

信号处理 与 过抽样转换器

刘益成
罗维炳
编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: <http://www.phei.co.cn>

EN9117

L76

信号处理与过抽样转换器

刘益成 罗维炳 编著

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

过抽样 $\Sigma - \Delta$ A/D和D/A转换器是新型的数-模转换器件,精度高,成本低,构成系统简单,在数字音响、多媒体、声纳、遥测地震仪等高精度数据采集与电子测量中获得了广泛应用。本书是国内第一本关 $\Sigma - \Delta$ 转换器的专著,从信号处理的角度出发,系统地介绍了该器件的工作原理及使用方法。本书一至三章说明了数字信号处理的基本原理,第四章论述了过抽样 $\Sigma - \Delta$ 的原理及设计方法,第五章讨论了数字抽取和内插滤波器的结构与设计方法,第六章介绍了 $\Sigma - \Delta$ 转换器的典型器件并通过具体例子,说明了 $\Sigma - \Delta$ 转换器的使用方法。

本书可供从事D/A和A/D转换器研制、信号采集与处理、电子仪器与测量、地球物理仪器等方面的工程技术人员参考,也可作为电子、电信与仪器类专业本科和研究生在学习信号处理方面的教材或教学参考书。

书 名: 信号处理与过抽样转换器

编 著: 刘益成 罗维炳

责任编辑: 崔慕丽

排版制作: 电子工业出版社计算机排版室

印 刷 者: 北京牛山世兴印刷厂

装 订 者: 三河市路通装订厂

出版发行: 电子工业出版社出版、发行 URL: <http://www.phei.co.cn>

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036 发行部电话 68214070

经 销: 各地新华书店经销

开 本: 787×1092 1/16 印张: 13.25 字数: 300千字

版 次: 1997年9月第1版 1997年9月第1次印刷

书 号: ISBN 7-5053-4359-9
TN·1104

定 价: 20.00元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换
版权所有·翻印必究

序言

数字信号处理技术和相应的各种算法目前正被广泛地应用于通讯、雷达、声纳、遥感、图像处理和识别、语音处理和识别、地球物理、核物理等各领域。在各行各业的工程技术中越来越多的数字信号处理系统以其精度高，功能强，体积小，重量轻，成本低等优点，正在不断地替代和更新以往的模拟系统，稳定可靠地解决着以往各种模拟系统难以解决的课题与任务。

数字信号处理技术的关键环节之一是模拟信号与数字信号之间的相互转换，出现了多种转换技术，其中过抽样模数和数模转换是近年来出现的一种新型转换技术。随着电子学和计算机的飞速发展，该技术正在不断地应用于各种工业部门，特别在高分辨率、高保真度、大动态范围需求的数据采集处理系统中表现出了非凡的优越性。

数字信号处理涉及的内容异常广泛，本书从 Z 变换、数字滤波器等数字信号处理的基本理论出发，系统地论述了过抽样模数、数模转换器件的原理，设计方法及其应用。本书作者多年来从事高精度遥测数据采集和实时信号处理系统的研制，成功地研制了多种大型遥测地震数据采集系统。本书从理论到实践，从原理到应用都结合得较紧密，对于从事数据采集与信号处理的工程技术人员是一本很有价值的参考书，同时也可以作为高等院校有关专业的教学参考书。

李庆忠

1997.6

前言

自然界中的各种物理量，例如光、电、声、振动、压力、温度等常常表现为在时间域上连续的变化的模拟信号。在科学研究和工程技术的各个领域往往需要对这些信号进行加工处理(例如检测、变换、滤波、压缩、传输、显示等)，这种处理以往大都采用模拟系统(或电路)来实现。近年来随着大规模集成电路和数字信号处理技术、计算机技术的发展，数字系统得到了飞速发展，由于数字系统具有性能高、可靠性好，灵活性以及体积小、耗电量少、成本低等优点，使得模拟信号已越来越多地采用数字系统进行处理。

数字系统只能处理数字信号，为了能利用数字系统来处理模拟信号，首先必须将模拟信号转换成数字信号，模-数(A/D)转换器就是用来实现这一转换的器件。图 0-1 是一个模拟信号数字处理系统的典型框图，输入的模拟信号经预放、滤波后送给 A/D 转换器转换成数字信号后，送入计算机或专用数字设备进行处理，最后再将处理后的数字信号经相反的转换器，即数-模(D/A)转换器，转换成模拟信号输出。由图中可见，A/D 和 D/A 转换器是模拟信号数字处理中必不可少的基本部件，是联系模拟和数字系统的桥梁，它们在某种程度上决定了整个系统的性能。

