

纯粹数学与应用数学专著 第23号

曲面动力系统

叶彦谦 著



科学出版社

51.631

5

纯粹数学与应用数学专著 第23号

曲面动力系统

叶彦谦 著

科学出版社

内 容 简 介

本书总结了作者及国内外数学工作者近二十年来关于曲面动力系统定性理论的主要成果,其中包括作者本人在环域定理和奇点概念的推广等方面的有创新意义的工作。

本书与 C. Godbillon 的名著《曲面动力系统》一起,为曲面上衰减动力系统的定性理论奠定了初步的基础。

本书可供大学数学系及应用数学系学生、研究生、教师和有关的科学工作者阅读参考。

ZN94/07

纯粹数学与应用数学专著 第 23 号

曲 面 动 力 系 统

叶彦谦 著

责任编辑 吕虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年3月第一版	开本: 850×1168 1/32
1991年3月第一次印刷	印张: 7 3/8
印数: 平 1-1150	插页: 精 2
精 1-410	字数: 192 000

ISBN 7-03-002209-2/O·415(平)

ISBN 7-03-002210-6/O·416(精)

定价: 平 装 8.30 元
布面精装 10.50元

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

顾 问 陈省身

主 编 王 元

副主编(以姓氏笔画为序)

丁石孙 丘成桐 石钟慈

伍卓群 肖荫堂 严士健

序 言

紧曲面动力系统定性理论的内容比平面动力系统定性理论的更为丰富有趣,这是由于曲面既有可定向与不可定向之分,又有亏格数的不同之故。例如,在平面上闭轨线只有一种,而在曲面上有的闭轨线同伦于零,有的则否;有的是双边的,有的却是单边的,和平面上大不一样。除此以外,曲面上还可能存在所谓的非闭P式稳定轨线,它可以在整个曲面上处处稠密,也可以无处稠密,这更是平面动力系统所没有的。另一方面,曲面动力系统没有奇异吸引子(指定常系统),这便使人们对它能够做一些较为深入的研究,而不至于困难到无从着手。虽然如此,曲面动力系统方面的古典结果是屈指可数的,近三四十年来国外对可能有奇点和极限环的衰减曲面动力系统的研究已经开始,但工作仍然很少。相比之下,近十余年来国内在这方面的工作却是相当多的,其中有不少是带有奠基性的和大有发展前途的,这当然和国内在平面定常系统的定性理论方面有较多的成果是密切相关的。本书的目的就是要继C. Godbillon 的名著《曲面动力系统》之后对这一领域近二十年来国内外的新发展作简要的介绍(结构稳定性理论除外),借以引起常微分方程与动力系统方面的数学家的兴趣。

本书共分十二节,除前面两节扼要介绍关于曲面和动力系统的较古典的熟知性质(述而不证)外,其余十节基本上都是迄今尚未出现于任何专著的新成果,其中属于国外数学家的有 §7 的全部和 §§3,4,6 的一部分。我们认为 Godbillon 的书和本书一起,已可为曲面上衰减动力系统的定性理论奠定初步的基础。在此基础上,今后,这方面的发展势必会比过去更快一些。除曲面上的衰减系统之外,近二三十年来国内外还有不少牵涉到结构稳定性和遍历理论的深刻的结果,我们不拟在此介绍。初学者可参考 B.H.

阿诺尔德的《常微分方程续论》(中译本,科学出版社,1989)第三章。

最后,作者对中国科学院数学所余澍祥同志表示感谢,他在1981年发表于《数学进展》上的一篇调研报告给作者搜集国外文献以不少方便。

叶彦谦

1988年12月于南京大学

目 录

§ 1. 紧曲面的分类和一般性质	1
§ 2. 微分流形上动力系统的一般性质	11
§ 3. 环面上两类特殊的动力系统	26
§ 4. Klein 瓶与 Möbius 带上的动力系统	41
§ 5. 射影平面上的动力系统	52
§ 6. 曲面上的 P 式稳定运动和中心	74
§ 7. 紧二维流形上连续流的拓扑分类	95
§ 8. 环域定理与奇点概念的推广	113
§ 9. 曲面动力系统的闭轨与奇闭轨的存在性	142
§ 10. 闭曲面上连续流的奇点、闭轨、奇闭轨和 P 式稳定运动的闭包等之间的关系	151
§ 11. 环面上的线性三角多项式系统	178
§ 12. 环面上的 van der Pol 方程及其推广	208
参考文献	224

