

高等学校教材

徐继祖 李维扬 汪克让等 编著

海洋工程结构动力分析



天津大学出版社

高等学校教材

海洋工程结构动力分析

徐继祖 李维扬 汪克让 编 著
张振衡 聂 武

天津大学出版社

田宝荣

内 容 简 介

本书重点论述固定式海洋工程结构(包括桩式结构及重力式结构)在海洋环境载荷作用下动力响应的分析问题,同时也对海上系泊系统(包括单点系泊系统及半潜式平台)在波浪作用下运动的计算进行了探讨。书中分章讨论波浪、水流、风)、地震及海冰对固定式海洋工程结构的作用及其动力响应的分析方法。对结构与土相互作用的计算作了专门介绍。作为以上内容的基础知识,书中对多自由度系统动力特征及动力响应的一般常用算法以及随机振动、非线性振动的基本概念和计算方法分别作了简要介绍。

本书经审定作为“近海工程”专门硕士研究生的指导性教材,同时也可作为相邻专门的硕士生、高年级本科生以及从事海洋工程结构设计、研究人员的参考书。

(津)新登字012号

海洋工程结构动力分析

徐继祖 李维扬 汪克让

编著

张振衡 聂武

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本: 787×1092毫米^{1/16} 印张: 17^{1/2} 字数: 437千字

1992年11月第一版 1992年11月第一次印刷

印数: 1—800

ISBN 7-5618-0348-6

TV·4

定价: 4.95元

出版说明

根据国务院国发[1978]23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为作好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986年—1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前 言

本书以固定式近海工程结构为主要对象,讨论在各种海洋环境载荷作用下结构动力响应的最新计算方法及其研究现状。本书内容可分为三部分。前3章分别简要叙述多自由度系统动力特性及响应的一般实用算法,随机振动的理论和方法,及非线性振动的基本理论和方法,作为后续各章的基础知识。第4章至第7章依次阐述海洋工程结构的各种环境载荷及其动力响应的分析方法。第8章及第9章则为专题介绍。

第1章介绍结构固有特征的性质和算法、结构动力响应数值计算中几种常用的积分法。第2章在概要总结有关随机过程基本知识的基础上,叙述结构随机响应统计特征值的计算方法及在实用中很重要的响应极值分析。第3章介绍结构非线性振动的特征及其基本解法,在流(风)与结构、冰与结构的动力相互作用分析中,均将涉及非线性振动问题。

第4章讨论在海洋工程中最为普遍的波浪载荷的作用。首先介绍常用的几种波浪理论,然后分别叙述用于细长构件波浪载荷计算的Morison公式及用于大尺度构件波浪载荷计算的绕流理论方法;最后通过实例说明在波浪载荷作用下结构响应的计算方法。第5章讨论流(或风)的作用。首先介绍具有最常见的圆形剖面的构件在均匀流场中发生涡激振动的力学机制及现有的两种计算模型;然后分别简要叙述非圆形剖面构件在均匀流场中发生的跳跃振动及在紊流中的结构随机振动。第6章讨论固定式平台的地震作用及其结构响应,分别介绍在频域及时域的工程计算方法以及考虑结构弹塑性变形特性的计算方法。第7章讨论寒冷海区冰载荷的作用,在简要说明海冰的物理力学特征的基础上,分别介绍冰引起结构振动分析的强迫振动模型、自激振动模型及冰力振子模型。

第8章讨论浮式结构运动与波浪载荷之间的耦合关系。对自由漂浮结构,介绍基本的线性运动计算方法,列举浮筒和半潜式平台的简化算例;对系泊浮式结构,针对锚泊系统的形式介绍波浪的二阶力及相应的系统慢漂振荡的计算方法。第9章讨论固定式平台两类基础——桩式基础及重力式基础——与土的相互作用。对桩式基础,介绍常用的 $p \sim y$ 曲线法及用差分法计算桩的响应,在此基础上介绍了两种近期提出的桩基础动力分析方法,并对动力边界元法作了简要介绍;对重力式基础,则重点介绍在工程中较多采用的集总参数法。

本书由哈尔滨船舶工程学院李维扬、聂武和天津大学徐继祖、汪克让、张振衡合作编著。编写的具体分工为:李维扬——绪论及第8章;聂武——第4章;徐继祖——第5章、第7章及第9章中的第1、2、3节;汪克让——第1章、第2章、第6章及第9章中的第4至9节;张振衡——第3章。最后由徐继祖负责全书的总校。

海洋工程结构动力分析是近20年才建立起来并得到较快发展的一门年轻学科,它涉及的技术领域广泛,目前仍处于发展的阶段,新概念、新方法不断出现。由于作者水平所限,书中不当以至错误之处在所难免,我们恳切希望得到读者的指正。