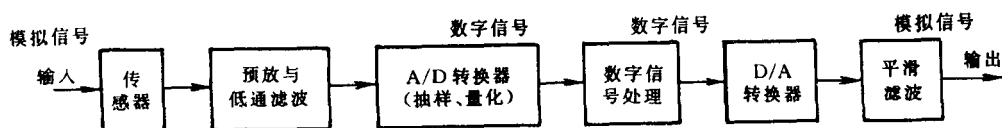


图 0-1 模拟信号数字处理系统的典型框图

随着科学技术的发展，人们对于数据转换的精度要求越来越高，例如在现代地震勘探中，地震信号的动态范围大于 120dB，为了能获得高分辨的地震数据，要求采集系统的动态范围必须大于 120dB，畸变小于百万分之五，甚至百万分之一，这就对采集系统的 A/D 转换器提出了很高的要求。同样，在用数字方法产生高精度的模拟信号时，为了使产生的信号的信噪比和谐波畸变等指标优于百万分之五，要求 D/A 转换器必须具有 20 位以上的分辨率。因此如何获得高精度的数据转换一直是电子和各种信息处理工作者所追求的目标。

任何 A/D 转换器都包括有三个基本的功能，这就是抽样、量化与编码。抽样过程将模拟信号在时间上离散化使之变成抽样信号，量化将抽样信号的幅度离散化使之变成数字信号，编码则将数字信号最终表示成为数字系统所能接受的形式。如何实现这三个功能就决定了 A/D 转换器的形式与性能。

传统上，A/D 转换过程大都严格按照抽样，量化和编码的顺序进行。首先根据抽样定理用模拟信号对重复频率等于抽样频率 f_s 的脉冲串进行幅度调制，将模拟信号变成脉冲调幅信号，然后对每一个样值的幅度进行均匀量化，最后根据需要的码制用二进制码元来表示量化电平的大小。对于一个 n 位的 A/D 转换器每一个抽样值都编成 n 位码。由于

量化为均匀量化,按照通信中的调制编码理论,上述编码过程通常称为线性脉冲编码调制(LPCM),因此这类 A/D 转换器被称为 LPCM 型 A/D 转换器,或简称为 PCM A/D 转换器。现今使用的绝大部分 A/D 转换器,例如并行比较型,逐次比较型,积分型等都属于这种类型。这种类型的 A/D 转换器由于是根据抽样值的幅度大小进行量化编码,一个分辨率为 n 位的 A/D 转换器其满刻度电平被分为 2^n 个不同的量化等级,为了能区分这 2^n 个不同的等级需要相当复杂的比较网络和极高精度的模拟电子器件。当位数 n 较高时,比较网络的实现是十分困难的,因而限制了转换器分辨率的提高。同时在使用 A/D 转换器构成采集系统时,为了保证在转换过程中样值不发生变化,必须在转换之前对抽样值进行抽样保持, A/D 转换器的分辨率越高,这种要求越显得重要,因此在一些高精度采集系统中,在 A/D 转换器的前端除了设置有抗混叠滤波器外大都还需要设置专门的抽样/保持电路,从而增加了采集系统的复杂度。