§ 1. 紧曲面的分类和一般性质

我们称连通的二维流形为曲面,它是球面、环面、柱面等熟知概念的推广. 曲面 M 称为闭的,如果 M 是紧的且无边界. 也就是说,闭曲面是一个连通紧 Hausdorff 空间,其中每一点有一邻域同胚于 Euclid 平面. 本节主要介绍闭曲面的一些熟知的基本性质,以便将来可以应用. 由于这些结果都是古典的,所以略去证明. 有兴趣的读者可以参阅文献[1],[2],[3],[4],[5],[6] 中的有关章节.

定理 1. 设闭曲面或带边界的紧曲面 M 被三角剖分而成为复形时,其顶点数为 α_0 , 边数为 α_1 , 二维胞腔数为 α_2 . 以 R_p^0, R_p^1, R_p^2 分别表示此复形的零维, 一维, 二维的模 p (p 为素数或零) Betti 数. 则有

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = R_p^0 - R_p^1 + R_p^2. \quad (1)$$

等式(1)称为 M 的 Euler-Poincaré 关系式. 记其值为 $\chi(M)$, 称为 M 的 Euler 特征.

记:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \text{球面 } S^2, \\ T_1 &= \text{环面 } T^2, \\ T_2 &= T_1 \# T_1, \text{ 称为 } T_1 \text{ 与 } T_1 \text{ 的连通和}^1), \\ &\dots \\ T_g &= T_{g-1} \# T_1, \text{ 当 } g \geq 2 \text{ 为正整数时.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

它们被称为可定向闭曲面的模式. 易见 T_1 也可视为带有一个柄

1) 两个曲面 M_1 与 M_2 的连通和是指: 从每一曲面上各挖去一个开圆盘 D_1^i 与 D_2^i , 然后把 M_1 与 M_2 沿着 D_1^i 与 D_2^i 的边界粘合而得的曲面, 记为 $M_1 \# M_2$. 严格定义见[3]或[4].

的球面¹⁾。一般地, T_g 可视为带有 g 个柄的球面。因此, 图 1.1 中的两种模式是一样的。

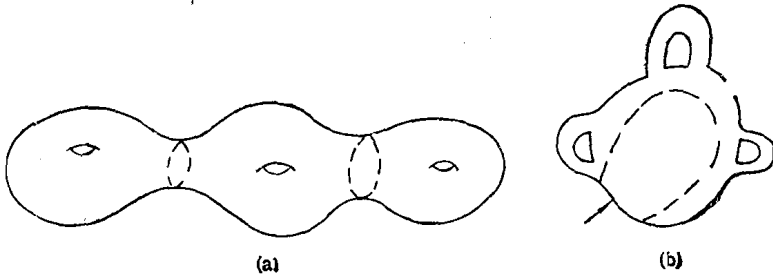


图 1.1

再记:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \text{射影平面 } PR^2, \\ P_2 &= P_1 \# P_1 = \text{Klein 瓶 } K^2, \\ &\dots \\ P_g &= P_{g-1} \# P_1, \text{ 当 } g \geq 2 \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

它们被称为不可定向闭曲面的模式²⁾。

最简单的带边可定向紧曲面是闭圆盘 \bar{D}^2 。最简单的带边不可定向紧曲面是 Möbius 带 B_2 。熟知的是 $\bar{D}^2, B_2, S^2, H_2, T^2, PR^2, K^2$ 有如下的表示图(图 1.2), 其中凡加箭头的实线对边都应沿箭头的正向叠合, 边界旁画着的虚箭头表示边界的某一正方向。

