

流体力学

易家训 著

章克本 张涤明 陈启强 蔡崇喜 译

高等教育出版社

流 体 力 学

——理论的简明导论

易家训 著

章克本 张涤明 陈启强 蔡崇喜 译

张涤明 章克本 校

高等教育出版社

流体力学

易家训 著

章克本 张涤明 等译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

浙江洛舍印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 30.5 字数 700,000

1982年9月第1版 1983年12月第1次印刷

印数 00,001—12,800

书号 15010·0436 定价 3.85 元

赠给我的朋友

冯 元 楨

中译本序

本书经章克本、张涤明等先生的翻译，得以祖国文字的面貌，与祖国广大读者见面。他们的工作给我极大的欢欣和安慰。

本书初版于一九六九年问世。十二年来，数值计算，在力学研究教学中，风行一时，而本书中所涉及数值计算者，仅数页而已，湍流讨论，亦感不足。限于篇幅，只能如此。希望采用此书的教师们，根据需要酌情补充。

计算机的发明，对科学研究和社会生活的影响很深很大。但它只是工具，不懂理论和实验的科学工作者，依靠它的高度效能来硬算一切，是很危险的，每每得到一些错误的或不能解释的结果。所以我认为任何一门科学，包括流体力学在内，理论和实验，不能用计算机来代替，本书中所陈述的材料，在将来仍是有用和必需的。

译书比编著难。编著者的最大方便是取材自由。不喜欢写或不会写的，可以不写。一般读者忙于阅读写出来的内容，没有时间去想那些该写而没有写的，更不会去责怪编著者写得不够。而译者则没有这个自由。一字一句，是好是坏，都得译出来。这是多么麻烦的事，而且吃力不讨好。译得好的地方，读者便说是书写得好，写得不好的地方，读者便怀疑是译得不好。张涤明等先生，不怕麻烦，任劳任怨还要为我任怨，我对他们真是深深感激。

我自己的经验是，出版一本书，要避免著者或编辑出版者的一切错误，是不可能的。原书几经校正，仍不免有误，赖勘正页来改正。我没有机会和时间读译本，想来错误是难免的。读者如不吝指出错误，让我们在再版中改正，我和译者都十分欢迎和感谢。

本书是赠给加州大学冯元桢教授的。他最近出版了一本书，内页有我的名字，名字旁边还盖了三颗他自己刻的印。第一颗为“贵阳易家训”，第二、三颗为“少小同游”、“一生知己”。我不会刻印，如会刻，第一颗便是“常州冯元桢”，第二、三颗因关系对称可借用他刻的。但我还要加一颗七字印：“同为梦系祖国人”。聊表我们对祖国的怀念之情。

贵阳易家训

初 版 序

本书作为教科书主要是向有兴趣的人或其职业要求他学习一些有关这一科目的人介绍流体力学理论。作为引论,在材料的选择上,并不想包罗无遗。包罗无遗,即使在很大雄心的努力下也是不可能的,在一个学科的引论里,这也是不需要的。我所着手做的是,用系统的方法并且在这样的水平上,即使得任何一个认真的且具有适当数学准备的学生,都可以用它来了解这一学科的基本原理、理论及其主要结果,将经典流体力学的理论面貌及其现代发展,作一简明的和有联系的叙述。我已竭力使本书自成一体,书中讨论的任何一个流体力学课题,并不假定是原先熟悉的,因而对一经选作讨论的课题,只有极少数没有做出最后的解答。少数的例外是由于,从上下文看来似乎要求提及一个研究或一个结果,但受篇幅限制,肯定不容许对它作详尽的论述。全书中所有这些情况,都给出了参考文献。因而,我希望本书对于所有希望在本学科上得到指导的人,都将是有益的。

本书原是供美国大学第一或第二年研究生用的。虽然,它的有些部分可以由有经验的教师给合格的大学生讲授。我给工科学生讲授的经验,自然使我了解到在流体力学方面他们希望学习些什么。但是我自己在流体力学方面的兴趣,要比仅仅由工程应用所引起的兴趣稍微广一些,因而本书不是专门想为工科学生写的。一个气象学的学生可以在这里找到为其以后研究所需要的适当基础,同时,一个物理学家,如果一个偶然机会引起他在流体力学方面的兴趣,那么也可以在这里找到他值得学习的东西。