另一类所谓增量调制编码型 A/D 转换器则与之不同,它不是直接根据抽样数据的每个样值的大小进行量化编码,而是根据前一样值与后一样值之差即所谓增量的大小来进行量化编码,在某种意义上它是根据模拟信号波形的包络形状来进行量化编码。这就是本书要介绍的新型过抽样 Σ - Δ A/D 转换器(以及与之对应的 Σ - Δ D/A 转换器)。它由两部分组成,第一部分为模拟 Σ - Δ 调制器,第二部分为数字抽取滤波器,如图 0-2 所示。 Σ - Δ 调制器以极高的抽样频率对输入模拟信号进行抽样,并对两个抽样之间的差值进行低位量化(通常为 1 位),从而得到用低位数码表示的数字信号或 Σ - Δ 码,然后将这种 Σ - Δ 码送给第二部分的数字抽取滤波器进行抽取滤波,从而得到高分辨率的线性脉冲编码调制的数字信号。因此抽取滤波器实际上相当于一个码型变换器。由于 Σ - Δ 调制器具有极高的抽样频率,通常要比奈奎斯特抽样频率高许多倍,因此 Σ - Δ 转换器又被称为过抽样 A/D 转换器。图 0-3 为与之相对应的过抽样 Σ - Δ D/A 转换器,它也由两部分组成,第一部分为数字插值滤波器,第二部分为数字 Σ - Δ 调制器。在后面章节的分析中将会看到,由于这种类型的 A/D 和 D/A 转换器就量化而言仅采用了极低位的量化器,避免了 LPCM 型 A/D 转换器中需要制造高位 D/A 转换器或高精度电阻网络的困难,但另一方面却因为它采用了 Σ - Δ 调制器技术和数字抽取滤波器,可以获得极高的分辨率,大大超过了 LPCM 型 A/D 转换器。同时由于采用低位量化,输出 Σ - Δ 码不会象 PCM 型 A/D 那样对抽样值幅度变化敏感,而且由于码位低,抽样与量化编码可以同时完成,几乎不花时间,因此不需要抽样保持电路,这样就可使得采集系统的构成大为简化。与传统的 PCM 型 A/D 转换器相比,增量调制型 A/D 转换器实际上是采用以高抽样速率来换取高位量化,即以速度来换精度的方案。这种方案早在 60 年代就提出来了(参见文献[8]),但限于当时的技术水平,特别是抽取滤波器的实现困难,因而没有获得实际的应用。近年来随着大规模集成电路和数字信号处理技术的发展,使得数字抽取滤波器的实现已不成问题,因此自 90 年代以来这种 A/D 和 D/A 转换器获得了很大的发展,并在高精度数据采集特别是数字音响系统,多媒体,地震勘探仪器,声纳,电子测量等领域内获得了广泛的应用。



图 0-2 $\Sigma-\Delta$ A/D 转换器框图

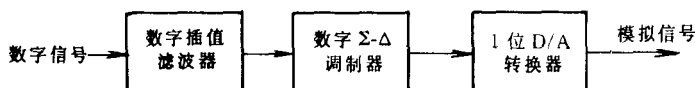


图 0-3 $\Sigma-\Delta$ D/A 转换器框图

从图 0-2 和图 0-3 可以看出, $\Sigma-\Delta$ A/D(D/A)转换器除了包括传统的 PCM 型 A/D 转换器所具有的抽样、量化、编码等功能外, 它还有很强的数字信号处理功能。例如 $\Sigma-\Delta$ 调制器是由抽样数据积分器构成的, 数字抽取滤波器则是典型的数字信号处理器件。整个转换器将抽样、量化、数字信号处理融为了一体, 可以说它是数字信号处理技术在模数和数模转换器中成功应用的结果。基于此, 本书从数字信号处理的基本理论出发, 系统地介绍过抽样 $\Sigma-\Delta$ 转换器的工作原理及使用方法。全书分为两个部分: 第一部分为第一章至第三章, 作为分析 $\Sigma-\Delta$ 转换器的基础, 介绍了数字信号处理的基本原理, 包括离散时间信号与系统的基本分析方法, Z 变换以及数字滤波器等内容。第二部分为第四章至第六章, 第四章论述了过抽样 $\Sigma-\Delta$ 调制器的原理与设计方法, 第五章讨论了数字抽取与内插滤波器的结构与设计方法, 第六章在介绍了一些具体器件的基础上, 通过应用实例, 说明了该类转换器的使用方法。

本书承中国工程院院士李庆忠教授审阅, 提出了不少宝贵意见。在编写过程中, 得到西安石油勘探仪器总厂副总工程师张在陆高级工程师, 李佩昌高级工程师, 物探局仪器总厂易碧金高级工程师大力帮助, 并审阅了部分书稿, 江汉石油学院狄其中教授和物探局王见仁教授给予了热情鼓励与支持, 在此一并表示衷心感谢。