此外, 还有下列一些等式成立:

$$\bar{D}_1^2 \cup D_2^2 = S_1^2 \# S_2^2 = S^2, \quad (4)$$

- 1) 即从 S^2 上挖去两个开圆盘 D_1^2 与 D_2^2 (剩下的实际上是一带边柱面 H_2), 然后把另一带边柱面(柄)的两端与 $S^2 - D_1^2 - D_2^2$ 沿着两个圆盘的边界粘合。给曲面 M 加柄实际上是作 M 与 S^2 的双重连通和, 即从每一曲面上各挖去两个圆盘以后再彼此粘合。今后记之为 $M \# S^2$, 或记为 $M \#^* H_2$, 这里 $*$ 表示作连通和时 M 被挖去一个开圆盘, 而 H_2 本身带边, 未被挖去什么, 又 $\#$ 的右下角的 2 表示 M 被挖去的开圆盘个数。
- 2) P_g 可以看成是带有 g 个交叉帽的球面, 见图 10.16。

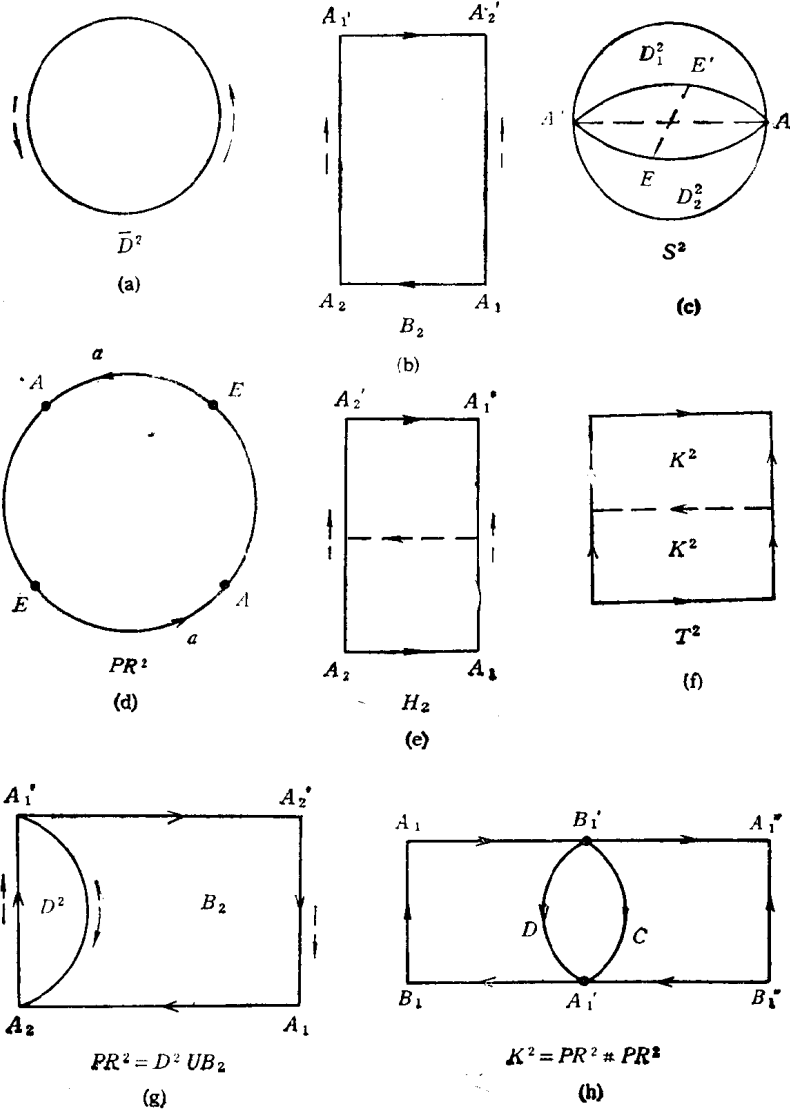


图 1.2

$$D^2 \cup B_2 = S^2 \# B_2 = S^2 \# PR^2 = PR^2. \quad (5)^D$$

1) 若记 $P_0 = S^2$, 则此式亦可改写为 $P_0 \# P_1 = P_1$. 两式都是定理 3 后面的 $M \# S^2 = M$ 的特例.

