artstein 作为集值测度的概念系统地研究了集值集函数，给出了集值测度的凸性定理、选择定理，改进了集值测度的 Radon-Nikodym 导数。1973 年，D. G.Kendall 用关联函数给出了可测闭集值映射，即随机集的理论基础。1975 年，G.Matheron 研究了随机集与积分几何，给出了随机集在随机过程和现代鞅论研究中的应用。1982年开始，我们注意到集值测度与随机集同测度论的关系，将已有结果加以系统化并进行了进一步研究，给出了集值测度的 Lebesgue 分解定理、表示定理、构造定理、扩张定理，随机集序列推广的强大数定律

等。这样，集值测度与随机集有了一个基本框架。本书的宗旨是力图将集值测度与随机集的研究成果进行逻辑概括。

本书的基本内容曾为西安交通大学数学系研究生讲过，同时他们的研究工作，特别是乐惠玲、李腾、马计丰、李爱洁等人的部分研究结果，也丰富了本书的内容。本书也曾为南京空军气象学院和山西师范大学数学系等部分教师讲过，他们的宝贵意见也被反映在修改后的章节中，在此一并向他们致谢。特别感谢四川大学刘应明教授、陕西师范大学王国俊教授，北京师范大学汪培庄教授，南京空军气象学院李世楷副教授，他们的意见对本书框架的形成有着直接的影响。还需要说明的是本书采用了 E.Klein 与 A.C.Thompson 于1984年出版的"Theory of Correspondences"的部分内容，特别是超空间上的拓扑性质。因此，也借此机会，向 E.Klein 教授等人致谢。

应当指出，本书并不是一本已经完善的著作，因为集值测度与随机集本身的研究工作还有待进一步完善。比如集值测度的许多结果还局限于紧凸集值测度的情况。许多研究课题还无人涉及，如集值测度的哈恩分解与乘积集值测度等。随机集的分布还停留在概念研究上，因此相应的统计理论还不够深入。但是，本书毕竟为集值测度与随机集的研究提供了一个框架，为进一步深入研究随机集与集值随机过程创造了条件。因此，一本不完善著作的出版可能会促进一门新学科的发展。如果能有这样的效果，作者将会感到莫大的欣慰。

张文修

1987.12.24

目　　录

第一章 超空间

§1.1 拓扑空间

集合是数学的一个基本概念，它被定义成由某些具有某种共同特点的个体构成的集体。集合中的个体称为元素，集合中的一部分元素构成的集合称为子集合。比如平面上所有的点的全体构成集合 R^2，满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的点的全体是 R^2 的子集合，原点是 R^2 的一个元素。一般地，用 x, y, …表示集合的元素，A,B,…表示子集合。元素 x 属于子集合 A，记为 $x\in A$；否则记为 $x\notin A$。两个子集合 A 和 B，若 $x\in A$ 时必有 $x\in B$，称 A 含于 B，记为 $A\subset B$。不包含任何元素的子集合称为空集，记为 ϕ。对于任意子集合 A，有 $\phi\subset A$。若对两个子集合 A 与 B，同时有 A 含于 B 及 B 含于 A，称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

设 A，B 为任意两个集合，称

$$A\cup B=\{x;x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的“并”集合，称

$$A\cap B=\{x;x\in A \text{ 与 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的“交”集合。特别 $A\cap B\neq\phi$，称 A 与 B 相交；当 $A\cap B=\phi$ 时称 A 与 B 不相交。称

$$A\setminus B=\{x;x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$$

为 A 与 B 的“差”集合。若 $A_t(t\in T)$ 为一族集合，则称

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{x;\ \text{存在 } t\in T,\ \text{使 } x\in A_t\}$$

为 $A_t(t\in T)$ 的“并”集合，称

$$\bigcap_{t\in T} A_t=\{x; \text{ 对于任意 } t\in T,\ x\in A_t\}$$

为 $A_t(t\in T)$的“交”集合。

设X是非空集合，$\mathscr{T}$是X的子集族，如果满足下面的条件：

(1) $X\in\mathscr{T}$，$\phi\in\mathscr{T}$；

(2) 若A，$B\in\mathscr{T}$，则 $A\cap B\in\mathscr{T}$；

(3) 若 $A_t\in\mathscr{T}(t\in T)$，则$\bigcup\limits_{t\in T} A_t\in\mathscr{T}$，

称$\mathscr{T}$为X的拓扑，$(X,\mathscr{T})$称为拓扑空间，$\mathscr{T}$中的每一个成员均为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的开集。