由于笔者水平有限, 书中缺点和错误在所难免, 恳请广大读者批评指正。

编 者
1997.3

目录

第一章 离散时间信号与系统	1
§ 1.1 连续时间信号的抽样	1
§ 1.2 离散时间序列	6
§ 1.3 离散时间系统	8
第二章 Z 变换	11
§ 2.1 Z 变换与逆 Z 变换	11
§ 2.2 Z 变换的性质与定理	17
§ 2.3 Z 变换与序列的频谱	21
§ 2.4 系统函数及其信号流图表示	23
§ 2.5 开关电容积分器及其传输函数	28
第三章 数字滤波器设计	32
§ 3.1 数字滤波器类型与指标	32
§ 3.2 IIR 滤波器设计	33
§ 3.3 FIR 数字滤波器的性质	42
§ 3.4 FIR 滤波器的设计方法	48
§ 3.5 FIR 数字滤波器的等波纹优化设计	53
第四章 过抽样 Σ-Δ 调制器	59
§ 4.1 量化与量化噪声	59
§ 4.2 Σ - Δ 调制器的基本概念	65
§ 4.3 高阶 Σ - Δ 调制器	71
§ 4.4 Σ - Δ 调制器插入网络分析方法	75
§ 4.5 插入式 Σ - Δ 调制器截止频率的确定与稳定性	82
§ 4.6 Σ - Δ 级联型调制器	91
§ 4.7 双二阶 Σ - Δ 调制器级联构成的四阶调制器	101
§ 4.8 带通 Σ - Δ 调制器	106
§ 4.9 其它电路参数对量化信噪比的影响	108
第五章 数字抽取与内插滤波器	110
§ 5.1 抽样率变换的基本概念	110
§ 5.2 抽样率变换的直接方法	111
§ 5.3 抽样率变换的系统结构	117

§ 5.4	理想抽取和内插滤波器·····	125
§ 5.5	特殊抽取和内插滤波器及其设计方法·····	127
§ 5.6	过抽样 A/D 中抽取滤波器的最小噪声设计方法·····	133
§ 5.7	梳状滤波器及其在 Σ - Δ A/D 转换器的应用·····	138
§ 5.8	多级抽取·····	143
第六章	Σ-Δ 转换器器件与应用·····	149
§ 6.1	引言·····	149
§ 6.2	Σ - Δ A/D 转换器 CS5324 ·····	151
§ 6.3	串行输出 Σ - Δ 转换器 CS5321/CS5322 组件·····	155
§ 6.4	过抽样 Σ - Δ D/A 转换器 CS4328 ·····	165
§ 6.5	Σ - Δ 转换器在地震勘探数据采集系统中的应用·····	171
§ 6.6	Σ - Δ 调制器技术在高精度正弦信号发生器中的应用·····	187
§ 6.7	Σ - Δ ADC/DAC 使用注意事项·····	189
参考文献	·····	197

第一章 离散时间信号与系统

§ 1.1 连续时间信号的抽样

抽样是将连续时间信号离散化的过程，它仅抽取信号波形某些时刻的样值。抽样分为均匀抽样和非均匀抽样，当抽样时刻取均匀等间隔点时为均匀抽样，否则为非均匀抽样。由于在大多数情况下都是均匀抽样，下面只讨论这种情况。

一、理想抽样及其频谱

均匀抽样可以看作是一个脉冲调制过程。调制信号为输入的模拟信号 $x_a(t)$ ，载波信号是一串周期为 T ，脉宽为 τ 的矩形脉冲串 $p(t)$ ，调制后输出的信号就是抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 。

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) p(t)$$

图1-1(a)是脉冲调制过程的示意图，它利用周期性脉冲序列 $p(t)$ 对输入模拟信号 $x_a(t)$ 进行抽取，将输入的连续模拟量转换成了输出的一串脉冲。显然， τ 越小，抽样输出脉冲的幅度就越准确地反映了输入信号在离散抽样时刻点上的瞬时值。当 τ 趋于零的极限情况，脉冲序列变成了冲激函数串，我们称这种抽样为理想抽样。在理想抽样时，冲激函数准确地出现在采样瞬间，而它的面积则准确地等于输入信号在采样瞬间的幅值。理想抽样的过程如图1-1(b)所示。实际上理想抽样是不能实现的，但当 $t \ll T$ 时，就可近似看成是理想抽样。下面详细讨论理想抽样的情况。用 $M(t)$ 表示冲激函数串

$$M(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (1-1-1)$$

仍用 $\hat{x}_a(t)$ 表示理想抽样的输出

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) M(t) \quad (1-1-2)$$

将(1-1-1)式代入(1-1-2)式得

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - mT)$$

由于 $\delta(t-mT)$ 只在 $t=mT$ 时不为零，故有

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \delta(t - mT) \quad (1-1-3)$$