编著者

1990年10月

目 录

绪论	(1)
第一章 结构动力特性和响应的计算方法	(6)
§1-1 前言	(6)
§1-2 特征对的性质	(7)
§1-3 特征对的计算	(8)
§1-4 动力响应的计算	(15)
第二章 随机振动基础	(25)
§2-1 前言	(25)
§2-2 平稳随机过程和各态历过程	(25)
§2-3 随机过程的期望和矩	(27)
§2-4 Gauss过程	(28)
§2-5 相关函数	(29)
§2-6 功率谱密度	(31)
§2-7 宽带过程与窄带过程	(33)
§2-8 线性时不变系统的动态特性	(34)
§2-9 单自由度系统对于随机激振力的响应	(38)
§2-10 多自由度系统响应的互相关函数	(41)
§2-11 多自由度系统对于随机激振力的响应	(43)
§2-12 响应的峰值分析	(45)
第三章 非线性振动	(51)
§3-1 海洋工程结构振动中的非线性问题	(51)
§3-2 弱非线性项	(53)
§3-3 正规摄动法	(55)
§3-4 Lindstedt法	(57)
§3-5 Shohat法	(62)
§3-6 摄动法解拟线性系统的强迫振动	(63)
§3-7 迭代法 (Duffing法)	(68)
§3-8 Duffing方程的幅-频曲线	(72)
§3-9 次谐波响应	(74)
§3-10 组合谐波响应	(76)
§3-11 参数振动	(77)
第四章 波浪载荷及其结构响应	(81)
§4-1 波浪理论	(82)
§4-2 海洋工程结构的波浪载荷	(101)

§4-3	波浪载荷作用下的结构响应	(116)
第五章	水流、风引起的结构振动	(125)
§5-1	概况	(125)
§5-2	旋涡泄放与涡激振动	(125)
§5-3	涡激振动的工程实用分析法	(129)
§5-4	升力振子模型	(131)
§5-5	升力相关模型	(135)
§5-6	防止或抑制涡激振动的方法	(141)
§5-7	跳跃振动(超驰振动)	(142)
§5-8	紊流(湍流)引起的振动	(147)
第六章	地震作用及其结构响应	(157)
§6-1	概述	(157)
§6-2	地震波、震级和烈度	(158)
§6-3	场地和地基	(160)
§6-4	结构抗震设计的特点及要求	(163)
§6-5	由响应谱理论估算地震作用	(164)
§6-6	地震响应的时程分析法	(173)
§6-7	地震响应的概率分析法	(180)
第七章	海冰载荷及其结构响应	(186)
§7-1	引言	(186)
§7-2	海冰的物理力学特性	(187)
§7-3	计算由冰引起的结构振动——Matlock模型	(192)
§7-4	Määtänen模型(自激振动模型)	(194)
§7-5	冰力振子模型	(200)
第八章	浮动结构的波浪载荷及响应	(205)
§8-1	线性运动理论	(205)
§8-2	简单几何形状浮体的运动和载荷	(211)
§8-3	随机海浪作用下运动的计算	(216)
§8-4	系泊系统	(220)
§8-5	锚泊系统的刚度	(221)
§8-6	波浪二阶力	(225)
§8-7	系泊系统的响应	(228)
第九章	结构与土的动力相互作用	(232)
§9-1	浅基础(重力式基础)与土动力相互作用研究概况	(232)
§9-2	半无限空间体表面基础的振动, 集总参数法	(234)
§9-3	浅基础与土相互作用分析的有限元法	(243)
§9-4	侧向受荷桩的分析	(245)
§9-5	$p \sim y$ 曲线	(247)

§9-6	求解桩土相互作用的差分法.....	(251)
§9-7	桩基动力分析的集中质量模型.....	(253)
§9-8	桩基动力分析的梁模型.....	(258)

绪 论

在陆架范围内的海域常统称为近海。自本世纪40年代后期在美国墨西哥湾首次建造和应用近海钻井平台以来,世界近海工程技术已经有了巨大进步。目前在欧、美、亚等大陆陆架不同水域工作的有各种类型的近海工程结构物,它们主要应用于海底油、气资源的勘探与开发,也有的用于海洋能(如波能、潮汐能)的利用、海底矿产(如锰矿石)的开采以及航运工程、港口工程等。随着海洋开发活动向更深海域发展,面临的环境条件愈益严酷,对近海结构物的设计建造提出了更高、更苛刻的要求。美国墨西哥湾及欧洲北海油田的开发有力地促进了近海结构工程技术的发展。现有的墨西哥湾的导管架式平台和北海的重力式平台的最大工作水深已分别达到了415m(COGNAC平台)和273m(STATFJORD平台),设计浪高达30m以上。