实际上,本书所包含的材料或许比每周三次讲授(或讨论,因我考虑的是美国的大学)所组成的一学年课程所能介绍的内容要多一些。如果这样,部分内容可以按照兴趣的优先予以省略。看来,对这样一个课程,不管内容怎样选择,从第一章到第四章,第七章和第十章,都应当包括进去。在第四章到第十章中,补充资料可以根据教师的意愿和判断为教学加插进去。

设想读者的数学水平不十分高,除了高等微积分外,还有傅里叶级数、复变函数理论和微分方程的某些知识,都将是很有帮助的。但是,在大多数情况下,凡是我所需要的数学结果,我都力图从头开始推导。这种做法说明如下,在第一章,应用了笛卡儿张量,并介绍了线性代数的某些结果;在第四章,讨论了保角映射;在第五和第六章,应用了偏微分方程的特征方法;在第七章,应用了傅里叶级数;在附录2,还讨论了一般张量。

为了一个充分的理由我写了附录 2。学生们很少被教会如何将一组笛卡儿坐标的偏微分方程变换到它们的曲线坐标形式。在大多数的书中,他们所找到的全都是一些方法。无疑,对于那些希望用系统的方法学习变换理论的人,应该有一个学习用的资料。一个易懂的资料是布里罗尤(L. Brillouin)的“*Les Tenseurs en mécanique et en élasticité*”多弗出版公司(Dover Publications Inc.),纽约(New York),1946,附录 2 主要是以该书为依据的。然而,为简短起见,我采

取了一个重要的步骤。由于我只是对变形率张量和涡量张量,连续性方程,纳维埃-斯托克斯方程等等的从笛卡儿坐标到其他坐标的变换有兴趣,所涉及的空间总是欧几里德空间。由此我得以省去定义弯曲空间的平行性工作,并且这使得我有可能在相当短的一个附录里给出简明的要点。

习题在每章给出。它们的次序大致按照课文的先后排列,难易程度也不一。有些仅仅是帮助学生掌握课文内容的练习,但有些则需要很多思考和相当解题技能。我已试图使这些习题尽可能引起学生们的兴趣,而不使其超出学生所能达到的程度或变成需要长期研讨的题目。

我很高兴利用这个机会感谢很多人对我的帮助。冯元桢(Y. C. Fung)教授看了头三章和附录1,他的评论和建议是有帮助的。吴耀祖(T. Y. T. Wu)教授仔细地阅读了全部手稿,提出了很多有价值的评论,还发现了一些错误。对他,我谨致诚挚的感谢。在1956年出版的一本书里,我感谢过从许多人那里得到的好处,他们才使我在流体力学方面产生了初期的兴趣或加深了这种兴趣。除了这些人之外,我现在还必须提到戈尔茨坦(S. Goldstein)教授,1947年我从他那里学习了可压缩流体流动的理论,并有幸享受到他的温暖的友谊。本书是1956年开始写的,当时,我的朋友和以前的老师麦格·诺恩(J. S. McNown)教授邀我去密执安大学(University of Michigan)。1956年以来的十二年,在这段时间里,本书的一些章节已写好、并且已在研究生班上讲授过,这是我生活中愉快而有意义的12年。对于这种愉快,我要感谢我的密执安大学的同事们。与他们共同讨论中所得到的激励,他们的友谊的安慰和他们慨然的鼓励,这些都构造了我写本书所必需的内心的兴趣和安静。

我应当对密执安大学的德布勒(W. R. Debler)教授,九州大学(Kyushu University)的坦纳达(Taneda)教授,科内尔大学(Cornell University)的格布哈特(B. Gebhart)教授和约翰·霍布金斯大学(Johns Hopkins University)的科辛(S. Corrsin)教授表示感谢,他们都提供了收在说明插图中的照片。我还要诚挚地感谢为图表绘制原图的朋友和学生李庆新(Chin-Hsin Li)博士,打印手稿的霍伊斯勒(R. Haeussler)小姐以及给予耐心而且出色合作的麦格劳-希尔(McGraw-Hill)编辑部。