注意图 1.2 中的 (c),(d), 可知 S^2 是 PR^2 的二重覆盖空间; 注意其中的 (f), 可知 T^2 是 K^2 的二重覆盖. 此外, 又易见: 实直线 \hat{H}_2 (不带边的圆柱) 和 R^2 分别是圆 S^1, T^2 和 \hat{H}_2 的可数无限重覆盖空间. 一般可证:

定理 2. 每一流形 M 必有一可定向的两重覆盖流形 \tilde{M} (见 [4] p. 106).

由定理 1 及 S^2 与 PR^2 的三角剖分, 易见:

$$\chi(S^2) = 2, \chi(PR^2) = 1. \quad (6)$$

又由连通和 $\#$ 的定义和定理 1, 易见对曲面 M, N ,

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2. \quad (7)$$

然后应用归纳法, 易证:

定理 3. T_g 与 P_g 的 Euler 特征分别为:

$$\chi(T_g) = 2 - 2g, \chi(P_g) = 2 - g. \quad (8)$$

注意: $\#, \#_2, \#^*$ 与 $\#_2^*$ 的定义以及 (7), (8) 两式, 可知下面一些性质成立.

性质 1. 对任何曲面 M 有

$$M \# S^2 = M. \quad (9)$$

性质 2. 给 T_g 加柄时有

$$T_g \#_2 S^2 = T_g \#_2^* H_2 = T_g \# T_1 = T_{g+1}, \quad (10)$$

$$\chi(T_{g+1}) = \chi(T_g) - 2. \quad (11)$$

性质 3. 给 P_g 加横截帽 (cross cap, 其意义见下式的第一项) 时有 (参考 (5) 式)

$$P_g \#^* B_2 = P_g \# PR^2 = P_{g+1}, \quad (12)$$

$$\chi(P_{g+1}) = \chi(P_g) - 1. \quad (13)$$

性质 4. 给 P_g 加柄等于给 P_g 加两个横截帽:

$$P_g \#_2^* H_2 = P_g \#_2 S^2 = P_{g+2} \quad (g \geq 1). \quad (14)$$

此式的证明见 [4], 亦可将 (7) 式推广到 $\#_2$ 再证明¹⁾.

性质 5. 给 T_g 加横截帽后得到 P_{2g+1} :

1) 即利用 $\chi(M \#_2 N) = \chi(M) + \chi(N) - 4$ 来证 (14) 式左边的 Euler 特征为 $-g$. 性质 5 亦可用同法证明, 但都要用到后面的定理.

$$\begin{aligned}
 T_g \# * B_2 &= T_g \# PR^2 = PR^2 \# T_g = PR^2 \# * \sum_1^{2g} B_2 \\
 &= PR^2 \# \sum_1^{2g} PR^2 = P_{2g+1}, \\
 \chi(P_{2g+1}) &= \chi(T_g) - 1.
 \end{aligned} \tag{15}$$

定理 4 (可定向曲面的分类). 设 M 为可定向闭曲面, 则必存在唯一的非负整数 $g \geq 0$, 使 M 同胚于 T_g . 若 M 为可定向带边曲面, ∂M 有 b 个连通支, M 的 Euler 特征为 χ , 则 $\chi + b$ 为偶数. 记 $g = 1 - \frac{\chi + b}{2}$, 则 M 同胚于 T_g 上挖去 b 个互不相遇

的开圆盘而得到的可定向曲面(见[4]).

定理 5. 亏格为 g 的可定向曲面 M 上必存在 g 个互不相遇的圆, 使它们的和集在 M 上的余集仍为连通集; 但 M 上任何 $g + 1$ 个互不相遇的圆必定将 M 分割为不连通集.

定理 5'. 若 N 为不可定向闭曲面, 则必存在一正整数 g , 使 N 包含 g 个, 但不包含 $g + 1$ 个互不相遇的 Möbius 带. g 称为 N 的 Möbius 数.

由(5)及(12)式知 P_g 上至少包含 g 个 Möbius 带.

定理 4' (不可定向曲面的分类). 若 N 为不可定向闭曲面, 其 Möbius 数为 g , 则 N 必同胚于 P_g . 从 N 上除去一切 Möbius 带而代之以圆盘, 则所得为球面. 若 N 为不可定向带边曲面, 其 Möbius 数为 g , ∂N 有 b 个连通支, 则 N 同胚于 P_g 上挖去 b 个互不相遇的开圆盘.