平台的灾难性事故和由此带来的人员伤亡及经济损失也从反面促进了平台设计的革新与进步,并且构成近海工程这一人类征服海洋的高风险性事业的发展历史中的一个组成部分。1961年美国新泽西州近海的Texas平台被暴风摧毁,死亡28人;1979年我国的自升式钻井平台渤海2号在移位中因操作不当而翻沉,遇难者达70余人;1980年在北海挪威 Ekofisk 油田的一座半潜式平台 Alexander Kielland 号因结构疲劳破坏而倾覆,死亡120余人;1981年在

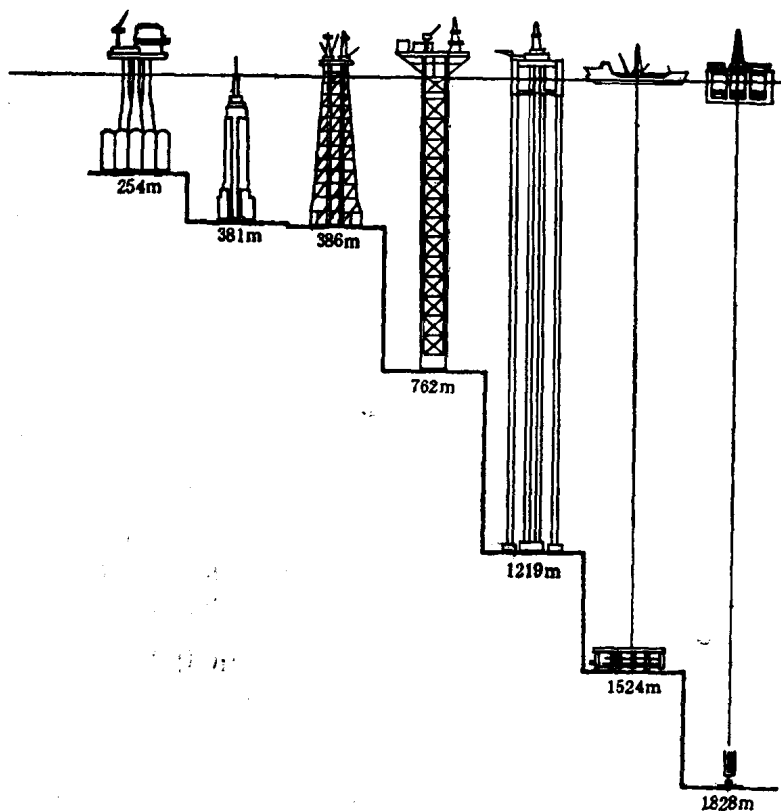


图 0-1

加拿大东部近海，一座半潜式钻井平台在暴风失事，死亡数十人。

目前工作水深范围超过200m的有代表性的海洋工程结构物示于图0-1。海洋工程结构物可分为可变换位置的移动式结构和固定于海底的固定式结构。移动式结构包括坐底沉浮式平台（仅用于40m以下水深）、自升式平台和半潜式平台等。由于它们的可移动性，多用于勘探钻井。图0-2为一自升式平台，它一般有3~6根桩腿，桩腿为管柱或桁架结构。甲板与桩腿的上下相对位置可通过传动装置进行调节。平台就位后，沉垫坐于海底，或桩腿插入海床，甲板升起至水面以上；平台需移位时，甲板降至海面，沉垫或桩腿自土中拔出，桩腿大部分升至甲板以上，由拖轮拖至新的井位，这类平台的工作水深可达90m。图0-3为一半潜式平台，它在水面以上的甲板通过水线面积较小的立柱支承在水下浮箱上，而浮箱位于波浪作用强烈的表层区以下，因而平台在波浪中比一般水面船只更易于保持平稳。半潜式平台一般通过以放射状布置的8~10根系泊缆（链）系泊于井位。平台相对于井口的瞬时精确定位，或通过计算机自动调节各系统的张力，或采用可实现动力定位的变向推进器，可保证在平台运动中的钻井作业。