修 订 版 序

我利用本书重印机会的方便,在若干处作了修正及改进。许多读者和朋友们善意地指出了旧版的印刷错误及错误,派尔(B. Pyle)先生辛劳地打印了勘误表。我对他们表示诚挚的谢意。

我尤其感谢戴莱(M. V. Dyle)教授的支持与慷慨帮助,没有这些支持与帮助,这一版决不会问世。最后,我借此机会,感谢德意志联邦共和国亚历山大·冯·洪堡(Alexander von Humboldt)基金会给予的洪堡奖金,它使我有机会在卡尔斯鲁克(Karlsruh)工作,在那里完成了本书的最后修订的大量工作。

易家训

1978

致 读 者

方程的序号在每章是连续的。如果一个方程在其它的章中提到,则在其序号前加上方程第一次出现的章的章号。例如,如果第四章方程(100)在同一章提到,则简单地以(100)标记。但若在第五章提到同一方程,则记为(4.100)。对图号及习题号同样应用。当正文中提到附录中的方程时,常用字头A1或A2。例如,附录2中的方程(20),在正文中提到为(A2.20)。然而,节号总是完整地写出,例如“第五章 § 3.5.1”。

保留符号的习惯用法并同时保持一对一地相应一致,这是完全不可能的。本书首先照顾习惯,这样,一个符号常常表示不同的意义。我通常不止一次地定义一个量,因而我很少去研究任何符号的难定的定义。依我的意见,一个符号表与其说是必要的,不如说是个麻烦,更不用说是一个帮助了。

参考文献在每章末给出,它也可作为作者的索引。正如所研究的资料一样,这些参考文献也是不详尽的。正文中列出了明显提到的各作者的论著,而且在辅助读物中也列出了有关各章的权威性著作(大部分是书)。从所有这些参考文献中,我们都可以找到其它的参考文献,而且过程可以是重复的。(这个有启发性方法被安德烈莫鲁斯(André Maurois)称作“星形方法”,星的每一射线是一参考文献,而此文献末端是带有其射线的另一星。)在书末提供了题目索引,没有另外给出作者索引。

目 录

初版序	1
修订版序	3
致读者	4

第一章 基本原理

1. 流体的定义	1
2. 速度	1
3. 加速度	3
3.1 存在扩散时加速度的特有定义	4
4. 迹线和流线	4
5. 连续性	5
5.1 存在扩散时连续性方程的形式	7
5.2 连续性方程积分形式的应用	8
6. 流函数	8
7. 相对位移变化率	11
8. 涡量与形变率	13
9. 涡线和环量	15
10. 应力张量	16
11. 主方向	18
12. 不变量	20
13. 应力与变形率之间的关系	21
习题	24

第二章 基本方程

1. 纳维埃-斯托克斯方程	28
2. 积分形式的动量方程	30
3. 能量的耗散	30
4. 等密度和等粘性系数流体的涡量方程	31
5. 流动相似性	34
6. 量纲分析	36
7. 相对于旋转系统的运动方程	37
7.1 参考系的线加速度	39

8. 能量方程	39
习题	41

第三章 无粘性流体流动的一般理论

1. 引言	43
2. 环量守恒	43
3. 变密度无粘性流体的涡量方程	44
4. 涡线伸长对均熵气体涡量的影响	45
5. 等密度无粘性流体的二维或轴对称的定常流动	46
6. 涡线运动	47
7. 无旋流动的速度势	47
8. 定常流动的伯努利方程	48
9. 无旋流动的伯努利方程	49
10. 对于具有不变涡量的定常二维流动的伯努利方程	50
11. 对于具有不变涡量的二维不定常流动的伯努利方程	50
12. 旋转流体的某些一般结果	51
12.1 地转运动	51
12.2 普劳德曼-泰勒定理	52
13. 对于旋转参考系定常流动的伯努利方程	53
14. 相对于旋转参考系的具有不变涡量二维定常流动的伯努利方程	54
15. 相对于旋转参考系的具有不变涡量二维非定常流动的伯努利方程	54
16. 毕奥-沙伐尔定律	55
习题	57

