

耦合模和参量电子学

W. H. 卢瑟 著

苏 禾 译

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书首先介紹耦合模理論,并且說明如何利用这种理論来簡化耦合系統的研究。从这个共同的观点,继而提出行波管、返波管和类似微波器件的統一理論。最后,經過同一个基本方法,处理了参量放大器、振荡器、变频器的理論。

本书可供参量电子学和微波技术等領域中的工程技术和研究人員的参考;也可供教学上的参考。

COUPLED MODE AND PARAMETRIC ELECTRONICS

William H. Louisell

John Wiley & Sons, Inc. 1960

耦合模和参量电子学

苏 禾 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷三厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本850×1168 1/32 印張8 16/32 排版字数207,000

1964年3月第1版 1964年3月第1次印刷 印数1—5,000

統一书号 15119·50 定价(十四) 1.45 元

目 录

前言

序

第1章 耦合模理論	1
第一部分 振動模式的耦合	3
1.1 簡單綫性振蕩器	3
1.2 两个耦合的綫性振蕩器	7
1.2.1 运动方程組的耦合模形式	8
1.2.2 耦合系統的簡正模頻率	9
1.2.3 能量守恒	10
1.3 两个弱耦合振蕩器	10
1.4 耦合模理論的直接分析方法	12
1.4.1 耦合模近似	12
1.4.2 边界条件; 轉移因子的定义	13
1.5 耦合模理論的普遍分析方法	15
1.5.1 普遍方程組	15
1.5.2 能量守恒	16
1.5.3 耦合系数的計算	17
第二部分 傳播模式的耦合	19
1.6 单个均匀傳輸綫	19
1.6.1 傳輸綫方程組	21
1.6.2 簡正模形式	21
1.6.3 相速和群速	23
1.6.4 边界条件; 无損耗綫上的功率流	24
1.7 两个无損耗傳播模式的耦合的普遍分析方法	26
1.7.1 方程組的耦合模形式	26
1.7.2 功率守恒	26
1.7.3 簡正模傳播常数	27
1.8 定向耦合器; 有源和无源模式耦合	27

1.8.1 同向耦合器; 无源模式耦合	28
1.8.2 反向耦合器; 有源模式耦合	31
1.9 总结	33
参考文献	34
第2章 电子注上的若干简正模	36
2.1 电子注上传播模式的基本方程组	36
2.2 小信号近似	37
2.3 小信号坡印廷定理	39
2.4 漂移区域中一维电子注上的空间电荷波	40
2.4.1 简化假定	40
2.4.2 空间电荷波方程组	42
2.4.3 简正模形式	42
2.4.4 波的电-机械性质	45
2.4.5 空间电荷波中的动功率流	46
2.4.6 模式激发	49
2.5 漂移区域中有限柱形电子注中的空间电荷波	49
2.6 快和慢回旋简正模	53
2.6.1 简化假定	53
2.6.2 回旋波方程组(简正模形式)	54
2.6.3 模式的特性	56
2.6.4 评注	62
2.7 同步简正模	62
2.8 评注	66
参考文献	68
第3章 空间电荷波耦合到慢波电路	70
3.1 模型	70
3.1.1 作为慢波电路的螺旋线	70
3.1.2 电子注耦合到电路	73
3.1.3 电子注-电路方程组的耦合模形式	75
3.2 朱兰成功功率定理	77
3.3 行波管	78
3.3.1 前向电路模式和慢空间电荷模式的耦合	78
3.3.2 普遍的行波管情况	82
3.4 Kompfner 下沉(定向耦合器)	84
3.4.1 前向电路模式和快空间电荷模式的耦合	84
3.4.2 普遍情形, 小 QC 值	86

3.5 返波放大管和振荡管	87
3.6 評注	93
参考文献	94
第4章 集总电路的参量耦合原理	96
4.1 能量轉換的机理	97
4.2 簡并参量振荡器的直接的耦合模分析方法	98
4.2.1 弱耦合近似	100
4.2.2 起始条件	102
4.2.3 能量考虑; Manley-Rowe 关系式	104
4.3 非簡并参量耦合元件的普遍耦合模分析法	105
4.3.1 普遍方程組	105
4.3.2 Manley-Rowe 关系式的推論	106
4.3.3 互耦合系数的計算	107
4.3.4 起始条件	108
4.3.5 相对于电荷的“注入”相位	108
4.4 Manley-Rowe 关系式	109
4.5 三頻率参量放大器; 增益	115
4.6 参量放大器的噪声指数	120
4.7 变频器	124
4.8 評注	125
4.9 参量放大器的簡史	126
参考文献	127
第5章 分布电路的参量耦合原理	131
5.1 分布式参量放大器	132
5.2 分布式变频器	137
5.3 多模耦合的普遍耦合模理論	138
5.3.1 綫性化的時間不变系統	138
5.3.2 具有时变参量的綫性化系統	139
5.4 四頻率行波参量放大器(注入頻率低于信号頻率)	140
5.5 分布式参量放大器的噪声指数	143
5.6 評注	147
参考文献	147
第6章 半导体二极管参量放大器	148
6.1 作为可变电容元件的 $p-n$ 結半导体二极管	149
6.2 半导体二极管放大器增益	153