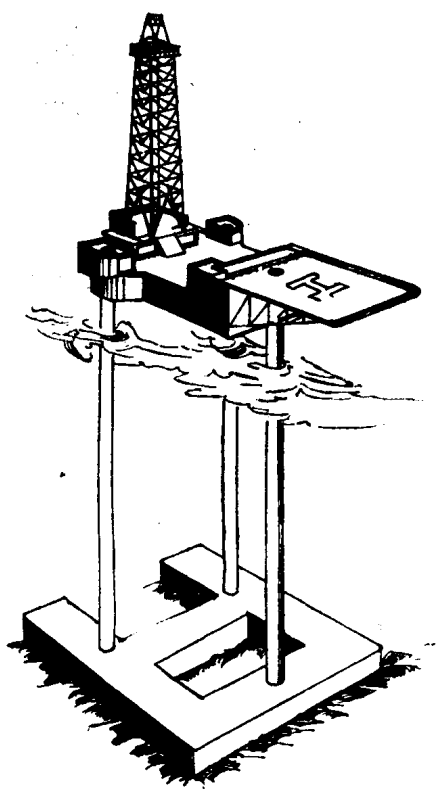


图 0-2

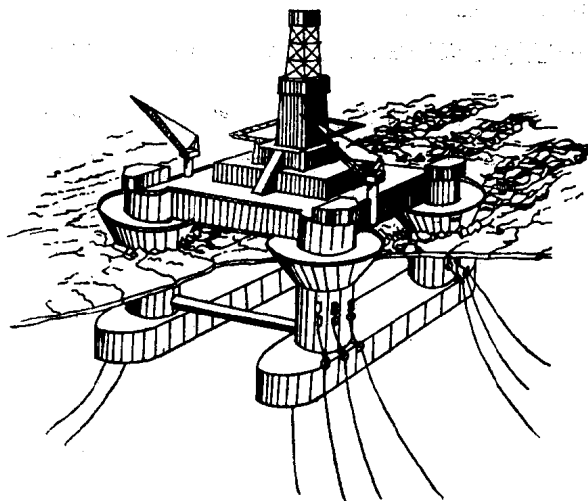


图 0-3

近海油、气的采集主要使用固定式平台。最常用的固定式平台是导管架式平台（图0-4）。导管架式平台为一空间刚架结构，并通过在其管状腿柱中打桩固定于海底。目前世界各地共有约2000多座导管架式平台，上述位于墨西哥湾的COGNAC导管架式平台，其桩打入土中150m，平台用钢量达59000t。重力式平台（图0-5）不用桩而是通过基础沉箱直接放置于海底，依靠其自身巨大的重量维持稳定。沉箱一般还兼用于贮存原油。通常有2~4根立柱由沉箱通至甲板。沉箱和立柱均为钢筋混凝土结构，甲板结构则为钢质的。目前这类混凝土重力

