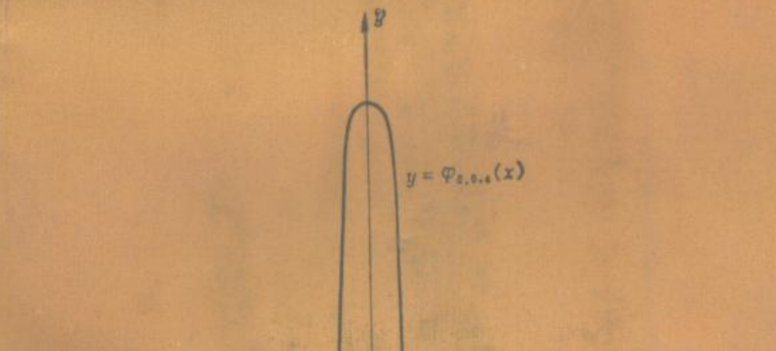
'91国优教材

概率论及数理统计

（第三版）

王福保　等编著



同济大学出版社

概率论及数理统计

（第三版）

王福保等　编著

同济大学出版社

(沪)新登字(204)号

内容提要

本书分概率论、数理统计、特征函数及随机变数的收敛三个部分。

第一部分为概率论，阐明了概率论方面的基本知识，突出了随机变数的分布，以便读者正确理解概率论中最主要的概念——随机变数取值的概率性规律。第二部分为数理统计，对于数理统计学中最主要的内容作了确切扼要的论述。特别对某些很有用处、但一般教材中不常列出的内容(如容许域、偏峰态检验、一元线性正态回归分析中的判别及控制等)也作了介绍。第三部分为特征函数及关于随机变数的收敛，是为要求较高的专业及读者而写的。

本书中列举了不少例题以帮助读者理解并应用概率统计的理论及方法。每章末都附有相当数量的习题，书末有全部习题答案。

第三版是在第二版基础上经过大量修改并增补了一些内容而写成的。

本书可作为概率论数理统计课程的教材或教学参考书，也可供具有高等数学及少量线性代数知识的广大科技工作者参考使用。

本书(第1版)曾获国家教育委员会优秀教材奖。

责任编辑　李炳钊
封面设计　王肖生

概率论及数理统计
王福保等　编著
同济大学出版社出版
(上海四平路1239号)
新华书店上海发行所发行
常熟市印刷二厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 17.875　字数 456 千字
1994 年10月第3版　1994 年10月第1次印刷
印数 18000-23000 定价12.50元
ISBN 7-5608-1376-3/O·124

第一版前言

近几十年来，随着生产力的飞跃发展，不论在自然科学领域中还是在社会科学领域中，传统的肯定性数学模型已经不能合乎要求地解决所遇到的各种类型的理论问题及应用问题，因而有必要引进随机性数学模型．在此过程中，随机性数学的各个分支的发展异常迅速，高等院校的学生及广大科技工作者迫切要求掌握这方面的知识．撰写本书的目的就是为解决这一问题创造条件．

本书在高等数学及少量线性代数知识的基础上，为读者提供了一本学习随机数学中最基本的部分（概率论）及应用最为广泛的部分（数理统计）的教材．除选取了一般公认为必不可少的内容外，还列入了一些一般初等教材中不常见的内容，例如，容许域、偏峰态检验、一元正态回归中的判别及控制等．特别根据作者长期从事教学工作的体会，对于一些最基本的概念作了尽可能确切的阐述，希望这样做能使读者不致由于对这方面的理解不深入而影响到在解决实际问题时正确使用随机性数学模型，并能为进一步学习随机数学打下扎实的基础．

为了便于学习，本书列入了较多的例题，并附有相当数量的习题及全部习题答案．

本书的手稿已在教学中使用过多次，并在听取了有关各方面的意见后进行了反复修改，但是，由于作者水平有限，不足之处在所难免，衷心希望读者提出宝贵意见．

本书在出版过程中，承茆诗松、吕乃刚两位老师审阅，并承何迎晖硕士参加整理、校对，谨致谢忱．

王福保　闵华玲　叶润修

1984.5.