6.3 半导体二极管的噪声考虑	154
6.4 集总电路的实验结果	160
6.5 分布电路的实验结果	162
6.6 評注	165
参考文献	165
第7章 快空间电荷波参量放大器	167
7.1 快空间电荷波参量放大器	168
7.1.1 方程组的耦合模形式	168
7.1.2 耦合系数; Manley-Rowe 关系式	170
7.1.3 边界条件; 增益閾	170
7.1.4 弱耦合近似的适用性	173
7.1.5 变频器	175
7.2 实验结果	176
7.3 较高空闲频率对增益的影响	179
7.4 評注	186
参考文献	188
第8章 快回旋模式参量放大器	189
8.1 慢波电路耦合到回旋和同步模式	189
8.1.1 耦合模方程组	190
8.1.2 功率定理	192
8.1.3 快回旋波耦合器	193
8.2 用于快回旋波的参量耦合原理	194
8.2.1 注入場	195
8.2.2 注入区域中的运动方程	196
8.2.3 边界条件; 增益	198
8.2.4 Manley-Rowe 关系式	199
8.3 Adler 管的說明; 实验结果	199
8.4 正交場管型	201
参考文献	201
第9章 铁氧体参量放大器	203
9.1 磁化运动方程	204
9.1.1 运动方程组	205
9.1.2 均匀进动模式	207
9.2 参量耦合机理	210
9.3 三种运用方式	212

9.4 电磁运用理論	214
9.4.1 Landau-Lifshitz 方程	214
9.4.2 注入磁化强度	215
9.4.3 参量耦合	217
9.5 实验結果	220
9.6 行波式管型	221
9.7 鉄磁变頻器	223
9.8 結論	225
参考文献	225
附录	227
A. 同軸电纜用作傳輸綫	227
B. 柱形电子注中的空間电荷波	230
C. 寻求簡正模形式的普遍方法	233
D. 同步模式的簡正模形式	235
E. 电子注-电路方程的耦合模形式	236
F. 朱兰成功率定理	237
G. 行波管幕級数解的矩陣表示法	239
H. 互耦合系数的計算	240
I. 損耗对耦合模理論的效应	241
J. 空間电荷互耦合系数的計算	243
K. 电路-回旋波系統的耦合模方程組	249
L. 四极注入場中电子注的运动方程組	253
索引	257

第 1 章

耦合模理論

振蕩和傳播系統中相互耦合的概念對理解和解決很多類型的問題提供了一種極其有用的和普遍的工具。可以引用的一些例子是：耦合的機械振蕩器、耦合電路、固體中的分子振動、聲波、定向耦合器、濾波器和微波放大器（諸如行波管、返波放大器和參量放大器）。本書的目的是，通過將這種概念用於微波電子學中的若干有意義的例子，來講解處理上述問題的一種普通的近似方法。這種近似方法就稱為耦合模方法。

概念上，耦合模的方法是相當簡單的。首先，一個複雜的耦合系統被分成一定數目的孤立部分或單元。然後正確地求解孤立單元的運動方程組，並且將解表示為該單元的“簡正模”。然後假定原來的複雜系統是由互相發生弱耦合的孤立單元所組成的。這種耦合僅使每一單元的運動狀態受到很小的擾動，而原來耦合系統的運動則用這種對孤立單元運動的微擾加以描述[†]。

引用一個例子將有助於說明幾個問題。考慮兩個波導，它們通過公共壁上的一系列小孔而發生弱的耦合。現在要求在這樣一個耦合系統中傳播的波。這個系統首先被分為兩個孤立的或不發生耦合的波導。每一波導正是上段所說的一個單元。這樣就可

† 熟悉量子力學的讀者很容易認識到這種“耦合模方法”是微擾理論的一種特殊情形。然而，這種理論比本書所需要的普遍得多，因而這裡只介紹一種非常簡化的形式。我們沒有意圖使這種理論在數學上嚴格，因為這樣帶來的複雜性對於一本這樣性質的書來說是不適宜的。

找到在每一單元中能够傳播的波。众所周知，如果对頻率不加限制，那么沿每一波导，波都能以无限多的方式傳播。对于向前能傳播的每一个波形，必存在一个相应的波向后傳播。这些波就称为該元件的“簡正模”。它們代表波方程的独立解。为簡單起见，假定在每一波导中仅存在着最低阶的向前和向后波。原来的耦合系統現在就能看成是由四个原来的波組成的，在每一元件中有两个波，通过波导中小孔的微扰作用而发生弱的耦合。耦合将稍微改变原来波的場分布。