式平台主要用于欧洲北海。上面提到的位于挪威西部近海的STATFJORD平台在273m水深工作，共有42口油井，能容纳200人在平台上工作和生活。

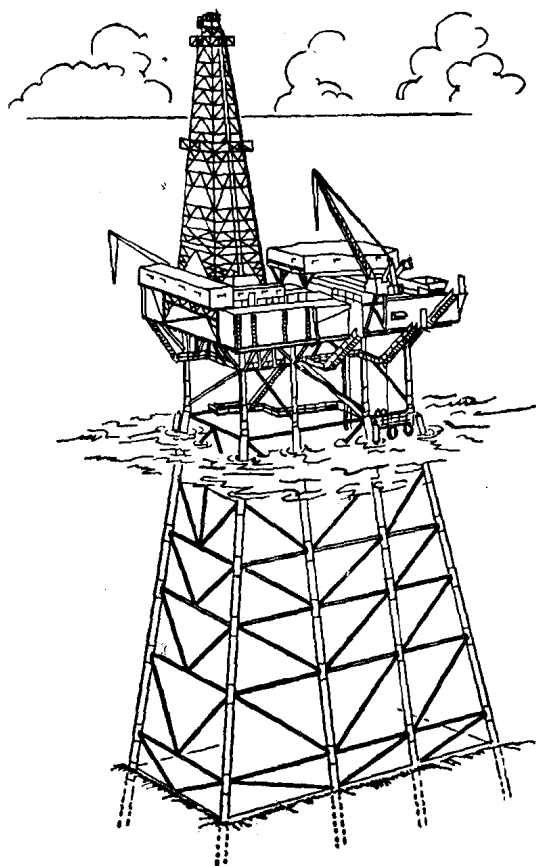


图 0-4

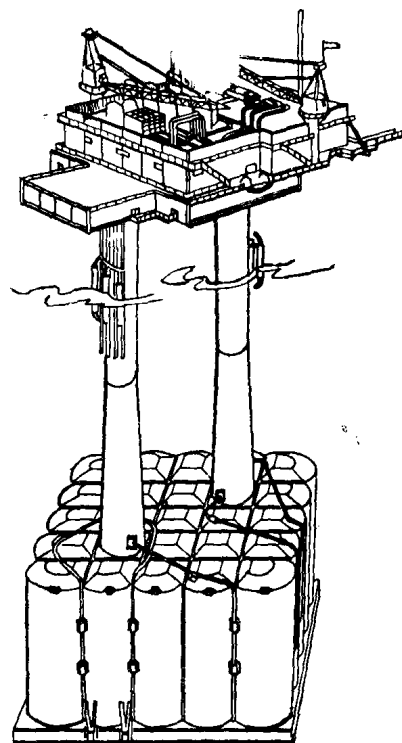


图 0-5

顺应式平台是近年发展起来的用于深水油气生产的一类新的平台型式，它通过柔度较大的部件固定于海底，平台可产生偏离其平衡位置的较大的刚体位移，从而显著降低结构的内力。其主要的两种型式是牵索塔式平台和张力腿式平台。牵索塔式平台（图0-6）底部支承在桩基上，平台可随波浪产生水平方向的振荡，并通过若干条在平面上呈放射状布置的牵索提供必要的水平刚度。80年代初安设在墨西哥湾300m水深处的第一座牵索塔式平台，采用在平面呈对称布置的20根牵索，牵索的上端在水面以下24m处，联接在中央框架结构的塔柱上，每根牵索的伸展长度约750m，其下端与一组置放于海底的配重块相连，重块的远端为一地锚。当塔柱的振荡运动较大时，配重块自海底被提起，从而可提高高负载时系统的水平刚度。第一座张力腿式平台（图0-7）在80年代中期安设在苏格兰近海，它通过在平台四角设置的多根垂直高张力钢缆保持平台同井口之间的相对位置。钢缆张力由预加的平台浮体的浮力造成。

随着海上油田离岸距离的增大，有时采用海中储油—装油系统比铺设长距离输油（气）管线在经济上更合理。常用的深水储油—装油系统是单点系泊（SBM）系统（图0-8）。单点系泊系统还可用来组成油田早期生产系统或边际油田的生产系统，使系统具有较大的机动性。在位于马来西亚近海的Tembungo油田建成一座使用储油船和转运船的单锚腿系泊

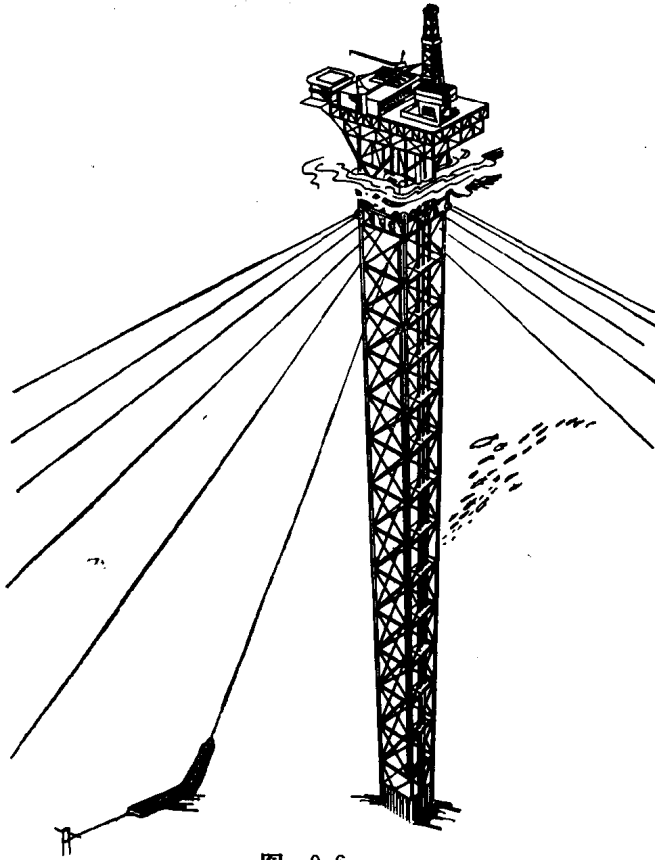


图 0-6

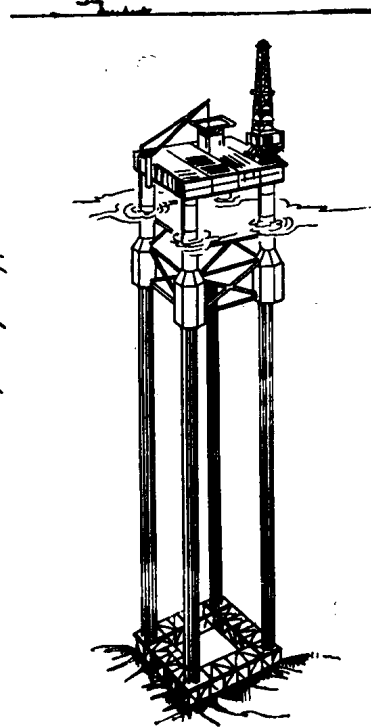


图 0-7

(SALM) 系统 (图0-8)，能使油田连续生产。在美国西部近海 Santa Barbara 运河口外安放的一个输油终端，采用刚性系泊臂 (图0-9) 代替储油船的首缆，既可减小储油船的垂