系 1. P_g 上恰有 g 个 Möbius 带.

注意: 闭曲面 M 若挖去 b 个开圆盘而成为带边 (边界为 b 个连通支) 紧曲面时, 则其亏格不变, 而 Euler 特征 χ 则减少 b . 故由定理 3, 4, 4' 可得:

定理 6. 若带边紧曲面 M 有亏格 g , ∂M 有 b 个连通支, 每一个都是拓扑圆, 则

$$\chi(M) = 2 - 2g - b, \text{ 当 } M \text{ 为可定向时,} \tag{16}$$

$\chi(M) = 2 - g - b$, 当 M 为不可定向时.

系 2. 若闭曲面的 Euler 特征为奇数, 则它必为不可定向.

定理 7. 两个紧曲面互相微分同胚当且仅当它们有相同的亏格, Euler 特征, 以及相同个数的边界连通支.

系 3. 对定理 2 中的 M 与 \tilde{M} , 若 M 的亏格为 g , 则 \tilde{M} 的亏格为 $g - 1$ (因为 $\chi_{\tilde{M}} = 2\chi_M$).

系 4. 若曲面 M 与 N 同为可定向或同为不可定向, 则

$$g(M \# N) = g(M) + g(N). \quad (17)$$

若 M 为可定向而 N 为不可定向, 则

$$g(M \# N) = 2g(M) + g(N). \quad (18)$$

定理 8. 对亏格为 g 的可定向闭曲面有:

$$R_p^0 = 1, R_p^1 = 2g, R_p^2 = 1, \chi = 2 - 2g \quad (p \text{ 为素数}). \quad (19)$$

对亏格为 g 的不可定向闭曲面有:

$$\begin{aligned} R_2^0 = 1, R_2^1 = g, R_2^2 = 1; \\ R_p^0 = 1, R_p^1 = g - 1, R_p^2 = 0 \quad (p \neq 2), \end{aligned} \quad \chi = 2 - g. \quad (20)$$

对于常见的亏格 ≤ 2 的各种曲面、单形与球, 可列表如下:

流形	各维 Betti 数	边界连通支数	亏格	Euler 特征
H_1	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0$	$b = 2$	$g = 0$	$\chi = 0$
T^2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 2, R_p^2 = 1$	$b = 0$	$g = 1$	$\chi = 0$
B_2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0$	$b = 1$	$g = 1$	$\chi = 0$
K^2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0 (p \neq 2)$ $R_2^0 = 1, R_2^1 = 2, R_2^2 = 1$	$b = 0$	$g = 2$	$\chi = 0$
PR^2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 0, R_p^2 = 0 (p \neq 2)$ $R_2^0 = 1, R_2^1 = 1, R_2^2 = 1$	$b = 0$	$g = 1$	$\chi = 1$
$n(\geq 0)$ 维胞腔 D^n	$R_p^0 = 1, R_p^i = 0 (0 < i \leq n)$	$b = 1$	$g = 0$ (对 $n = 2$)	$\chi = 1$
$n(> 0)$ 维球 S^n	$R_p^0 = 1, R_p^i = 0 (0 < i < n)$ $R_p^n = 1$	$b = 0$	$\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$ (对 $n = 2$)	$\chi = 1 + (-1)^n$

定理 9. T_g 与 B_2 可嵌入 R^3 , PR^2 与 K^2 则不能. 一般, 一个无边、紧、不可定向 n 维流形不能嵌入一单连通的 $n+1$ 维流形(见[4]). 但对任何 $P_g, g \geq 1$, 总存在 R^4 中的可微曲面同胚于 P_g (见 [6]).