第四章 等密度无粘性流体的无旋运动

1. 基本方程引言	60
-----------	----

2. 用流函数表示的轴对称无旋流动的方程.....61	20.4 儒可夫斯基机翼.....97
3. 拉普拉斯方程解的唯一性.....61	21. 二维流动的附加质量.....99
4. 调和函数的最大值和最小值.....62	22. 二维流动中的力和力矩 布拉休斯定理.....101
5. 均匀流动和三维奇点.....63	22.1 布拉休斯定理的应用.....102
5.1 均匀流.....63	23. 自由流线理论.....105
5.2 点源和点汇.....63	23.1 许伐兹-克里斯托夫变换.....106
5.3 偶极子.....64	23.2 克希霍夫射流.....107
6. 三维分布奇点.....65	23.3 射流的折射.....110
7. 轴对称流动的叠加方法.....66	24. 近似方法.....112
7.1 半无穷体.....66	24.1 绕细长体的二维对称流动的源-汇法.....113
7.2 兰金体.....67	24.2 芒克涡层理论.....114
7.3 冯·卡门方法.....67	24.3 绕细长体轴对称流动的线性理论.....115
7.4 绕球的流动.....68	24.4 松弛法.....116
8. 调和函数的性质.....69	习题.....118
9. 开尔文逆定理.....69	
10. 球定理.....70	
10.1 巴特勒球定理.....70	
10.2 韦斯球定理.....71	
11. 附加质量.....72	
11.1 泰勒定理.....75	
11.2 球的附加质量.....78	
12. 定常流动中作用于物体上的力和力矩.....79	
12.1 力与从包围点源的表面流出的动量.....81	
12.2 奇点间的互易性.....82	
12.3 作用在物体上的力的最后计算.....83	
12.4 力矩.....83	
13. 绕近似球体的流动.....84	
14. 二维无旋流动, 复势.....86	
15. 流网.....88	
16. 保角映射的概念.....89	
17. 基本的二维无旋流动.....89	
18. 圆柱绕流.....90	
19. 圆定理.....91	
20. 逐次变换.....93	
20.1 绕椭圆柱的流动.....93	
20.2 经倾斜板的流动和西索蒂作谬.....95	
20.3 绕圆弧的流动.....96	
	第五章 不可压缩流体中的波动
	1. 引言.....122
	2. 小振幅表面波.....122
	2.1 决定均匀液体中表面波的线性微分方程组.....122
	2.2 半无限液体中的线性表面波.....124
	2.3 有限深度液体层中的重力波.....125
	2.4 表面驻波和表面定常波.....126
	2.5 能量均分.....127
	2.6 群速度.....127
	2.6.1 群速度的一般解释.....129
	2.7 运动物体或运动的表面压力分布所引起的重力波.....131
	2.8 潜没柱体运动所引起的重力波的生成.....136
	2.9 运动着的扰动所生成的波的位置.....138
	2.10 波阻.....140
	2.11 等深度有限流体团中的驻波.....141
	2.12 岸边波.....142
	2.13 造波机.....144
	3. 非线性表面波.....146
	3.1 格斯特涅尔波.....146
	3.2 斯托克斯波.....149
	3.3 孤立波.....151
	3.4 椭圆型波.....153

