振动中的反问题

〔加〕G.M.L.格拉德威尔 著

王大钧 何北昌 译

北京大学出版社

振动中的反问题

〔加〕 G.M.L.格拉德威尔 著

王大钧 何北昌 译

北 京 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书系统讲述由给定固有振动频率和/或固有振型数据构造离散系统与连续系统的物理参数、几何参数问题。其主要部分是对杆、梁的离散模型系统及连续系统的特征值反问题的理论和解法作了系统、严密论述，同时也相当详细地研究了这些系统的频率和振型的定性性质。数学上涉及代数和微分方程的特征值反问题。全书共十章，每章有习题，书末附有系统的文献。

本书内容对振动理论、模态分析、参数识别、结构动力优化设计的研究和应用，对其他数学、物理中的特征值正问题及反问题的研究都是很有用的。

本书可作为力学及工程技术界从事振动问题研究和应用、数学及物理学界从事特征值问题研究的科技工作者、研究生以及大学生的参考书。

G.M.L.Gladwell

Inverse Problems In Vibration

Martinus Nijhoff Publishers, 1986

振动中的反问题

〔加〕 G.M.L. 格拉德威尔 著

王大钧 何北昌 译

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

850×1168毫米 32开本 10.125印张 252千字

1991年3月第一版 1991年3月第一次印刷

印数：0001—4000册

ISBN 7-301-01421-X/O·234

定价：5.80元

中 文 版 序

本书的中文版是由王大钧教授和他的学生何北昌翻译的。我对他们的细致工作表示感谢。

在本书的英文版中，每一章都以Pascal的随想录的一段引语为题记。例如，第一章所用引语是："要是你见到一个人，就想起了他的书，这是一个坏的现象。"当我请一位中国学者翻译这段话时，我感到了困惑，他立即回答说："这可是好事嘛！"我意识到，在社会和哲学方面，中国文化和西方文化之间的差距是多么大。在中文版中，已经删去这些引语。

在纯科学方面，距离没有这么大。我相信，这本书的出版不仅将推进反问题的研究，而且还将有助于在科学领域内国际合作的发展。

G.M.L.格拉德威尔

加拿大安大略省滑铁卢，1988年8月

前　言

古典的振动理论主要考虑各种离散或连续体的无穷小(即线性)无阻尼自由振动。该理论的一个基本问题是确定振动物体的固有频率(特征频率或简称为特征值)以及简正模态。质点、刚性杆和无质量弹簧组成的离散系统所描述的物体，其运动由一个以时间 t 为变量的常矩阵微分方程控制。它具有有限个特征值，其简正模态是向量，称为特征向量。由连续系统描述的物体，其控制方程为含有时间变量及一个或多个空间变量的偏微分方程。它有无穷多个特征值，而其简正模态为空间变量的函数(特征函数)。

在古典理论范围内，反问题考虑构造某种给定模型，例如弹簧-质点系统、弦等等，使之具有给定的特征值以及/或者特征向量或者特征函数，即具有给定的谱数据。一般来说，给定这些谱数据之后，可能不存在，也可能有一个或多个系统具备这些性质。在本书中，我们专门考虑一类比较严格的反问题，即所谓的构造问题。在这类问题中，给定的谱数据使得有且仅有一个指定类型的振动系统具备这些谱性质。对于这类基本上属于应用数学而不是工程领域的问题，总可以对三个方面提问和作答：

1）如果系统存在，为了保证此系统唯一，关于谱数据的充分必要条件是什么？

2）为了保证对应一个真实的系统，即一个具有正质量、正长度、正的截面面积等等的系统，这些数据必须满足什么样的充分必要条件？

3）这个(唯一的)系统如何构造？

我得到了 Gantmakher 和 Krein 所著的那本出色并且难懂的

书《振荡矩阵与核以及机械系统的小振动》①的英译本，这引发了我对反问题的兴趣。在获得这本书以后的头十年里，我做了许多尝试，试图掌握它，但不太成功。有一点确实为我所理解并欣赏，这就是他们从弦在固定-固定和固定-自由边条件下的频谱，确定套在弦上的小球的位置和质量。在他们的构造过程中，未知量作为两个多项式比值的连分式表达式系数出现，这两个多项式是从给定的频谱数据得到的。作为一个数学家，我感到非常激动，象连分式这样深奥而又似乎无用的概念竟然出现在力学问题的求解中。