对于度量空间(X,ρ)，$\mathscr{T}_\rho$ 为关于度量ρ形成的X全体开集，称$(X,\mathscr{T}_\rho)$为X由度量ρ诱导出的拓扑。反之，若$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，存在X上的度量ρ使得$\mathscr{T}$即是由度量ρ诱导出来的X的拓扑，称$(X,\mathscr{T})$为可度量化的拓扑空间。

设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$x\in X$，U为X的子集，如果存在$V\in\mathscr{T}$，使$x\in V\subset U$，称U为x的邻域。特别包含x的开集均为x的邻域，称为x的开邻域。拓扑空间X的子集合U为开集当且仅当U为其每一点的邻域。

设A为拓扑空间X的子集，如果点$x\in X$的每一邻域U中都有A中异于x的点，则称x为A的聚点。集合A的全体聚点记为$d(A)$，称为A的导集。若$d(A)\subset A$，称A为闭集。拓扑空间X的子集A为闭集当且仅当A的补集 $A^c=X\setminus A$ 是开集。称$\mathrm{cl}A=A\cup d(A)$为A的闭包，A为闭集当且仅当$A=\mathrm{cl}A$。A的闭包是包含A的所有闭集之交。为方便起见，记$\bar{A}=\mathrm{cl}A$。

设A为拓扑空间X的子集，如果A是点x的邻域，称x为A的内点。集合A的所有内点称为A的内部，记为$\mathrm{i}(A)$，且$\mathrm{i}(A)=(\mathrm{cl}(A^c))^c$。集合$A$为开集当且仅当$A=\mathrm{i}(A)$，任意集合$A$的内部是包含于$A$的所有开集的并。如果点$x\in X$的任意邻域中既有$A$的点又有$A^c$的点，称$x$为$A$的边界点。集合$A$的所有边界

点称为A的边界，记为 $\mathrm{b}(A)$。显然有

$$\bar{A}=\mathrm{cl}\,A=\mathrm{i}(A)\cup\mathrm{b}(A)$$

设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$\mathscr{B}$为$\mathscr{T}$的子族。若$\mathscr{T}$的每个成员都是$\mathscr{B}$中某些成员的并，称$\mathscr{B}$为拓扑空间X的基。度量空间中所有球形邻域所构成的集族都是这个度量空间作为拓扑空间时的基。如果拓扑空间的基是可数族，称为可数基。拓扑空间X如果有可数基，称X为满足第二可数公理的空间。m维欧氏空间 R^m 是满足第二可数公理的空间。

$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$\mathscr{P}$为$\mathscr{T}$的子族。如果所有$\mathscr{P}$中有限个成员的交集族为拓扑$\mathscr{T}$的基，称$\mathscr{P}$为拓扑的子基。

D为拓扑空间X的子集，且 $\mathrm{cl}(D)=X$，称D为X的稠密子集。有可数稠密子集的拓扑空间称为可分的空间。满足第二可数公理的拓扑空间是可分的，可分的度量空间满足第二可数公理。

X为拓扑空间。如果X的任意不相同的两点中，每一点都有一个开邻域不包含另一点，称X为 T_1 空间。T_1 空间的独点集是闭集。如果X的任意两个不相同的点都有不相交的开邻域，称X为 T_2 空间或 Hausdorff 空间。如果X中任意一点以及任意不含这一点的闭集有不相交的开邻域，称X为正则空间。如果X的任意两个不相交的闭集有不相交的开邻域，则X为正规空间。满足 T_1 的正则空间为 T_3 空间，满足 T_1 的正规空间为 T_4 空间。拓扑空间X为正规空间当且仅当对于X的任意两个不相交的闭集A，B，存在连续映射 $f:X\to[0,1]$，使 $x\in A$ 时，$f(x)=0$；$x\in B$ 时，$f(x)=1$。

设$\{G_t;t\in T\}$为X的一族开集，若 $\bigcup\limits_{t\in T}G_t=X$，称$\{G_t;t\in T\}$为$X$的开覆盖。如果$X$的每一个开覆盖有有限的子覆盖，称$X$为紧致空间。拓扑空间$X$的子集$C$是$X$的紧致子集当且仅当$C$的每一个由$X$的开集构成覆盖有有限子覆盖。实际上，如果$\mathscr{T}$为拓扑空间的基，由$\mathscr{T}$的元素构成的$C$的覆盖有有限的子覆盖时，$C$