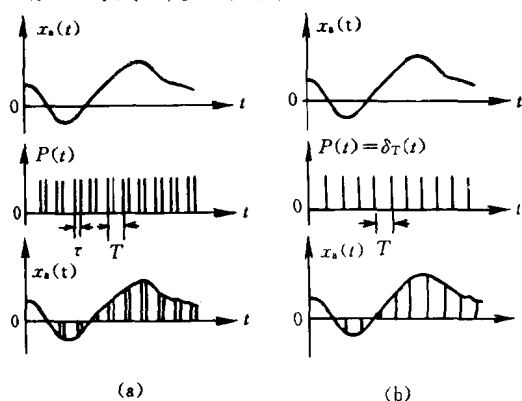


图1-1 抽样过程

因此 $\hat{x}_a(t)$ 实际上是 $x_a(t)$ 在离散时刻 mT 的取值 $x_a(mT)$ 的集合, 在离散时间系统中, 常用序列记号 $\{x_a(mT)\}$ $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 来表示。

对信号抽样我们最关心的一个问题是, 信号经抽样后是否能不失真地恢复成原来的模拟信号。由于信号的时域描述与频域描述是一一对应的, 为了回答这一问题下面从频域出发, 研究理想抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱与原来模拟信号 $x_a(t)$ 的频谱的关系, 并且讨论在什么条件下, 可从抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 中无失真地恢复出原来信号 $x_a(t)$ 。

设模拟信号 $x_a(t)$, 冲激函数串 $M(t)$, 抽样脉冲串以及抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的富里叶变换分别为: $X_a(j\Omega)$, $M(j\Omega)$ 和 $\hat{X}_a(j\Omega)$, 用 $F[\cdot]$ 表示富里叶变换则有

$$X_a(j\Omega) = F[x_a(t)]$$

$$M(j\Omega) = F[M(t)]$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = F[\hat{x}_a(t)]$$

根据连续时间信号与系统中的频域卷积定理, (1-1-2)式表示的时域相乘, 变换到频域为卷积运算。即

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [M(j\Omega) * X_a(j\Omega)] \quad (1-1-4)$$

其中

$$X_a(j\Omega) = F[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1-1-5)$$

现在来求 $M(j\Omega) = F[M(t)]$ 。由于 $M(t)$ 是周期函数, 可表示成富里叶级数

$$M(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\Omega_s t}$$

此级数的基频 Ω_s 就是抽样频率

$$\Omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T \quad (1-1-6)$$

其系数 A_k 为

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} M(t) e^{-jk\Omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT) e^{-jk\Omega_s t} dt \end{aligned}$$

考虑到在 $|t| < \frac{T}{2}$ 的区间内, 只有一个冲激 $\delta(t)$, 而 $m \neq 0$ 时, $\delta(t-mT)$ 都在积分区间之外, 利用冲激函数的性质

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt$$

可求得

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

因而

$$M(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}$$

由此得出

$$\begin{aligned} M(j\Omega) &= F[M(t)] = F\left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}\right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F[e^{jk\Omega_s t}] \end{aligned}$$

由于

$$F[e^{jk\Omega_s t}] = 2\pi \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

所以

$$\begin{aligned} M(j\Omega) &= F[M(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \\ &= \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \end{aligned} \quad (1-1-7)$$

将(1-1-6)式和(1-1-7)代入(1-1-4)式可得:

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\Omega_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) * X_a(j\Omega) \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jq) \delta(\Omega - k\Omega_s - q) dq \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \end{aligned} \quad (1-1-8)$$