定理 10. 亏格为 g 的可定向闭曲面的标准记法为(见[1]):

$$\begin{aligned} aa^{-1} &= 1 \quad (g = 0, \text{ 球面}), \\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} &= 1 \quad (g \geq 1). \end{aligned} \quad (21)$$

亏格为 g 的不可定向闭曲面的标准记法为

$$a_1 a_1 \cdots a_g a_g = 1, \quad (22)$$

或

$$\begin{aligned} a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g^{-1} b_g^{-1} a_g a_g &= 1 \quad (\text{当 } \chi \text{ 为奇数时}), \\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g &= 1 \quad (\text{当 } \chi \text{ 为偶数时}). \end{aligned} \quad (23)$$

例 1. 对 PR^2 有 $a_1 a_1 = 1$, 对 T^2 有 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = 1$, 对 K^2 有 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1 = 1$, 这可由图 1.2(d), (f), (h) 容易地看出.

定理 11. 若 M 为连通复形, 则其一维同调群 $H_1(M)$ 同构于商群 $\pi_1(|M|)/F$, 其中 $\pi_1(|M|)$ 为 $|M|$ 的基本群, F 为 $\pi_1(|M|)$ 的换位子群. 特别地, 当 $\pi_1(|M|)$ 为交换群时, $\pi_1(|M|)$ 与 $H_1(M)$ 同构.

例 2. $\pi_1(T^2) \approx H_1(T^2)$ 为交换群, 而 $\pi_1(K^2)$ 则为非交换群, 故不同构于 $H_1(K^2)$. 一般地, $T_g (g \geq 2)$ 的基本群都不是交换群.

再仔细研究一下 K^2 的基本群. 以

$$h: (x, y) \mapsto (x+1, y) \quad (24)$$

记 R^2 中的平移, 以

$$k: (x, y) \mapsto (-x, y+1) \quad (25)$$

记 R^2 中的平移加对称. 由 h 与 k 所产生的群 G 不是交换群, 因为由定义易证

$$hk = kh^{-1}. \quad (26)$$

此式亦可由图 1.3 看出. 实际上, (26) 就是例 1 中的 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1 = 1$. 因为由 (26) 可得 $kh^{-1}k^{-1}h^{-1} = 1$, 再令 $h^{-1} = j$, 即得 $kjk^{-1}j = 1$.

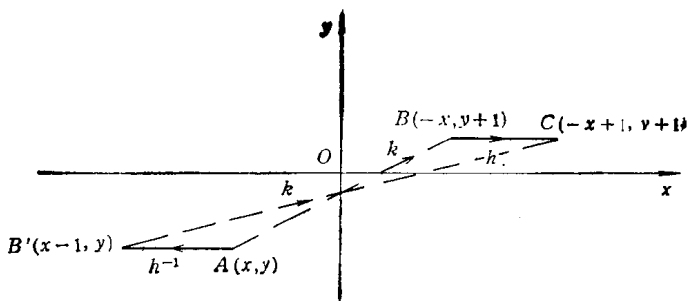


图 1.3

对 K^2 来说, $\pi_1(K^2)$ 的换位子群 F 由 h^2 所产生, 因为

$$hkh^{-1}k^{-1} = hkhk^{-1} = h^2.$$

由于 K^2 的基本群为 G , 故 K^2 同胚于商群 R^2/G , 而

$$\pi_1(K^2) = G \approx Z \oplus Z_2. \quad (27)$$

关于 H_2, T^2 与 K^2 的基本群有如下三个重要的定理, 以下都用 J 表示 Jordan 曲线.

定理 12. 设 J 位于开柱面 $R^2 - \{0\} = \mathring{H}_2$ 上. 若 J 的内部包含 R^2 的原点 O , 则 J 表示 \mathring{H}_2 的基本群的产生元; 否则, J 在 \mathring{H}_2 中同伦于零. $\pi_1(\mathring{H}_2) \cong Z$.

定理 13. 设 J 在 T^2 上不同伦于零, 则 J 在基本群 $\pi_1(T^2)$ 中所属的同伦类 i 可由一对互素整数 (m, n) 来表示. 易见

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong Z \oplus Z. \quad (28)$$

定理 14. 设 J 在 K^2 上不同伦于零, 则 J 必表示 $\pi_1(K^2)$ 中的下列元素之一:

$$h, h^{-1}, k^2, k^{-2}, kh^n, k^{-1}h^n \quad (n \in Z).$$

下面是上述一些元素的图示法, 易见图 1.4 中 k^2h 不是单闭曲线, 又每一元素的图示并不唯一.