为紧致子集。满足第二可数公理的紧致的 Hausdorff 空间是可度量化的空间。

设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，∞为任一不属于X的元素，令 $X^*=X\cup\{\infty\}$，$\mathscr{T}_1=\{E\subset X^*;\ X^*\setminus E$ 为X的紧致闭集$\}$，则 $\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cup\mathscr{T}_1\cup\{X^*\}$为 X^* 的拓扑，且拓扑空间 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 是紧致的。即任一拓扑空间都是某一紧致空间的子空间。

设X为拓扑空间，如果X的每一无限子集都有聚点，称X为列紧空间。每一紧致空间都是列紧空间，每一 T_1 列紧空间都是紧致空间。特别对度量空间，列紧性与紧致性是等价的。如果拓扑空间X的每一点都有一个紧致邻域，称X为局部紧致空间。每一局部紧致的 Hausdorff 空间是正则空间。若$\mathscr{A}$为拓扑空间X的覆盖，如果对每一个 $x\in A$，x 有一个邻域仅与$\mathscr{A}$中有限个成员相交，则称$\mathscr{A}$为 A 的局部有限的覆盖。如果对于X的每一开覆盖$\mathscr{A}$，有局部有限的开覆盖$\mathscr{A}_1$ 是$\mathscr{A}$的加细，即$\mathscr{A}_1$ 的每一成员都包含在$\mathscr{A}$的某一成员之中，称X为仿紧致空间。满足第二可数公理、局部紧致的 Hausdorff 空间是仿紧致空间。

若$(X,\mathscr{T})$是局部紧致的，可分的 Hausdorff 空间，则以下性质成立：

(1) 对于任意紧集 K，存在不增的开集 $G_n\supset K$，使得 $K=\bigcap\limits_{n=1} G_n$。如果闭集$F$和紧集$K$是不交的，则存在开集$G$和 G'，使 $G\cap G'=\phi$，$G\supset F$，$G'\supset K$。

(2) 对于任意开集G，存在不减的相对紧开集 G_n，即 G_n 是开集，$\overline{G}_n$ 是紧集，$\overline{G}_n\subset G_{n+1}(n\geqslant 1)$，使$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{G}_n$。特别对任意紧集 $K\subset G$，只要 n 充分大则 $K\subset G_n$。

(3) 存在可数的开集族$\mathscr{B}$，使任意开集G是$\mathscr{B}$的子族的并。特别可以选择$\mathscr{B}$，使 $G\in\mathscr{B}$ 时，$\overline{G}$ 是紧集。

由于度量空间是局部紧致的 Hausdorff 空间，因此对于可分

的度量空间以上性质仍然成立。

设A，B是拓扑空间X的子集，若

$$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\phi$$

称A与B为隔离的子集。如果有X的两个非空隔离子集A与B，使$X=A\cup B$，称X为不连通的空间；否则，称X为连通的空间。有理数空间是不连通的，实数空间是连通的。若A为拓扑空间X的非空子集，当A作为X的子空间是连通的，则称A为X的连通子集；否则，称A为X的非连通子集。

设$f:X\to Y$为从拓扑空间X到拓扑空间Y的映射。若Y的任意开集U的原象

$$f^{-1}(U)=\{x;\ 存在\ y\in U\ 使\ y=f(x)\}$$

都是X的开集，称f为连续映射。若$x\in X$，且$f(x)$在Y中的任意邻域W的原象$f^{-1}(W)$为x在X中的邻域，称f为在点x处连续的映射。

设X，Y为拓扑空间，$f:X\to Y$，则下列条件是等价的：

(1) f是连续映射；

(2) Y的任一闭集F的原象$f^{-1}(F)$都是X的闭集；

(3) Y的拓扑的某一基$\mathscr{B}$的任一成员B的原象$f^{-1}(B)$都是X的开集；

(4) f在每一点$x\in X$处都是连续的；

(5) 对于X的任一子集A，$f(\mathrm{cl}(A))\subset\mathrm{cl}(f(A))$；

(6) 对于Y的任一子集B，$\mathrm{cl}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$。

若$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$为连续映射，则$g\circ f:X\to Z$为连续映射，其中$(g\circ f)(x)=g(f(x))$。