3.5 浅水理论: 一维传播.....155

3.5.1 与空气动力学比拟.....156

3.5.2 有限振幅长水波一维传播的特征线方法.....157

3.5.3 简单波.....159

3.5.4 两个水平维度的浅水定常超临界流的特征线方法.....162

3.6 水跃.....168

4. 连续分层流体中的内波.....169

4.1 分层流体中的小振幅波.....169

4.1.1 内波的最大频率.....172

4.1.2 c 谱.....172

4.1.3 k 谱.....173

4.1.4 c^2 随 k^2 的变化.....173

4.2 定常流动分层流体中的有限振幅波.....173

5. 惯性波.....176

5.1 线性轴对称波.....176

5.2 罗斯比波.....177

5.3 定常流动中有限振幅轴对称惯性波.....180

习题.....181

第六章 无粘性可压缩流体动力学

1. 引言.....188

2. 基本方程.....188

3. 伯努利方程.....190

4. 均熵气体定常无旋流的基本方程.....192

5. 均熵气体不定常无旋流动的基本方程.....194

6. 音速.....194

7. 波动方程的泊松解.....196

8. 二维传播.....198

9. 亚音速和超音速.....198

10. 正激波.....199

11. 斜激波.....201

12. 一维定常流-拉伐尔喷管.....204

13. 一维不定常流动, 黎曼特征线法.....205

14. 二维定常流: 莫伦布罗克变换.....206

15. 二维定常流: 勒让德变换.....207

16. 二维定常亚音速流: 查普雷金气体射流.....209

17. 二维定常亚音速流的查普雷金-卡门-钱学森近似.....212

18. 二维超音速流: 物理平面上的特征线法.....214

19. 二维超音速流: 速度图平面的特征线法.....217

20. 二维定常亚音速流的迭代法.....218

20.1 瑞利-詹曾方法.....218

20.2 普朗特迭代.....219

21. 定常流绕细长体的线性化近似解.....219

22. 结束语.....219

习题.....220

第七章 粘性影响

1. 引言.....223

2. 线性纳维埃-斯托克斯方程的定常流动.....225

2.1 平面库埃特流.....225

2.2 平面泊肖流.....226

2.3 平面库埃特-泊肖流及其应用.....226

2.4 重力影响: 沿倾斜面向下的平行流.....228

2.5 粘性系数变化的影响.....229

2.6 通过矩形管道的定常单向流.....229

2.7 涡流比拟.....231

2.8 肥皂膜比拟.....231

2.9 扭转比拟.....232

2.10 泊肖流.....232

2.11 库埃特流.....232

2.12 埃克曼流.....333

3. 线性纳维埃-斯托克斯方程的非定常流动.....234

3.1 突然起动的库埃特流.....234

3.2 两同心圆柱体之间的非常纵向流动.....235

3.3 杜哈曼尔原理.....237

3.4 平板在其自身所在平面上运动所引起的半无限流体的非常流动.....238

3.5 简谐的埃克曼流.....240

4. 对于定常流动纳维埃-斯托克斯方程的精确解: 非线性情况.....241

4.1 集中力引起的圆形层流射流.....241

4.2 面对无限平板的二维流动.....245

5. 边界层流动的基本方程.....248

6. 二维定常流动边界层方程的解.....250	8. 由热线源产生的自由对流.....308
6.1 沿着平板的定常流动.....250	9. 可压缩边界层: 基本方程.....311
6.2 二维层流射流.....252	10. 曼格勒变换.....313
7. 轴对称边界层: 曼格勒变换.....255	11. 气体粘性随温度变化的定律.....313
8. 轴对称层流射流.....256	12. $\sigma=1$ 的情况.....313
9. 任意形状的二维物体的边界层流动.....257	13. 斯特沃特森变换.....314
10. 沿任意形状轴对称物体的边界层流动.....263	14. 冯·米赛斯变换.....317
11. 卡门-波尔豪森近似解法.....265	15. 零倾斜角平板上的边界层.....317
12. 分离与阻力.....269	16. 克罗科变换.....320
13. 粘性流体非常缓慢的流动: 球下落的斯托克斯解.....270	17. 克罗科变换应用于沿光滑平板的边界层.....321
14. 粘性流体非常缓慢的流动: 奥森近似.....274	习题.....323
15. 作用于振动球上的力.....278	
16. 作用在以任意速度作直线运动的球上的力.....280	
17. 球从静止开始的运动.....281	
18. 多孔介质里的流动: 达西定律及其推论.....283	
19. 多孔介质里定常流动: 粘性系数变化的效应.....285	
20. 变粘性系数和变密度流体的二维定常渗流.....285	
21. 海菜-肖漕.....286	
习题.....287	