推广(27)与(28)有:

定理 15. T_g 与 P_g 的基本群为

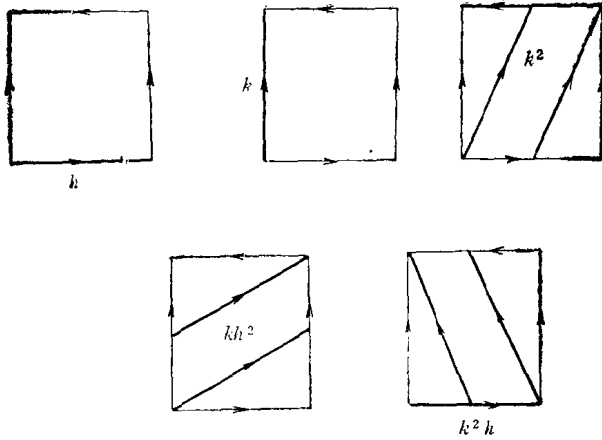


图 1.4

$$\pi_1(T_g) \approx Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z \quad (2g \text{ 个}),$$

$$\pi_1(P_g) \approx \underbrace{Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z}_{g-1 \text{ 个}} \oplus Z_2.$$

定义 1. 曲面 M 上的 Jordan 曲线 J 称为是双边的, 如果 J 在 M 上有一开邻域同胚于 \mathring{H}_2 . J 称为是单边的, 如果 J 在 M 上有一开邻域同胚于 \mathring{B}_2 .

易见: 若 J 在 K^2 上所属的同伦类为 $h^{\pm 1}, k^{\pm 2}$, 则 J 是双边的; 否则, J 是单边的(由定理 14). 注意: 曲面上一单边 Jordan 曲线的补集必为连通集; 但反之, 补集为连通集的 Jordan 曲线却可能是双边的. 在 S^2, H_2 与 T^2 上, 一 Jordan 曲线的补集是否为连通, 比较容易看. 在 K^2 上则否, 且情况比较复杂. 设 J 代表 $\pi_1(K^2)$ 的元素 i , 则有下列四种不同的情况:

- 1) 当 $i = 1$ (即 J 同伦于零) 时, $K^2 - J$ 有两个连通支, 其一同胚于 D^2 .
- 2) 当 $i = h^{\pm 1}$ 时 $K^2 - J$ 同胚于 \mathring{H}_2 , 即只有一个连通支.
- 3) 当 $i = k^{\pm 2}$ 时 $K^2 - J$ 有两个连通支, 各同胚于 \mathring{B}_2 (图 1.5(a)).

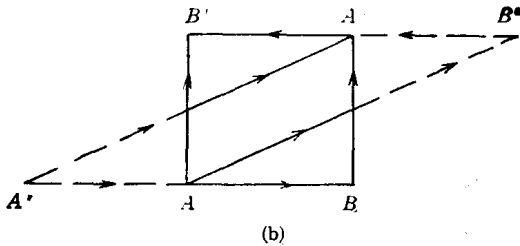
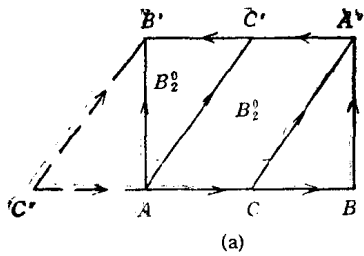


图 1.5

4) 当 $i = k+1h^*$ 时, $K^2 - J$ 同胚于 B_2^0 (图 1.5(b)).

定理 16. 设 \tilde{M} 为不可定向闭曲面 M 的可定向二重覆盖. J 是 M 上一单闭曲线, J_1 与 J_2 是 J 在 \tilde{M} 中的逆象 (称为 J 在 \tilde{M} 中的提升), 则当 J 为双边曲线时, J_1 与 J_2 各为单闭曲线; 当 J 为单边曲线时, J_1 与 J_2 都不是闭曲线, 但 $J_1 \cup J_2$ 是 \tilde{M} 中的单闭曲线.

对于非紧曲面, 也有类似于本节的分类定理, 见 [7]; 这时亏格和边界连通支的个数都可以是无限的.