第二版前言

第一版出版后曾收到、听到许多读者的热情意见和建议，现结合本人教学工作的体会对本书作了下列三方面的改动：(1)对若干内容及表达方式进行了修改．(2)对印刷差错作了校正．(3)增加了关于特征函数与关于随机变数序列的收敛及极限两章．这两章是为部分要求较高的专业及读者而写的．对于这两章也配置了习题并提供了习题答案．为了避免更动原书系统，把这两章列成第三部分供选用．

如同以前一样，依然竭诚地希望读者对本书提出批评建议．末了，深切感谢同济大学出版社为本书改版作出的努力．

王福保

1987.7.

第三版 前 言

这一版是在第二版基础上经过修改、补充而写成的．除新增加了一些内容外，主要结合读者的意见及编著者的教学实践，对教与学两方面容易产生困难及疑问的许多部分普遍进行了改写．改写及增补部分约占了本书的一半．希望这样做了以后能给读者带来方便．

仍旧欢迎读者对本书提出意见及建议，帮助继续改进．

王福保 闵华玲
叶润修 庄勇荣
1993.6.

目　录

第一部分　概　率　论

第二部分　数理统计

第三部分　特征函数　随机变数的收敛

第一部分

概　率　论

概率论是数学的一个分支，它着重研究随机现象规律性的基本理论．随着科学技术的不断发展，在各门学科中，随机现象的研究已经日益感到必要．因此，概率论几乎已经成为科学技术工作者所必须具备的一种工具．在这部分内，将阐明概率论中的一些最基本的内容．为了便于学习，将先介绍一些排列、组合及集合的知识．

第一章　预备知识

第一节　排　　列

先介绍一条**乘法原理**：如果一个过程可以分成两个阶段进行，第一个阶段有 m 种不同的做法，第二个阶段有 n 种不同的做法，且，第一个阶段的任一种做法都可以与第二个阶段的任一种做法配成整个过程的一种做法．那么，整个过程有 $m\times n$ 种不同的做法．在排列、组合问题中将反复使用这乘法原理．这原理还可以推广到多于两个阶段的情形．如果一个过程可以分成 r 个阶段进行，第 s 个阶段有 n_s 种不同的做法，且，各阶段各任取一种做法都可以配成整个过程的一种做法，那么，整个过程有 $\prod\limits_{s=1}^{r} n_s$ 种不同的做法．

从 n 个不同的元素中，任意取出 r 个不同的元素($0\leqslant r\leqslant n$)，

按照任意的顺序排成一列．把这样一列叫做从n个不同元素中取r个不同元素组成的一种**排列**．现在来考虑所有这样的排列的种数．通常用P_n^r表示这个种数．

先设$0<r<n$．每一种排列由在r个有次序的位置上各放上这n个元素中的一个元素所组成，并且要求各个位置上放的元素不重复．放在第一个位置上的元素有n种不同的取法；在它取定后，由于不准重复，所以，放在第二个位置上的元素只有$n-1$种不同的取法；前两个位置上的元素取定后，由于不准重复，所以，放在第三个位置上的元素只有$n-2$种不同的取法；依次类推，前$r-1$个位置上的元素取定后，由于不准重复，所以，放在第r个位置上的元素只有$n-r+1$种不同的取法．按照上面讲过的乘法原理，所求的排列种数为

$$P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

如果使用惯用的记号$p!=1\times2\times3\times\cdots\times p$(读作"$p$阶乘")，那么，上式可改写成

$$\begin{aligned}P_n^r&=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r+1)\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}.\end{aligned}$$

当$r=n$时，所求的排列种数为$n!$．如果规定$0!=1$，那么，上述表达式对于$r=n$仍旧成立．又，如果规定从n个不同的元素中任取0个不同元素进行排列时的排列种数为1，那么，上述表达式对于$r=0$也成立．因此，当$0\leqslant r\leqslant n$时，上述排列问题的答案总可以表达成$\frac{n!}{(n-r)!}$．