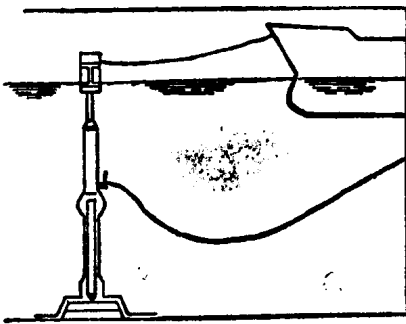


图 0-8

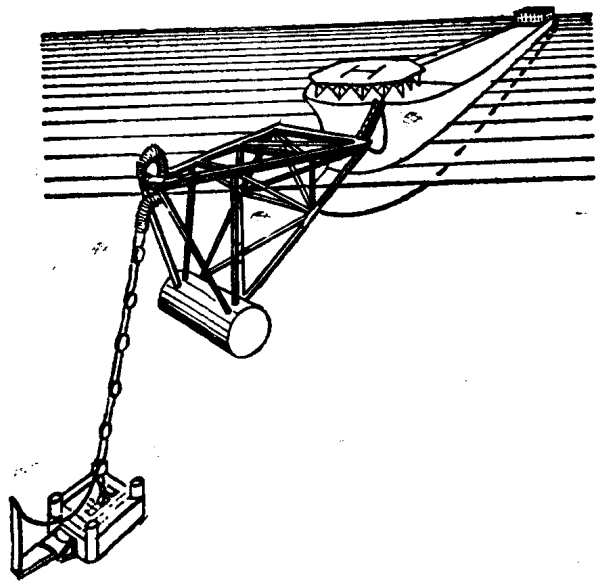


图 0-9

摇运动，还可避免使用浮式输油管和系泊缆，后者需要经常更换。

近海工程结构研究的目的是为发展在海洋环境中工作的工程结构物的设计和建造技术，以实现安全、经济和高效能的要求。近海工程结构的设计是一个跨学科的技术课题，它综合应用气象、海洋、地质、建筑工程、船舶工程、工程材料、石油工艺以及土—流体—结构的综合力学分析等多方面的知识和技术。近海工程结构的环境载荷主要来自风、波、流、冰及地震，这些环境载荷对近海工程结构物的作用和二者之间的相互作用，具有明显的动力性质、随机性质和非线性性质。为了进行海洋环境载荷及结构响应机理的研究，应当采用理论研究同实验研究（包括室内模型实验和现场原型测试）相结合的方法。在墨西哥湾20m水深处曾建立了配置有各种传感器和数据采集系统的海洋环境载荷及结构响应的原型测试结构。最近在我国渤海辽东湾北部15m水深处设立了现场测定冰压力及结构响应的测冰导管架，并已进行了连续三年的成功观测。这种原型测试同在可控条件下进行的小尺度模型实验相结合，对于不断改进海洋环境载荷及其结构响应的数学模型是十分重要的。

第一章 结构动力特性和响应的计算方法

§ 1-1 前 言

结构系统经离散后, 其运动方程为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (1-1)$$

其中, $\{F(t)\}$ 表示激振力, 一般情况下, 它是随时间变化的已知函数。于是可在初始条件下求出方程 (1-1) 的解 $\{u\}$, 即结构的动力响应问题。若 $\{F(t)\} = \{0\}$, 结构在非零初始条件下, 方程 (1-1) 有非零解, 这时结构处于自由振动状态。由于没有外荷作用, 方程 (1-1) 的解反映了结构系统本身的固有特性, 这就是频率和模态 (或振型)。求解频率和振型的问题, 称为结构动力学的特征值问题。结构的频率和振型一般又称为特征对, 或模态对。结构的模态, 在工程实际应用上以及在求解动力响应方面, 在结构动力分析中, 都有很重要的意义和地位。

一般来说, 研究结构的固有特性时, 不计阻尼作用, 于是方程 (1-1) 变为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (1-2)$$

设结构作微幅简谐振动, 则有

$$\{u\} = \{\phi\} e^{i(\omega_n t + \theta)} \quad (1-3)$$

式中 ω_n ——圆频率;

θ ——初相角;