设X，Y为拓扑空间，f为X到Y上的一一映射。若f与f^{-1}都是连续映射，称f为从X到Y的同胚映射。同胚映射是等价关系，在同胚映射下保持不变的性质称为拓扑不变性质。拓扑不变性质是拓扑学研究的主要内容。

本节我们不加证明地引进了拓扑空间的一些主要概念和定理，是为了以后各章节的需要。有兴趣的读者可以在任何一本拓扑学的参考书中找到这些内容。

§1.2 超空间上的拓扑

设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$\mathscr{P}(X)$为X的幂集，即

$$\mathscr{P}(X)=\{A;\ A\subset X\} \tag{1.2.1}$$

$\mathscr{P}_0(X)$ 为 $\mathscr{P}(X)\setminus\{\phi\}$，即$X$上非空子集的全体，称 $\mathscr{P}_0(X)$ 为超空间。对于任意 $B\in\mathscr{P}(X)$，记

$$I^*(B)=\{A\in\mathscr{P}_0(X);A\subset B\} \tag{1.2.2}$$

$$I_*(B)=\{A\in\mathscr{P}_0(X);A\cap B\neq\phi\} \tag{1.2.3}$$

显然有 $I^*(B)\subset I_*(B)$，且

$$I^*(B)^c=\mathscr{P}_0(X)\setminus I^*(B)=I_*(B^c) \tag{1.2.4}$$

$$I_*(B)^c=\mathscr{P}_0(X)\setminus I_*(B)=I^*(B^c) \tag{1.2.5}$$

记

$$\mathscr{T}^*=\{I^*(G);\ G\in\mathscr{T}\} \tag{1.2.6}$$

$$\mathscr{T}_*=\{I_*(G);\ G\in\mathscr{T}\} \tag{1.2.7}$$

$\mathscr{T}^*$ 对交运算是封闭的，即 $G_1,G_2\in\mathscr{T}$时有

$$I^*(G_1)\cap I^*(G_2)=I^*(G_1\cap G_2)$$

$\mathscr{T}_*$ 对并运算是封闭的，即 $G_1,G_2\in\mathscr{T}$ 时有

$$I_*(G_1)\cup I_*(G_2)=I_*(G_1\cup G_2)$$

定义 1.2.1 以 $\mathscr{T}^*$ 为基的拓扑称为超空间 $\mathscr{P}_0(X)$ 上的上拓扑，记为 $\mathscr{T}_u$；以 $\mathscr{T}_*$ 为子基的拓扑称为超空间 $\mathscr{P}_0(X)$ 上的下拓扑，记为 $\mathscr{T}_l$；以

$$\mathscr{T}=\{I_*(G),\ I^*(G);\ G\in\mathscr{T}\}$$

为子基的拓扑称为 $\mathscr{P}_0(X)$上的 Vietoris 拓扑，记为 $\mathscr{T}_v$。

设 $G_1,\cdots,G_n\in\mathscr{T}$，记

$$I(G_1,\cdots,G_n)=\{A\in\mathscr{P}_0(X);\ A\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i, A\cap G_i\neq\phi(i\leqslant n)\}$$

则 Vietoris 拓扑是以

$$\mathscr{B}=\{I(G_1,\cdots,G_n);G_i\in\mathscr{T}(i\leqslant n);n\geqslant 1\}$$

为子基的拓扑。这是因为

$$I(G_1,\cdots,G_n)=I_*(G_1)\cap\cdots\cap I_*(G_n)\cap I^*(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)$$

$$I^*(G)=I(G),\ \ I_*(G)=I(X,G)$$

由(1.2.4)及(1.2.5)知，若F为$(X,\mathscr{T})$中的闭集，则 $I_*(F)$是上拓扑中的闭集，$I^*(F)$是下拓扑中的闭集，它们都是 Vietoris 拓扑中的闭集。

下面讨论超空间上的拓扑与它的基本拓扑$(X,\mathscr{T})$的关系。

定理 1.2.1 设 i 是X到 $\mathscr{P}_0(X)$ 上的映射，即 $i(x)=\{x\}$，则 i 是 $(X,\mathscr{T})$ 到 $\mathscr{P}_0(X)$ 在 $\mathscr{T}_u$，$\mathscr{T}_l$，$\mathscr{T}_v$ 三种拓扑下的连续映射。