【例1】 计算从八个不同的元素中任取三个不同的元素进行排列时的排列种数．

解：所求的排列种数为

$$P_8^3=8\times7\times6=336.$$

【例2】 从1,2,3,4,5,6,7这七个数中任取三个不同的数组成的三位数中有几个是偶数．

解：所得的三位数是偶数即它的个位上应该是 2,4,6 中的一个．因此，放在个位上的数有三种不同取法．放在个位上的数取定后，放在十位上的数有六种不同取法．放在个位、十位上的数取定后，放在百位上的数有五种不同取法，从而，所求的个数为

$$3\times6\times5=90.$$

注意：在上述排列问题中，参加排列的元素是不允许重复的．但是，有时候需要考虑允许重复的情况．例如，电话号码中就允许各位上的数字重复．通常称这种情况下的排列为**重复排列**．下面来求出从 n 个不同元素中(允许重复地)取 r 个组成的重复排列的种数．从这 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，然后把这个元素放回去，再从这 n 个元素中任取一个放在第二个位置上，然后再把这个元素放回去．按这种做法进行 r 次．按乘法原理，得到从 n 个不同的元素中(允许重复地)取 r 个组成的重复排列的种数为

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{ 个}}=n^r.$$

【例 3】 用 0,1,2,…,9 这十个数字可以组成多少个不同的三位数．(在组成的三位数中各个位置上的数字可以重复．)

解：注意到百位上不能放 0，又，各个位置上的数字可以重复，便得到所求的个数为 $9\times10\times10=900$.

【例 4】 ［例 3］内这些三位数中，

(1) 没有重复数字的有几个？

(2) 三个数字都相同的有几个？

(3) 恰好有两个数字相同的有几个？

解：(1) 百位上的数字有九种不同的取法．在百位上的数字取定后，由于不准重复，这个数字在选十位上放的数字时不能再用，但 0 可以添入供选用，所以，十位上的数字有九种不同的取法．在百位、十位上的数字取定后，由于不准重复(如果在十位上没有用到 0 的话，0 当然仍可以选用)，所以，个位上的数字有八种取法．因此，所要的个数为 $9\times9\times8=648$.

(2) 由于百位上的数字有九种不同的取法，且，按三个数字都相同的要求，百位上的数字取定后，十位、个位上的数字随之而定. 因此，所要的个数为 9.

(3) 只有百位上的数字与十位上的数字相同的三位数的个数为 9×9；只有十位上的数字与个位上的数字相同的三位数的个数为 9×9；只有百位上的数字与个位上的数字相同的三位数的个数为 9×9. 因此，恰好有两个数字相同的三位数的个数为 $9\times9+9\times9+9\times9=243$.

第二节　组　　合

从 n 个不同的元素中任取 r 个不同的 $(0<r\leqslant n)$ 构成一组. 这里，不考虑这 r 个元素的次序. 问有多少种取法？这就是**组合问题**. 称每个这样的组为一个**组合**.

组合问题与排列问题的不同之处在于：在排列问题中要考虑取得的诸元素的前后次序，而在组合问题中不考虑这种次序.

第一节中已经算得：从 n 个不同的元素中任取 r 个不同的元素 $(0<r\leqslant n)$ 组成的排列种数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$. 按组合问题中的要求，由取定的 r 个不同的元素组成的各种排列只能算是同一个组合，又，把 r 个不同的元素进行排列的种数为 $r!$. 因此，上述 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种排列中每 $r!$ 种只是一种组合. 从而，上述组合问题的答案是

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

如果规定从 n 个不同的元素中任取 0 个的组合种数为 1，那么，上述表达式对于 $r=0$ 也成立. 这里，注意到：已经规定过 $0!=1$. 上述组合问题的答案是一个正整数. 通常把它记作 $\binom{n}{r}$ 或 C_n^r. 即，

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

按 $\binom{n}{r}$ 的这个表达式立即看出：

$$\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}.$$

当r接近n时，利用这个等式，可以把$\binom{n}{r}$化成$\binom{n}{n-r}$来计算.