上式表明, 一个连续时间信号经过理想抽样后, 其频谱将以抽样频率 $\Omega_s = 2\pi/T$ 为间隔周期重复, 如图1-2所示。因为频谱是复数, 图中仅画出了其幅度谱。也就是说理想抽样信号的频谱是原模拟信号频谱的周期延拓, 周期为 Ω_s , 其频谱的幅度与原信号的频谱相差一个因子 $1/T$ 。由于 T 是常数, 所以除一个常数因子区别外, 每一个延拓的频谱分量都和原频谱分量相同。因此只要各延拓分量与原频谱分量不发生频率上的交叠, 则有可能恢复出原信号。这样如果 $x_a(t)$ 是限带信号, 最高频率为 Ω_h , 其频谱如图1-2(a)所示。

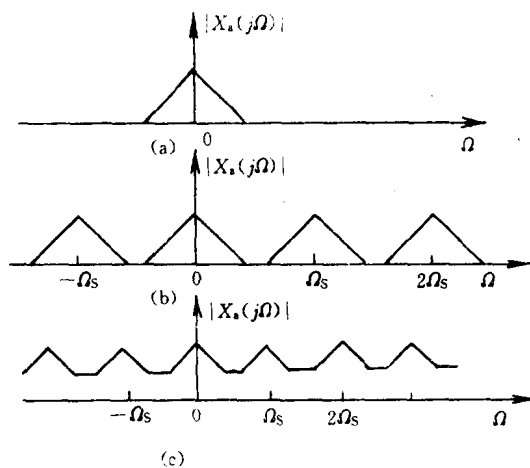


图1-2 抽样信号频谱的周期延拓

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} X_a(j\Omega) & |\Omega| \leq \Omega_h \\ 0 & |\Omega| > \Omega_h \end{cases} \quad (1-1-9)$$

并且满足 $\Omega_h \leq \Omega_s/2$, 那么原来频谱和各次延拓分量的谱彼此不重叠, 如图1-2(b)所示。这时采用一个截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器, 就可得到不失真的原信号频谱。也就是说可以不失真地还原出原来的连续信号。

但是, 如果信号的最高频率 Ω_h 超过 $\Omega_s/2$, 则各周期延拓分量产生频谱的交叠, 无法再将单个频谱区分开, 因而无法再不失真地还原出原来的连续信号, 即产生了所谓“混叠失真”, 如图1-2(c)所示。由于 $X_a(j\Omega)$ 一般是复数, 所以混叠也是复数相加, 这里为了画图的方便, 图中将 $X_a(j\Omega)$ 作为标量处理。通常称 $\Omega_s/2$ 为折叠频率或奈奎斯特(Nyquist)频率, 而称(1-1-9)式所规定的频谱为基带谱。

由此得出下面重要结论: 要想连续信号抽样后能够不失真地还原出原信号, 则抽样频率必须大于或等于两倍原信号频谱的最高频率 ($\Omega_h \leq \Omega_s/2$), 这就是奈奎斯特抽样定理。

在实际应用中为了避免混叠, 一般在抽样器前要加入一个保护性的前置低通滤波器, 其截止频率 Ω_c 小于 $\Omega_s/2$, 以便滤除掉高于 $\Omega_s/2$ 的频率分量, 这种低通滤波器通常称为“抗混叠滤波器”。

二、由抽样信号恢复原连续信号

前面已经说明如果抽样过程满足奈奎斯特抽样定理, 即信号频谱的最高频率小于折叠频率, 则抽样不会产生频谱混叠, 由(1-1-8)式知

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega) \quad |\Omega| < \Omega_s/2$$

故将 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 通过以下理想低通滤波器(见图1-3a)

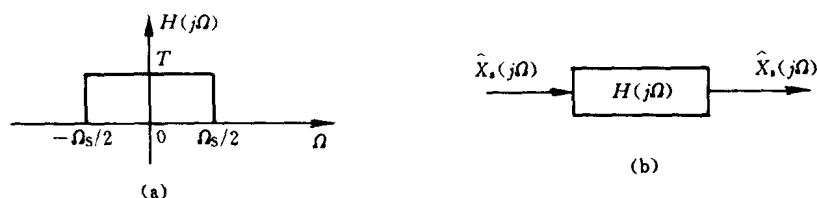


图1-3 信号的理想低通滤波器恢复

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| \leq \Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega| > \Omega_s/2 \end{cases} \quad (1-1-10)$$