Krein 的连分式解并没有提供一个数值稳定的确定小球位置和质量的方法。直到 Golub(1973) 利用 Lanczos 算法做了同样出色的工作，以及由于 de Boor 和 Golub(1978) 的工作，才出现了稳定的计算方法。他们的文章将在 4.2 节中介绍。

Krein 对离散和连续系统反问题的研究始于30年代。对于连续系统，他的方法用到了高深的数学，因而并没有被后来的研究者们接受。相反，这些研究者都从 Marchenko(1950)，特别是 Gel' fand-Levilan(1951) 的工作中得到启迪。他们的文章主要讨论散射反问题，而后者把一类振动反问题（按照前面定义的那样）作为散射反问题的特例进行讨论。在本书中我们专门考虑振动反问题，仅当需要时才涉及有关散射反问题的大量文献中的结果。

我写此书的目的在于为这一领域提供一个引论，而无意求全。首先，我不注重严密的数学推导，这在讨论连续系统的章节中尤为明显，在许多情况下，严格的推导可在 Barcilon, Burridge, Hochstadt, Levitan和McLaughlin 等人的文章中查到。另一方面，我仅仅讨论由二阶或四阶微分方程描述的一维连续系统及其离散化系统这些最简单的振动系统。我之所以把讨论只局限于此，是

① 原书为俄文本：Гантмахер, Ф.Р.И Крейн, М.Г., Осцилляционные Матрицы и ядра и малые колебания mеханических систем, ГТТИ, 1950. ——译者注

因为迄今还没有得到二维或三维振动系统反问题的结果。例如，Sabatier(1978)说明，即使是对于似乎很简单的高维系统，仍然没有全面地回答前面提出的三个方面的问题。我相信，只有更多地了解这类系统的定性性质后，才能在这一领域取得进展，见Gladwell(1985)。

本书分为两部分，一至七章讨论离散系统，八至十章讨论连续系统。在每一部分中理论和应用都是交替出现。因此，第一章介绍矩阵而第二章介绍其应用。第三章研究 Jacobi 矩阵(即三对角矩阵)，这类矩阵在第四章的反问题中出现。第五章取自 Gantmakher 和 Krein 的书，比较难懂。建议读者初次阅读时只了解有关振荡矩阵的主要结论，在第六章，特别是第七章中将用到它们。

第八章取自 Courant 和 Hilbert(1953)的书，说明对称积分方程的一些基本性质；另一部分取自 Gantmakher 和 Krein 的书，介绍了振荡积分核特征值和特征函数的特殊性质。这些结果是第九章研究 Sturm-Liouville 系统，特别是第十章研究 Euler-Bernoulli 梁反问题的基础。

Nottingham 大学的 A.H.England，北京大学的王大钧以及 Waterloo 大学的三个热情的研究生 Don Metzger，Tom Lemczyk 和 Steve Dods 阅读了本书的部分手稿，他们指出了一些错误和提出了不少改进建议。本书是在 Waterloo 大学固体力学研究室诞生的，我对固体力学研究室的出版官员 D.E.Grierson 表示感谢，并感谢完成最后一稿打字的助手 Pam McCuaig 和完成初稿打字的 Linda Strouth。

非常欢迎指出书中和习题中的错误和参考文献中的遗漏。

目　　录

第一章　矩阵分析的基本知识

1.1　引言

在第二至四章中要大量用到矩阵分析，因此在这一章中将给出矩阵的基本概念和性质，以及以后将用到的部分定理的证明。由于矩阵分析已经确立了它在工程和科学中的地位，因此假定读者已经有了这方面的一些知识，在这里仅做简明叙述。读者可以在标准的教科书中，特别是在 Bishop，Gladwell 和 Michaelso（1965）的书中得到补充的知识。