【例 1】 有五本不同的数学书、八本不同的物理书，从中任取两本不同的数学书、四本不同的物理书. 问有多少种不同的取法.

解： 从五本不同的数学书中任取两本不同的，有$\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{1\times2}=10$种不同的取法. 从八本不同的物理书中任取四本不同的，有$\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}=70$种不同的取法.因此，按乘法原理，所求的取法种数为$\binom{5}{2}\binom{8}{4}=10\times70=700$.

【例 2】 从n个不同的元素中任取k_1个不同的元素组成第一组. 再从留下的$n-k_1$个不同的元素中任取k_2个不同的元素组成第二组. 依此做下去，直到得到由k_r个不同的元素组成的第r组为止. 问有多少种不同的取法. 这里，$k_1, k_2, \cdots, k_r$都是非负整数且$k_1+\cdots+k_r\leqslant n$.

注意： 这里，每个组内的元素不论次序，但各个组是论次序的.

解： 第一组有$\binom{n}{k_1}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$种不同的取法. 第一组取定后，第二组有$\binom{n-k_1}{k_2}=\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$种不同的取法. $\cdots$. 第r组有$\binom{n-k_1\cdots-k_{r-1}}{k_r}=\frac{(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}{k_r!(n-k_1-\cdots-k_r)!}$种不同的取法. 按乘法原理，所求的种数为

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r}$$

$$=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)}\times\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\times\cdots$$

$$\times\frac{(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}{k_r!(n-k_1-\cdots-k_r)!}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!(n-k_1\cdots-k_r)!}.$$

第三节 集 合

数学中经常会用到由某些特定的事物组成的**集体**. 称这种集体为**集合**,简称为**集**. 本书中,常用大写英文字母来表示集合. 称组成集合的各个事物为这集合的**元素**. 如果集合 A 是由元素 e_1, e_2, …等组成的,那么,记作

$$A=\{e_1, e_2, \cdots\}.$$

如果 e 是集合 A 的一个元素,那么,记作

$$e\in A.$$

读作"e 属于 A". 如果 e 不是集合 A 的元素,那么,记作

$$e\notin A,$$

读作"e 不属于 A". 有的作者把它记作"$e\overline{\in} A$".

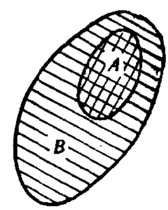


图 1-1

如果属于集合 A 的任一个元素都属于集合 B,那么,称 **A 是 B 的一个子集**,或者说,**B 含有 A**,也可以说,**A 含在 B 内**,记作:$A\subset B$(或 $B\supset A$)(图 1-1). 例如,全体偶数组成的集合是全体整数组成的集合的一个子集;区间(1,2)是区间(1,4)的一个子集. 显然,当 $A\subset B$ 且 $B\subset C$ 时,$A\subset C$.

为了讨论问题方便,习惯上,把不含任何元素的"集体"也作为一个集合. 称它为**空集**. 本书上把它记作 V. 有的作者把它记作 $\varnothing$. 又,把空集作为任一个集合 A 的子集,即,**对于任一个集合 A, $V\subset A$.**

注意区分"$\in$"与"$\subset$"的含义. 前者表示一个元素属于一个集合,后者表示两个集合之间的一种关系.

如果,对于两个集合 A、B, $A\subset B$ 及 $B\subset A$ 都成立,那么,称 **A、B 相等**,记作:$A=B$. 如果两个集合 A、B 之间没有上述关系,那么,称 **A、B 不相等**,记作:$A\neq B$. 显然,**$A=B$ 等价于 $B=A$**,又,当 **$A=B$ 且 $B=C$ 时,$A=C$**. 如果 A 是 B 的一个子集且 $A\neq B$,那么,称 **A 是 B 的一个真子集**.