就可得到原信号频谱(见图1-3), 即

$$Y_a(j\Omega) = \hat{X}_a(j\Omega) H(j\Omega) = X_a(j\Omega)$$

由于 $Y_a(t) = F^{-1}[Y_a(j\Omega)] = F^{-1}[X_a(j\Omega)] = x_a(t)$

所以在输出端就恢复成了原模拟信号，上式中 $F^{-1}[\cdot]$ 表示富氏逆变换。当然理想低通滤波器是不可实现的，但是在一定精度范围内，可用一个可实现的滤波器来逼近它。

上面从频域出发说明了由抽样信号恢复原来的连续时间信号的过程，下面进一步说明这一过程的数学原理。理想低通滤波器的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} \delta\Omega = \frac{\sin(\Omega_s t / 2)}{\Omega_s t / 2} \\ &= \frac{\sin(\pi/T)t}{(\pi/T)t} = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}t\right) \end{aligned} \quad (1-1-11)$$

由 $\hat{x}_a(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分，求得理想低通滤波器的输出为

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \delta(\tau - mT) \right] h(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(mT) \delta(\tau - mT) h(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) h(t - mT) \end{aligned} \quad (1-1-12)$$

$$\text{式中 } h(t - mT) = \frac{\sin[\pi(t - mT)/T]}{\pi(t - mT)/T} = \text{sinc}\left[\frac{\pi}{T}(t - mT)\right] \quad (1-1-13)$$

称为内插函数，其波形如图1-4所示，而称(1-1-12)式为抽样内插公式，它表明了如何由信号的抽样值通过内插获得原来的连续时间信号 $x_a(t)$ ，在抽样点 $t=mT$ 上， $h(t - mT)=1$ ，其余的内插函数 $h(t - nT)=0$ ， $n \neq m$ ，这就保证了各抽样点上信号值不变 $x_a(t) = x_a(mT)$ ，而抽样点之间的信号则由幅度为抽样值的各内插函数的波形延伸叠加而成，如图1-5所示。这个公式也说明了，只要抽样频率高于两倍信号最高频率，整个连续信号就可完全用它的抽样值来代表而不会丢掉任何信号，这就是奈奎斯特定理的物理意义。

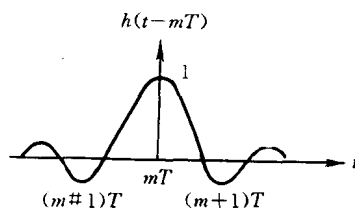


图1-4 内插函数波形

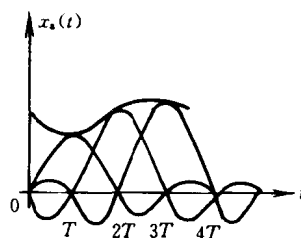


图1-5 信号内插恢复过程

§ 1.2 离散时间序列

前面通过对模拟信号抽样而获得了在时间上离散的抽样信号, $-\infty < n < \infty$, 对于这种等间隔的抽样信号, 在实际信号的存贮与处理中, 除了抽样率发生变化或者将抽样信号恢复成模拟信号时的情况外, 时间间隔 T 并不能明显地表现出来, 我们更注意的是抽样值之间的相对位置即时间序号 n , 因此为了方便, 通常将 T 去掉而用时间序列 $\{x(n)\}$, $-\infty < n < \infty$ 代替 $x_a(nT)$, $x(n)$ 代表序列的第 n 个值。它在数值上与模拟信号的关系为

$$x(n) = x_a(nT) \quad (1-2-1)$$

上式中的 n 只能取整数, 取其它值 $x(n)$ 没有意义。

一、几种最常用的时间序列

下面列出几种最常用的时间序列

1. 单位脉冲序列 $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-2-2)$$

仅在 $n=0$ 时, 取确定值 1, 其它时刻都为零。它在离散信号和系统中的作用和冲激函数 $\delta(t)$ 在连续信号和系统中的作用一样重要。单位脉冲序列 $\delta(n)$ 如图 1-6 所示。