证明：若 $G\in\mathscr{T}$，则

$$i^{-1}(I^*(G))=\{x\in X;i(x)\in I^*(G)\}=\{x\in X;\{x\}\subset G\}=G$$

类似地，若 $G_1,\cdots,G_n\in\mathscr{T}$，则

$$\begin{aligned}i^{-1}(I_*(G_1)\cap\cdots\cap I_*(G_n))&=\{x\in X;i(x)\in\bigcap_{i=1}^{n}I_*(G_i)\}\\&=\{x\in X;\ \{x\}\cap G_i\neq\phi\quad(i\leqslant n)\}\\&=\{x\in X;\ x\in G_i(i\leqslant n)\}=\bigcap_{i=1}^{n}G_i\end{aligned}$$

则证。

定理 1.2.2 设$(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$\mathscr{N}$表示X的有限子集全体，则$\mathscr{N}$稠密于$(\mathscr{P}_0(X),\mathscr{T}_v)$。

证明：设G是非空开集，G含有限子集，于是 $I^*(G)\cap\mathscr{N}\neq\phi$，类似地，若 $G_1,\cdots,G_n$ 是非空开集，令 $x_i\in G_i(i\leqslant n)$，则

$$\{x_1,\cdots,x_n\}\in I_*(G_1)\cap\cdots\cap I_*(G_n)\cap\mathscr{N}$$

于是$\mathscr{N}$相交于 $\mathscr{T}_v$ 中每一个基本开集，从而是稠密的。

定理 1.2.3 若$(X,\mathscr{T})$是可分的，则$(\mathscr{P}_0(X),\mathscr{T}_v)$是可分的。

证明：设 $D=\{x_n;n\in N\}$ 是X的可数稠密子集，$\mathscr{N}_D$是D的有限子集的总体，$\mathscr{N}_D$是可数的。因为D是X的稠密子集，则D与X中任意开集的交集非空。类似定理 1.2.2 可证，$\mathscr{N}_D$相交于$\mathscr{T}_v$中每一个基本开集，从而$\mathscr{N}_D$稠密于$(\mathscr{P}_0(X),\mathscr{T}_v)$，即$(\mathscr{P}_0(X),\mathscr{T}_v)$是可分的。

定理 1.2.4 设$(X,\mathscr{T})$是T_1拓扑空间，则$(\mathscr{P}_0(X),\mathscr{T}_v)$为$T_0$空间。

证明：设A,B为$\mathscr{P}_0(X)$中的不同的元素，则$A\setminus B$和$B\setminus A$必有一个是非空集。设$x\in A\setminus B$，由$(X,\mathscr{T})$是T_1空间，$\{x\}$是闭集，于是$G_x=X\setminus\{x\}$是$(X,\mathscr{T})$中的开集。由于$B\in I^*(G_x)$，但是$A\notin I^*(G_x)$，从而$(\mathscr{P}_0(X),\mathscr{T}_v)$为$T_0$空间。

以$\mathscr{F}(X),\mathscr{K}(X)$表示$(X,\mathscr{T})$中所有闭集与所有紧致集，$\mathscr{F}_0(X)$与$\mathscr{K}_0(X)$表示$(X,\mathscr{T})$中所有非空闭集和非空紧致子集。类似于在$\mathscr{P}_0(X)$上建立拓扑一样，可以在$\mathscr{F}_0(X)$与$\mathscr{K}_0(X)$上建立拓扑、下拓扑与 Vietoris 拓扑，仍记为$\mathscr{T}_u,\mathscr{T}_l,\mathscr{T}_v$。在不致混淆的情况下，有时也用$\mathscr{F}_0,\mathscr{K}_0$表示$\mathscr{F}_0(X)$及$\mathscr{K}_0(X)$。

定理 1.2.5 对于任意拓扑空间$(X,\mathscr{T})$，$(\mathscr{F}_0(X),\mathscr{T}_v)$是$T_0$空间。

证明：设A,B是$\mathscr{F}_0$中不同元素，不妨设$A\subset B$不成立。令$G=X\setminus B$，$I_*(G)$是$(\mathscr{F}_0,\mathscr{T}_v)$中开集，$A\in I_*(G),B\notin I_*(G)$，则证$(\mathscr{F}_0,\mathscr{T}_v)$是$T_0$空间。

定理 1.2.6 如果$(X,\mathscr{T})$是正则拓扑空间，则$(\mathscr{F}_0(X),\mathscr{T}_v)$是 Hausdorff 空间；如果$(X,\mathscr{T})$是$T_1$空间，$(\mathscr{F}_0(X),\mathscr{T}_v)$是 Hausdorff 空间，则$(X,\mathscr{T})$是正则空间（从而是$T_3$空间）。