第八章 传热和气体边界层

1. 对流的某些一般考虑.....291
2. 质量扩散.....293
3. 大佩克莱特数时边界的强迫对流.....295
3.1 加热平板在布拉休斯流中的强迫流.....295
3.2 定常二维热边界层的弗罗斯林级数.....297
3.3 导管中的强迫对流.....298
4. 斯夸尔射流中的温度分布.....298
5. 在定常层流预热射流中的温度分布.....300
6. 受热垂直平板的自由对流.....302
7. 由热量点源引起的自由对流.....304

8. 由热线源产生的自由对流.....308
9. 可压缩边界层: 基本方程.....311
10. 曼格勒变换.....313
11. 气体粘性随温度变化的定律.....313
12. $\sigma=1$ 的情况.....313
13. 斯特沃特森变换.....314
14. 冯·米赛斯变换.....317
15. 零倾斜角平板上的边界层.....317
16. 克罗科变换.....320
17. 克罗科变换应用于沿光滑平板的边界层.....321
习题.....323

第九章 流体动力学稳定性

1. 引言.....327
2. 重力不稳定性.....327
2.1 两重叠流体的不稳定性.....328
2.2 加速度引起的自由表面或交界面的不稳定性.....330
2.3 贝纳德问题.....331
2.3.1 钱德拉塞卡方法.....336
2.4 斯托梅尔的盐指现象.....337
3. 惯性不稳定性.....339
3.1 稳定性的一个充分条件.....340
3.2 罗伯茨和钱德拉塞卡的伴随系.....343
3.3 泰勒的结果.....345
4. 表面张力引起的不稳定性.....346
4.1 圆形液体射流的不稳定性.....347
4.2 表面张力引起的对流网格.....348
5. 均匀流体平行流的稳定性初步.....350
5.1 稳定性的基本方程组.....351
5.2 二维扰动性质和三维扰动性质之间的关系.....352
5.3 奥尔-萨默菲尔德方程.....354
6. 无粘性流体中由于涡量分布引起的不稳定性.....355
6.1 瑞利定理.....355
6.2 弗杰非托夫特定理.....355
6.3 霍华德的半圆定理.....356

6.4	托尔梅恩关于中性模型的研究	357
6.5	在速度剖面内具有一拐点的无粘流体的不稳定性	363
6.6	速度剖面内没有拐点的无粘流体的稳定性	364
7.	粘性流体平行流动的稳定性	366
7.1	粘性流体平面泊肖流动的不稳定性	367
7.2	对于平面泊肖流稳定性林家翘的改进理论	371
7.3	空间增长率	373
8.	平行流中无粘分层流体的不稳定性	376
8.1	海姆霍兹不稳定性	376
8.2	无粘性和连续分层流体稳定性的基本方程	378
8.3	迈尔斯定理	378
8.4	霍华德的半圆定理	379
9.	沿倾斜平面往下流动的液体层的稳定性	380
10.	由于粘性分层引起的不稳定性	385
11.	由于周期激发引起的长期不稳定性	388
11.1	在垂直周期运动中液体自由表面的不稳定性	388
11.2	由于下面边界在其自身平面内振动使之周期运动的液体层,其自由表面的长期不稳定性	391
	习题	399

第十章 湍流

1.	引言	407
2.	管道中的湍流	408
3.	湍流边界层的间歇性	414
4.	湍流扩散的泰勒理论	415
5.	各向同性湍流的泰勒理论	418
6.	冯·卡门理论	425
7.	卡门-霍华德理论	429
8.	泰勒谱分析	430