1.2　基本概念和符号

矩阵系指由数字组成的一个矩形数组以及运算这些数字的一系列规则。

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 m 行和 n 列，则称矩阵的阶数为 $m\times n$。于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.2.1}$$

第 i 行、第 j 列的元素为 a_{ij}，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通常简单地记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}). \tag{1.2.2}$$

两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相等，系指：它们的阶数同为 $m\times n$，并且

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n); \tag{1.2.3}$$

写成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}. \tag{1.2.4}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置为 $n\times m$ 阶矩阵，用 $\boldsymbol{A}^T$ 表示（或有时表示为 $\boldsymbol{A}'$），它的行是 $\boldsymbol{A}$ 的列。注意到 $\boldsymbol{A}^T$ 的转置是 $\boldsymbol{A}$，称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^T$ 为转置对（互为转置），记为

$$(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}. \tag{1.2.5}$$

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 6 & 7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\\ -4 & 7\end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

是转置对。

如果 $m=n$，则称 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，表示成 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_1^n$。如果一个方阵与其转置相等，则称之为对称的。在这种情况下

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T, \tag{1.2.7}$$

或写成另一种形式

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n). \tag{1.2.8}$$

矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 9\\ 2 & 4 & 6\\ 9 & 6 & 3\end{bmatrix} \tag{1.2.9}$$

是对称的。方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对角的，系指：其非零元素仅仅出现在矩阵从左上方到右下方的主对角线上，记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=\mathrm{diag}\,(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}). \tag{1.2.10}$$

n 阶单位矩阵为

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_n=\mathrm{diag}\,(1,1,\cdots,1). \tag{1.2.11}$$

该矩阵的元素用 Kronecker delta 符号表示

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.2.12}$$

$m\times n$ 阶零矩阵系指矩阵的所有 $m\times n$ 个元素均取零值。

具有一列 n 行的矩阵称为 n 阶列向量，记为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}. \tag{1.2.13}$$

列向量的转置为行向量，记为

$$\boldsymbol{X}^T=[x_1,x_2,\cdots,x_n]. \tag{1.2.14}$$

两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以相加或相减，当且仅当它们的阶数同为 $m\times n$。它们的和与差分别为具有元素

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}. \tag{1.2.15}$$

的 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$，记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}. \tag{1.2.16}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与常数（或标量）k 的乘积为具有元素 ka_{ij} 的矩阵 $k\boldsymbol{A}$。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以做乘法 $\boldsymbol{AB}$，仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数。于是，如果 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 $m\times n$，$\boldsymbol{B}$ 的阶数为 $n\times p$，则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}. \tag{1.2.17}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 的阶数为 $m\times p$。记

$$\boldsymbol{A}(m\times n)\times\boldsymbol{B}(n\times p)=\boldsymbol{C}(m\times p). \tag{1.2.18}$$

$\boldsymbol{C}$ 的 i 行 j 列元素 c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的 j 列的相应元素的乘积之和，因此

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, \tag{1.2.19}$$

例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ -6 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}. \tag{1.2.20}$$

由该定义得到的最重要的结论为，矩阵乘法（一般地）是不可交换的，即

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}. \tag{1.2.21}$$

的确，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 阶的，而 $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times p$ 阶的，则除非 $m = p$，否则根本不能做 $\boldsymbol{BA}$ 的运算。即使 $m = p$，两个矩阵也不一定相等，如下例所示

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{1.2.22}$$

另外，这个定义还意味着可能有零因子，即可能存在非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB} = 0. \tag{1.2 23}$$

下面给出了一个例题

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.2.24}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}(m \times n)$ 与列向量 $\boldsymbol{x}(n \times 1)$ 的乘积是列向量 $\boldsymbol{y}(m \times 1)$，其元素为

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{1.2.25}$$

这使得 m 阶方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m, \end{cases} \tag{1.2.26}$$