证明：设$(X,\mathscr{T})$是正则扑拓空间，A,B是$\mathscr{F}_0$中不同的元素，不妨设$A\setminus B\neq\phi$，$a\in A\setminus B$，于是存在G和$G'(\in\mathscr{T})$，使

$a\in G, B\subset G', G\cap G'=\phi$,从而 $A\in I_*(G), B\in I^*(G')$, $I_*(G)$与 $I^*(G')$ 为 $\mathscr{F}_0$ 中不交开集，从而$(\mathscr{F}_0, \mathscr{T}_v)$是 Hausdorff 空间。

相反地，假设$(\mathscr{F}_0, \mathscr{T}_v)$是 Hausdorff 空间，$F\in\mathscr{F}_0, a\notin F$。由于$(X, \mathscr{T})$是 T_1 空间，$\{a\}$为闭集，F 与 $F'=F\cup\{a\}$是不同元素，且 $F, F'\in\mathscr{F}_0$。于是存在 $(\mathscr{F}_0, \mathscr{T}_v)$ 中开集 $\mathscr{G}$ 与 $\mathscr{G}'$，使 $F\in\mathscr{G}$，$F'\in\mathscr{G}'$，$\mathscr{G}\cap\mathscr{G}'=\phi$。若 $G\in\mathscr{T}$与F相交必与 F' 相交，则 $\mathscr{G}$ 必为形式 $I^*(G)$，即存在 $G\in\mathscr{T}$，使 $F\subset G, F'\not\subset G$，从而 $a\notin G$。又对任意 $G\in\mathscr{T}$，$G\supset F'$ 必有 $G\supset F$,从而 $\mathscr{G}'$ 为 $I_*(G')$ 的形式，于是 $a\in G', F\cap G'=\phi$,这样得到的G和 G'，使 $F\subset G$，$a\in G'$。因为 $\mathscr{G}$ 与 $\mathscr{G}'$ 是不相交的，必有 $G\cap G'=\phi$，从而$(X, \mathscr{T})$是正则的。

定理 1.2.7 $(\mathscr{K}_0(X), \mathscr{T}_v)$ 是 Hausdorff 空间当且仅当$(X, \mathscr{T})$是 Hausdorff 空间。

证明：设$(X, \mathscr{T})$是 Hausdorff 空间，A 与 B 是 $\mathscr{K}_0$ 中不同元素，不妨设 $A\setminus B\neq\phi$，$a\in A\setminus B$。由于B是紧致子集，$a\notin B$，利用有限覆盖性质及 Hausdorff 空间性质，存在 G，$G'\in\mathscr{T}$，使 $a\in G$，$B\subset G'$，$G\cap G'=\phi$。类似定理 1.2.6 可证$(\mathscr{K}_0, \mathscr{T}_v)$ 是 Hausdorff 空间。

反之，假设$(\mathscr{K}_0, \mathscr{T}_v)$是 Hausdorff 空间，$a$，$b\in X$，$a\neq b$，则$F=\{a\}\in\mathscr{K}_0$，$F'=\{a, b\}\in\mathscr{K}_0$，类似定理 1.2.6 可证存在 G，$G'\in\mathscr{T}$,使$\{a\}\in I^*(G)$，$\{a, b\}\in I_*(G')$，$G\cap G'=\phi$,于是 $a\in G$，$b\in G'$，则证$(X, \mathscr{T})$为 Hausdorff 空间。

定理 1.2.8 设$(X, \mathscr{T})$是正则拓扑空间,$\mathscr{C}$ 是$(\mathscr{F}_0(X), \mathscr{T}_v)$中紧致子集，则 $B=\bigcup\{C; C\in\mathscr{C}\}$是闭集。

证明：设 $a\in X\setminus B$，只须证 a 是 $X\setminus B$ 的内点。对于任意 $C\in\mathscr{C}$，$C\in\mathscr{F}_0$，$a\notin C$，由 $(X, \mathscr{T})$ 的正则性，存在开集 G_c 与 G_c'，使 $C\subset G_c$，$a\in G_c'$，$G_c\cap G_c'=\phi$。于是$\{I^*(G_c); C\in\mathscr{C}\}$复盖 $\mathscr{C}$，而 $\mathscr{C}$ 是紧致子集，于是存在 $\mathscr{C}$ 的有限子覆盖$\{I^*(G_{c_k})$;