$\{\phi\}$ ——不随时间而变的系统位形。

把式 (1-3) 代入式 (1-2) 并消去 $e^{i(\omega_n t + \theta)}$ 后, 得

$$([K] - \omega_n^2 [M])\{\phi\} = \{0\} \quad (1-4a)$$

或写成

$$[K]\{\phi\} = \lambda_n [M]\{\phi\} \quad (1-4b)$$

其中, $\lambda_n = \omega_n^2$ 。求解方程 (1-4) 的问题称为广义特征值问题。其核心就是求解满足 (1-4) 式的 λ_n 和非零解 $\{\phi\}$ 。显然, 特征对 $(\lambda_n, \{\phi\})$ 决定于结构的刚度矩阵 $[K]$ 和质量矩阵 $[M]$, 因此特征对 $(\lambda_n, \{\phi\})$ 是结构的固有特征。

方程 (1-1) 是一个常系数二阶线性常微分方程组, 对于它的求解原则上并无困难。但当 $[M]$, $[C]$ 和 $[K]$ 的阶数很高时, 求解工作要花费很大的代价, 这就促使人们寻求效率高而又有足够精度的近似计算方法。目前用于求解式 (1-1) 的方法可分为两大类:

一是坐标变换法。这种方法是应用前 P 阶主模态作为 *Ritz* 基, 以 $N \times P$ 阶的模态矩阵作为变换矩阵, 首先对运动方程 (1-1) 进行坐标变换, 即把原来的物理坐标变换到模态坐标上。通过变换一方面实现降阶, 同时还可解除耦联, 这样既能求得较好的近似解, 又可简化计算。这也就是普遍使用的模态 (振型) 迭加法。

二是直接积分法。这种方法是方程 (1-1) 化为各离散时刻的方程。然后, 将该时刻的速

度和加速度用相邻时刻的位移线性组合表达。这样，方程(1-1)就化为以该时刻位移为未知的线性方程组，从而可求出在一系列离散时刻上的响应值。此法又称为逐步积分法。本章后面，将介绍其中的中心差分法、Houbolt法、Wilson- θ 法和Newmark法。

§ 1-2 特征对的性质

对于具有 N 个自由度的系统，在广义特征值问题中，由方程(1-4)可得到 N 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 以及相应的特征矢量 $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_N\}$ 。特征值可能有重根，但它们对应不同的特征矢量，即不同的特征矢量可对应相同的特征值。对于约束不足，即具有刚体位移的结构物，如轮船、飞机等将出现零特征值。第 i 个特征值和相应的特征矢量合称为第 i 阶特征对或模态对，它们满足方程

$$[K]\{\phi_i\} = \lambda_i[M]\{\phi_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1-5)$$

对于结构的 p 个特征对，可统一写成

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Lambda] \quad (1-6)$$

式中

$$[\Phi] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p] \quad (1-7a)$$

$$[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1-7b)$$

可以证明，特征对有如下特性：

(1) 若 $\{\phi_i\}$ 是特征矢量，则 $a\{\phi_i\}$ 也是对应于同一特征值的特征矢量。所以，特征矢量只是定义在 N 维空间中的方向。

当 $[M]$ 为正定时，对于第 i 阶特征矢量 $\{\bar{\phi}_i\}$ ，有

$$\{\bar{\phi}_i\}^T [M] \{\bar{\phi}_i\} = m_{ii} > 0 \quad (1-8)$$

于是，设

$$\{\phi_i\} = \frac{1}{\sqrt{m_{ii}}} \{\bar{\phi}_i\} \quad (1-9)$$

则

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1 \quad (1-10)$$

式(1-9)的过程称为模态关于质量阵 $[M]$ 的归一化。满足式(1-10)的模态 $\{\phi_i\}$ 称为归一化主模态，经过归一化的主模态是唯一的。在以后的讨论中，我们认为 $\{\phi_i\}$ 是归一化的主模态。

(2) 若 $i \neq j$ ，可以证明

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = 0$$

联系到式(1-8)，对于任意的 i, j 可写出

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = \delta_{ij} \quad (1-11)$$

式中 δ_{ij} 是Kronecker符号，即当 $i = j$ 时， $\delta_{ij} = 1$ ； $i \neq j$ 时， $\delta_{ij} = 0$ 。如将式(1-5)前乘以 $\{\phi_i\}^T$ ，并利用式(1-11)的条件，可得

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = \lambda_j \delta_{ij} \quad (1-12)$$

式(1-11)和式(1-12)表明的关系称为主模态关于质量阵 $[M]$ 和刚度阵 $[K]$ 的正交性。对于式(1-6)建立的 p 个特征对，考虑到式(1-11)和式(1-12)的关系，可写出