9.	量纲推理法	435
	习题	436

附录1 基本热力学

1.	热力学系统和热力学变量	439
2.	热力学第一定律	439
3.	可逆性	440
4.	理想气体	441
4.1	焦耳实验	442
4.2	比热	442
4.3	理想气体缓慢的绝热变化	443
5.	卡诺循环	444
6.	热力学第二定律	444
7.	绝对温标	445
8.	熵	447
8.1	理想气体的熵	449
9.	气体运动理论初步	449
9.1	平衡时理想气体的速度分布	450
9.2	理想气体的状态方程	451
9.3	理想气体 γ 的计算	452
	习题	453

附录2 曲线坐标

1.	张量	455
2.	伪张量	456
3.	基本度量张量	458
4.	向量及张量的协变微分	459
5.	克里斯托夫符号	462
6.	向量及张量的物理分量	463
7.	梯度、散度和拉普拉斯算子	464
8.	旋度和变形率张量	466
9.	连续性方程和纳维埃-斯托克斯方程	468
	习题	469
	索引	471

第一章 基本原理

1. 流体的定义

定义流体的性质是,它在没有持续不断的运动时,无论多么小的剪切力都是不能承受的。由于气体和液体都有这种性质,所以它们都是流体,就它们的宏观运动而论,都从属于同一的方法处理。当然,流体在垂直作用于其边界的表面力的作用下是可以处于平衡状态的。事实上,整个流体静力学的课题正是讨论处于这种状态下的流体。

本书只研究那些没有优惠方向的流体。这种流体称为各向同性的。

2. 速度

倘若物质是无限可分的,那么定义一个质点的速度为它的位移对时间的变化率才会是有意义的。然而一般物质和特殊的流体,都不是无限可分的。严格地说,我们能够理解的只是一个分子、一个原子、一个原子核或一个电子的速度,至于在一个原子内介于电子与原子核之间、在一个分子内介于原子与原子之间或分子本身之间的空隙空间的一个几何点的“速度”,是没有物理意义的。

如果为了研究流体运动就必须直接地研究分子,那确实是一种无望的情况。幸好,虽然分子之间有很多空隙空间,在通常条件下,单位体积的液体或气体的分子数目是极大的。一克分子量气体约有 6.024×10^{23} 个分子[洛喜米特(Loschmidt)数],并且在标准状况下,占有 22.4 公升的体积,因此,一立方厘米体积含有 2.687×10^{19} 个分子。在一立方微米($1 \text{ 微米} = \frac{1}{1000} \text{ 毫米}$)体积内,分子数目大约是 2.687×10^7 个。对于这样一个小体积,这是一个极大的数目。因此,对于所有实用的目的,一般条件下的气体——更不必说液体了——都可以认为是连续的。一个体积非常小(比如说 1 立方微米)的流体微团的速度,可以定义为包含在微团内的巨大数目的分子的动量除以微团总质量的平均值。由于这个微团的体积很小,所以这样定义的速度可以认为是位于流体微团的质心上的质点的速度,就好象流体是无限可分的一样。除了研究高度稀薄的气体之外,这种近似处理是有效的。

根据这个定义,含有 $N_i (i=1, 2, \dots, n)$ 个第 i 种物质的分子的流体微团的速度 \mathbf{v} 为

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{v}(i, j) \right] / \sum_{i=1}^n N_i m_i, \quad (1)$$

其中 m_i 是第 i 种物质的分子量,而 $\mathbf{v}(i, j)$ 是分子量为 m_i 的 N_i 个分子中的第 j 个分子的速度。

流体微团的速度亦可定义为

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{v}(j)}{N}, \quad (2)$$

其中

$$N = \sum_{i=1}^n N_i,$$

而 $\mathbf{v}(j)$ 是将 n 种物质的分子不管其种类而放在一起得到的 N 个分子的第 j 个分子的速度。由公式(1)所定义的微团速度是以分子量为权的加权平均速度, 而由式(2)所定义的是不加权的平均速度。在 § 5, 讨论连续性方程时, 将明显地看到, 若流体是混合体时, 则两个定义所对应的连续性方程的形式是不相同的。这些问题将在第 8 章与扩散方程结合起来进一步讨论。为便于以后的讨论, 方程(1)将换成稍方便的形式。如果对于混合流体的各种成分, 平均速度定义为

$$\mathbf{v}(i) = \sum_{j=1}^{N_i} \frac{\mathbf{v}(i, j)}{N_i}.$$

方程(1)就可写为

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i m_i \mathbf{v}(i)}{\sum_{i=1}^n N_i m_i}. \quad (1a)$$