可以写成一个矩阵方程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{1.2.27}$$

或

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}. \tag{1.2.28}$$

$n\times1$ 阶列向量 $\boldsymbol{x}$ 与其转置 $\boldsymbol{x}^T(1\times n)$ 的乘积为 $n\times n$ 阶对称矩阵

$$\boldsymbol{xx}^T = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{bmatrix}. \tag{1.2.29}$$

另一方面，$\boldsymbol{x}^T(1\times n)$ 和 $\boldsymbol{x}(n\times1)$ 的乘积为 (1×1) 矩阵，即标量

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1.2.30}$$

当且仅当 x_i（假定为实数）不全为零时，这个量取正值，被称为 $\boldsymbol{x}$ 的 L_2 模的平方值，即

$$\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \tag{1.2.31}$$

$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的标积（或点积）定义为

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{1.2.32}$$

两个向量正交是指

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0. \tag{1.2.33}$$

已经指出矩阵乘法不可交换。即使矩阵是方的（见式(1.2.22)）或对称的，这一结论依然成立，如下例所示

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.2.34}$$

这个例题说明两个对称矩阵的乘积不（一定）对称，同时暗示了 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 之间有某种联系. 这个结论非常重要，因而把它叫做一条定理：

定理1.2.1 若

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T, \qquad (1.2.35)$$

且当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是对称时（参见(1.2.34)），则

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{BA}. \qquad (1.2.36)$$

证明 考虑（1.2.35）两边的第 i 行第 j 列元素.设 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 $m\times n$，$\boldsymbol{B}$ 的阶数为 $n\times p$,则 $\boldsymbol{AB}$ 的阶数为 $m\times p$，而 $(\boldsymbol{AB})^T$ 的阶数为 $p\times m$. 于是

$$((\boldsymbol{AB})^T)_{ij} = (\boldsymbol{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki},$$

另一方面

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T)_{ij} &= (\boldsymbol{B}^T \text{的第 } i \text{ 行}) \times (\boldsymbol{A}^T \text{ 的第 } j \text{ 列})\\ &= (\boldsymbol{B} \text{ 的第 } i \text{ 列}) \times (\boldsymbol{A} \text{ 的第 } j \text{ 行})\\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}. \quad \blacksquare \qquad (1.2.37)\end{aligned}$$

习 题 1.2

1. 若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix},$$

求方阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=0$. 证明，若 a_{33} 被改变，则 $\boldsymbol{B}$ 只能为零矩阵.

2. 证明，不论矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是什么样的，矩阵 $\boldsymbol{AA}^T$ 和 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 总是对称的. 这两个矩阵相等吗？

3. 证明，若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵且 $\boldsymbol{A}$ 又是对称的，则

BAB^T 和 B^TAB 是对称的。

4. 证明，若 A,B,C 可按如下顺序相乘，则

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T.$$

1.3 矩阵的逆和行列式

下面考虑的几乎都是方阵。方阵的行列式定义为

$$|A| = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \tag{1.3.1}$$

其中下标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是数字 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列。如果它是偶排列，其符号为+；如果是奇排列，其符号为-；求和运算取遍 $1,2,3,\cdots,n$ 的所有 $n!$ 种排列。注意在求和式的每一项乘积中，仅包含 A 的各行各列的一个元素。于是对 2×2 和 3×3 矩阵分别有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3.2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.3.3}$$

排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的奇偶性分别取决于它是否能由 $1,2,\cdots,n$ 通过奇数次或偶数次置换得到。于是 1,3,2,4 和 2,3,1,4 分别是1,2,3,4 的奇排列和偶排列，因为

$$(1,2,3,4) \to (1,3,2,4),$$

$$(1,2,3,4) \to (2,1,3,4) \to (2,3,1,4).$$

现在给出行列式的部分性质。

引理1.3.1 若 A 的两行（或两列）交换，则其行列式的绝对值不变，但符号改变。记新矩阵为 B，则

$$b_{1i} = a_{2i}, \quad b_{2i} = a_{1i}, \quad b_{ji} = a_{ji}, \quad (j = 3,4,\cdots,n),$$

并且