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = [A] \quad (1-13)$$

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [I] \quad (1-14)$$

式中 $[A] = \text{diag}(\lambda_i)$;
 $[I]$ ——单位矩阵。

(3) 定义

$$R([X]) = \frac{\{X\}^T[K]\{X\}}{\{X\}^T[M]\{X\}} \quad (1-15)$$

为Rayleigh商。 $\{X\}$ 为 N 维空间中的任一非零矢量。显然,当 $\{X\} = \{\phi_i\}$ 时,则有

$$R(\{\phi_i\}) = \lambda_i = \frac{\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}} \quad (1-16)$$

可以证明,对于任何 $\{X\}$,有

$$\lambda_{\min} \leq R(\{X\}) \leq \lambda_{\max} \quad (1-17)$$

(4) 式(1-5)的两端分别减去 $\mu[M]\{\phi_i\}$,则特征值问题化为

$$([K] - \mu[M])\{\phi_i\} = (\lambda_i - \mu)[M]\{\phi_i\}$$

或简写为

$$[\bar{K}]\{\phi_i\} = \lambda_i'[M]\{\phi_i\} \quad (1-18)$$

式中 $[\bar{K}] = [K] - \mu[M]$ 。

显然,方程(1-5)和(1-18)有相同的特征矢量 $\{\phi_i\}$,特征值 $\lambda_i = \mu + \lambda_i'$ 与 λ_i' 相差一个 μ 值。这种全部特征值移动一个距离 μ 的方法,称为移轴, μ 为移轴量。由线性代数理论可知,将 $[\bar{K}]$ 作 $[L][D][L]^T$ 三角分解,对角阵 $[D]$ 中负元素的个数等于比 μ 小的特征值的个数。比如, $\lambda_i < \mu < \lambda_{i+1}$,则 $[D]$ 中的负元素的个数为 i 个。这就是特征值问题的 Sturm 序列特性。

§ 1-3 特征对的计算

一、矢量迭代法

矢量迭代法又称幂法。最基本的矢量迭代法只能求出最大的特征对 $(\lambda_N, \{\phi_N\})$ 或最小的特征对 $(\lambda_1, \{\phi_1\})$,其方法分别称为矢量正迭代法和矢量逆迭代法。由于在实际问题中,通常只要求出前若干阶的低阶特征对,因此,这里只讨论广义特征值问题的矢量逆迭代法。为了讨论问题方便,首先说明矩阵的三角分解问题。

1. 矩阵的三角分解

由线性代数理论可知,设有正定矩阵 $[K]$,它的各阶主子式不为零,则可以对 $[K]$ 进行三角分解,使

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (1-19)$$

其中

$$[D] = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N \end{pmatrix}$$

令 $[U] = [L]^T$,则

$$[U] = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \cdots u_{1N} \\ & 1 & u_{23} \cdots u_{2N} \\ & & 1 \cdots u_{3N} \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

把以上三式代入式 (1-19) 中, 容易得出

$$d_1 = k_{11} \text{ 和 } u_{1j} = k_{1j}/d_1, \quad j = 2, 3, \dots, N$$

$$\left. \begin{aligned} d_i &= k_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k u_{ki}^2 \\ k_{ij} &- \sum_{k=1}^{i-1} d_k u_{ki} u_{kj} \\ u_{ij} &= \frac{k_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k u_{ki} u_{kj}}{d_i}, \quad j = 2, \dots, N \end{aligned} \right\} i = 2, \dots, N$$

求解线性方程组时, 如果把系数矩阵进行三角分解, 求解工作就方便多了。设

$$[K]\{x\} = \{b\}$$

把矩阵 $[K]$ 进行三角分解后变为

$$[L][D][L]^T\{x\} = \{b\}$$

如令

$$[D][L]^T\{x\} = \{y\}$$

则方程组可以写成

$$[L]\{y\} = \{b\}$$

由于 $[L] = [U]^T$ 是下三角矩阵, 容易得出

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} y_k, \quad i = 2, 3, \dots, N$$

把 $\{y\}$ 代入 $[D][L]^T\{x\} = \{y\}$ 中, 可得

$$x_N = y_N/d_N$$

$$x_i = \frac{y_i}{d_i} - \sum_{k=i+1}^N u_{ik} x_k \quad (i = N-1, \dots, 2, 1)$$

2. 矢量迭代法

已知

$$[K]\{\phi_i\} = \lambda_i[M]\{\phi_i\} \quad (1-20)$$

如令

$$\{\psi_i\} = \frac{1}{\lambda_i} \{\phi_i\}$$

则式 (1-20) 可以写成

$$[K]\{\psi_i\} = [M]\{\phi_i\}$$

假定 $[K]$ 是正定的, 而 $[M]$ 可以是正定的或半正定的对角矩阵或带形矩阵。若任意选取初始矢量 $\{\psi_1\}$, 按迭代格式

$$\{\psi_{k+1}\} = [K]^{-1}[M]\{\psi_k\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$