不管流体的体积如何, 第 i 种成分的密度 ρ_i 必需与 $N_i m_i$ 成正比, 故式(1a)可写为

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{v}(i)}{\rho}, \quad (1b)$$

其中 ρ 是总密度, 即

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i. \quad (3)$$

必须弄清质点速度定义的完整意义。即使包含在微团内的分子各自以很大的速度运动着, 但它们的动量的平均值仍可以为零。事实上, 当分子处于完全无序运动时, 它就为零了。因此, 分子动量的平均值是分子运动有序部分的一种度量。无序的分子运动的强度显示为一种特性, 这种特性叫做温度。

如果流体被认为是连续体, 则流体任一点的速度可假设为该点的坐标 x_i ($i=1, 2, 3$) 和时间 t 的函数。很明显, 不作某些修改的话, 连续体的概念和扩散的概念是不协调的。然而这种基本的不协调性并不表现为不可克服的困难。

其他的运动学或动力学特性, 既可以从分子的观点也可以从连续体的观点来定义。虽然在任何有质量扩散的地方连续体的近似其适用性必须按照分子的观点加以审定。但在本书中流体

将认为是连续体。

3. 加 速 度

为了求得一个质点的加速度，必须观察质点的速度是如何随时间变化的，因此必须留意质点本身——至少在一短时间内。有两种不同的描述流体运动的方法。其一，把流体质点的坐标作为时间和它们的永久识别标记（例如其初始时刻的坐标）的函数。另一个是，把质点的速度和其他特性作为时间和不依赖于时间的固定空间坐标的函数。前者以拉格朗日 (J. L. Lagrange 1736—1813) 命名，称为物质的或拉格朗日的描述方法，后者以欧拉 (L. Euler 1707—1783) 命名，称为空间的或欧拉的描述方法，虽然历史学家们证实这两种描述法都应归功于欧拉。

对于拉格朗日描述法，流体质点在初始时刻所在位置的笛卡儿坐标 (Cartesian Coordinates) (c_1, c_2, c_3) 可用以识别这些质点，该质点以后所在位置的 (笛卡儿) 坐标记为 (X_1, X_2, X_3) ，这些坐标是 c_i 和时间 t 的函数。对于一个确定的质点，识别坐标是固定的，只有坐标 X_i 是 t 的函数。如果坐标是笛卡儿坐标系，则速度分量是

$$u_i = \frac{\partial X_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3,$$

而加速度分量简单地是

$$a_i = \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2}. \quad i = 1, 2, 3,$$

对于欧拉描述法，认为运动流体的速度和加速度是时间和位置的函数。描述位置的笛卡儿坐标 (X_1, X_2, X_3) 现在与时间无关。但是，为了求得速度与加速度，我们仍然必须跟踪流体质点一段短时间 dt 。在这段时间内，所跟踪的流体质点的坐标总计变化了 dX_i ，其相应的速度变化由两部分组成：第一部分是随时间的局部变化，第二部分是由于质点位置改变而引起的变化。若再次用 u_i 记为速度在 x_i 方向的分量，则因 u_i 是 x_j 和 t 的函数，所以对于所有增量 dt 和 dx_j ，

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j,$$

跟踪质点的物理过程相当于用质点位移 dX_j 去识别 dx_j 。这样，当跟踪一个质点时就有

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dX_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3a)$$

如同在前方程中一样，其中最后一项代表三项之和。 j 顺序取遍 1, 2, 3。除非特别声明，我们将总是使用这个求和记法的约定。若坐标是笛卡儿坐标，则位移分量是

$$dX_i = u_i dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3b)$$

用 dt 除式 (3a)，取极限，我们有

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

算子