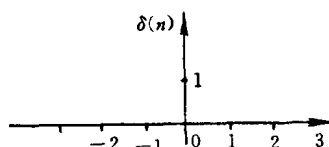


图1-6 单位脉冲序列 $\delta(n)$

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1-2-3)$$

它与单位脉冲序列的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m)$$

单位阶跃序列 $u(n)$ 见图 1-7。

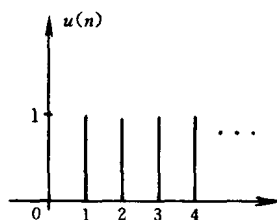


图1-7 单位阶跃序列 $u(n)$

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases} \quad (1-2-4)$$

它与 $u(n)$ 的关系为 $R_N(n) = u(n) - u(n-N)$

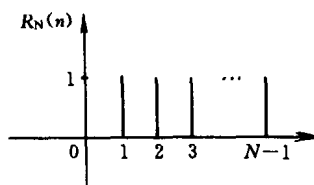


图1-8 矩形序列 $R_N(n)$

图1-8为矩形序列 $R_N(n)$ 的示意图。

4. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1-2-5)$$

式中 ω_0 为数字频率，有关数字频率的概念将在后面详细说明。

将复指数表示成实部与虚部

$$x(n) = e^{\sigma n} \cos \omega_0 n + j e^{\sigma n} \sin \omega_0 n$$

当 $\sigma=0$ 时

$$x(n) = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$$

实部与虚部分别为余弦与正弦序列，显然复指数序列是频率 ω_0 的周期函数，周期为 2π 。

二、序列的周期性

若序列 $x(n)$ 满足

$$x(n) = x(n+N), \quad -\infty < n < \infty \quad (1-2-6)$$

且 N 是使上式成立的最小正整数，则称 $x(n)$ 是以 N 为周期的周期序列。例如，对于正弦序列

$$x(n) = \sin(\omega_0 n + 2k\pi) = \sin[\omega_0(n + \frac{2\pi k}{\omega_0})] \quad k \text{ 为整数}$$

除非 $p = 2\pi k / \omega_0$ 为整数，否则正弦序列没有周期。

三、用抽样序列表示任意序列

任意序列 $x(n)$ 都可用 $\delta(t)$ 表示成加权求和的形式

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m) \quad (1-2-7)$$

上述表达式在离散系统分析中是一个十分有用的公式。

四、序列的最基本运算

离散信号处理中有以下几种最基本运算：

求和： $x_1(n) \pm x_2(n)$ 指两序列序号相同的值相加

求积： $x_1(n) \cdot x_2(n)$ 指两序列序号相同的值相乘

乘常数： $ax(n)$ 序列的每一个值都乘以常数

延时： $x(n-n_0)$ 序列全体在时间轴上移动 n_0 ， $n_0 < 0$ 左移， $n_0 > 0$ 右移

反褶： $x(-n)$ 序列以 $n=0$ 为对称轴对褶

§ 1.3 离散时间系统

所谓离散时间系统,是指将输入序列变换成输出序列的一种运算。在数学上通常将系统表示成一种变换。设离散时间系统的输入序列 $x(n)$,经过系统的规定运算,变成为输出序列 $y(n)$,用 $T[\]$ 表示变换关系,如图1-9所示,则有

$$y(n) = T[x(n)]$$

在离散时间系统中,最主要最基本的系统是线性时不变系统,它是研究其它系统的基础。该系统具有以下性质:

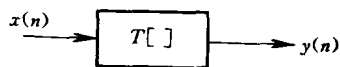


图1-9 系统的变换关系

1. 线性性

若系统满足叠加原理

$$\begin{aligned} y_1(n) &= T[x_1(n)], & y_2(n) &= T[x_2(n)] \\ y(n) &= T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] \\ &= a_1y_1(n) + a_2y_2(n) \end{aligned} \quad (1-3-1)$$

则称该系统为线性系统。

2. 时不变特性

若系统的变换关系不随时间变化,或者说系统的输出随输入的移位而相应移位但形状不变,则称该系统为时不变系统,用公式表示,设

$$y(n) = T[x(n)]$$

那么一定有

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0) \quad n_0 \text{ 为常数} \quad (1-3-2)$$

3. 单位脉冲响应与线性时不变系统的卷积表示

若给线性时不变系统输入单位脉冲 $\delta(n)$,此时系统的输出 $y(n)$ 被称为单位脉冲响应。通常用 $h(n)$ 表示,即

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (1-3-3)$$

若已知系统的 $h(n)$,对于任意的输入 $x(n)$ 利用线性时不变特性可求得其求输出 $y(n)$ 为

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\ &\triangleq x(n) * y(n) \end{aligned} \quad (1-3-4)$$