$k\leqslant n\}$，对应于 G_{c_k} 的 G'_{c_k} 的交 $G=\bigcap_{k=1}^{n}G'_{c_k}$ 满足 $B\cap G=\phi$，且 $a\in G$，于是 a 是 $X\setminus B$ 的内点。从而 B 为闭集。

定理 1.2.9 $(X,\mathscr{T})$ 是任意拓扑空间，$\mathscr{C}$ 是 $(\mathscr{K}_0(X),\mathscr{T}_v)$ 的紧致子集，则 $B=\bigcup\{C;\ C\in\mathscr{C}\}$ 是紧致子集。

证明： 设 $\{G_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 是 B 的一族开覆盖，对于任意的 $C\in\mathscr{C}$，$C\in\mathscr{K}_0$，存在 Λ 的有限子集 N_c，使 $C\subset\bigcup\{G_\lambda;\ \lambda\in N_c\}$。令 $G_c=\bigcup\{G_\lambda;\ \lambda\in N_c\}$ $(C\in\mathscr{C})$，则 $\{I^*(G_c);\ C\in\mathscr{C}\}$ 是 $\mathscr{C}$ 的开覆盖。由于 $\mathscr{C}$ 是紧致子集，存在 $\mathscr{C}$ 的有限子覆盖 $\{I^*(C_{c_k});k\leqslant n\}$，令 $N=\bigcup_{k=1}^{n}N_{c_k}$，则 $B\subset\bigcup_{\lambda\in N}G_\lambda$，$N$ 是有限集，故 B 是紧致子集。

定理 1.2.10 若 $(X,\mathscr{T})$ 是紧致的，则 $(\mathscr{F}_0(X),\mathscr{T}_v)$ 是紧致的；相反地，若 $(X,\mathscr{T})$ 是 T_1 空间，$(\mathscr{F}_0(X),\mathscr{T}_v)$ 是紧致的，则 $(X,\mathscr{T})$ 是紧致的。

证明： 根据 Alexander 子基定理，若 $\mathscr{F}_0$ 关于子基元素构成的每个覆盖存在有限子覆盖，则 $\mathscr{F}_0$ 是紧致的。设 $\{I^*(G_r),I_*(G_s);\ r\in\Lambda_1,s\in\Lambda_2\}$ 为 $\mathscr{F}_0$ 的覆盖，记 $G=\bigcup\{G_s;s\in\Lambda_2\}$，$F_0=X\setminus G$，若 $F_0\neq\phi$，则 $F_0\in\mathscr{F}_0$。由于 $F_0\cap G_s=\phi(s\in\Lambda_2)$，则存在 $r_0\in\Lambda_1$，使 $F_0\subset G_{r_0}$，于是 $\{G_{r_0},G_s(s\in\Lambda_2)\}$ 为 X 的开覆盖，利用 X 的紧致性，存在有限子覆盖 $\{G_{r_0},G_{s_i}(i\leqslant n)\}$。若 $F\in\mathscr{F}_0$，$F\subset X$，或 $F\subset G_{r_0}$，或 F 相交于某 $G_{s_i}(i\leqslant n)$。因而 $\{I^*(G_{r_0}),I_*(G_{\ i})(i\leqslant n)\}$ 是 $\mathscr{F}_0$ 的子覆盖。当 $F_0=\phi$ 时可类似证明。

相反地，若 $(\mathscr{F}_0,\mathscr{T}_v)$ 是紧致的，则 $(\mathscr{F}_0,\mathscr{T}_l)$ 是紧致的。令 $\{G_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的开覆盖，若 $F\in\mathscr{F}_0$，必有 $\lambda\in\Lambda$，使 $F\cap G_\lambda\neq\phi$，从而 $\{I_*(G_\lambda);\lambda\in\Lambda\}$ 是 $\mathscr{F}_0$ 的开覆盖。由于 $\mathscr{F}_0$ 是紧致的，则存在 $\mathscr{F}_0$ 的有限子覆盖 $\{I_*(G_{\lambda_i});(i\leqslant n)\}$。又因 X 是 T_1 空间，单点集是闭集，因此开集族 $\{G_{\lambda_i};i\leqslant n\}$ 覆盖 X，即 X 是紧致的。