显然，如果要从这种方法得到任何实际优点，元件之間的耦合必須是弱的。如果这种近似不成立，耦合系統的解就和未耦合解差別太大，以致这时知道孤立單元的解也属无用。

当單元之間的耦合很弱时，从物理学方面的考虑可以得出这样的結論：孤立單元的若干模式在耦合机理中将不起什么作用。在这种情形下，就可忽略掉这些模式，从而簡化原来的問題。为了說明为什么可以这样作，仍旧考虑两个耦合波导的例子。稍微回忆一下就知道，当單元之間的耦合很弱时，每一波导中向前波之間的耦合，一般比它們和向后波之間的耦合有效得多。因而，在分析中可以忽略向后波，从而使問題大为簡化。将弱耦合系統分成个别單元来考虑的方法，除了使分析簡化外，还能够对耦合机理得到更好的物理理解。

本章只限于研究包含有两个元件的耦合系統。具体說，这里将处理两个耦合单摆和两组耦合傳輸綫。这种限制使我們在說明耦合模方法时，有可能不牵涉过多的复杂数学，虽然这种方法对于更多的耦合單元也是适用的。因为，当仅有两个簡單單元发生耦合时，問題可以正确地解出，这些正确解就可能用来檢驗近似耦合模解的适用性。在以后的章节中，这些近似将用来处理行波管、参量放大器和其他器件，而知道它們的应用范围是很重要的。

可能认为本章的簡單問題并不需要这样麻煩地来討論。然

而,如果将它们放在有关具体器件的章节中讨论,那么在这里对这种简单问题反映出来的很多数学的和物理的特点,就很难说清楚了。因而,作者感到对单摆和传输线作透彻的处理是合理的。

第一部分 振动模式的耦合

1.1 简单线性振荡器

振动模式的耦合理论可以从简单的线性振荡器的研究开始,这种最简单的单元能够用来作为复杂振动系统的基础。本节的目的,是为了以后的分析,将运动方程组表示为一种特别有用的形式。

在经典力学中,运动方程通常写成三种形式^[1]: (1) 牛顿式, (2) 哈密顿式和 (3) 拉格朗日式。在各种问题中,这些形式之一可能比另一种简单。例如,在分析机械结构如桥梁时,就应用牛顿形式。在量子力学中,哈密顿形式是最适宜的,而在量子电动力学中就应用拉格朗日形式。虽然这里对简单线性振荡器介绍所有三种形式,但并不需要预备知识。

还有另一种和哈密顿式密切关联的运动方程组的形式,这种形式称为简正模形式,它在耦合模理论中是非常有用的。现在就来对简单振荡器推导这种形式。

在推导运动方程组的简正模形式时,单摆和简单 LC

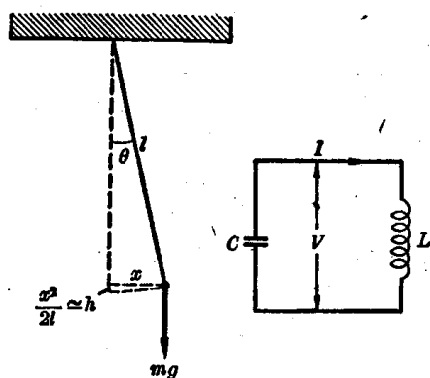


图 1.1 简单振荡器的坐标

电路(图 1.1)将平行地介绍。为方便起见,我们将利用力学的术语;当用于 LC 电路时,其意义也是很明显的。

简单振荡器运动方程組的哈密頓形式可以表示为^[1]

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -m \frac{g}{l} x; & (a) \\ \frac{dx}{dt} &= v; & (b) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{L} V; & (c) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{C} I; & (d) \end{aligned} \right\} (1.1)$$

式中, m 是摆錘的质量; g 是重力加速度; l 是摆长; x 是摆錘的小量位移, 如图 1.1 所示. LC 电路上的符号具有通常的含义.

哈密頓形式包括两个耦合的一阶微分方程. 在方程 (1.1a) 中位移和速度发生耦合, 而在方程 (1.1b) 中速度和位移发生耦合. 前者的耦合系数是 $-g/l$, 后者的耦合系数是 $+1$. 正負符号的区别是重要的. 当符号相反时, 解将是周期性的; 如果符号是相同的, 解就将是增幅的或衰减的指数函数.

振荡器的动能可以表示为 $T(v) = mv^2/2$, 而位能为 $V(x) = mgx^2/2l$. 振荡器的能量将周期性地从位能轉換为动能, 并作相反的轉換. 当摆达到最大位移时, 速度是零, 而所有能量都是位能. 当位移通过零值时, 所有能量都将是动能. 振荡系統的特性是有两种形式的能量可以利用, 并且在这两种形式之間能量将发生周期性的交換. 在 LC 电路中, 电感周圍磁場中存儲的能量是磁能的形式 ($LI^2/2$), 而电容器平板間電場中存儲的是电能 ($CV^2/2$). 因为方程 (1.1c) 和 (1.1d) 中耦合系数的符号是相反的, 所以系統将发生振荡, 其中能量在電場和磁場之間周期地交換着. 哈密頓形式对于描述系統的两个变量之間的耦合, 可以明显地表达出来.

将方程 (1.1b) 代入方程 (1.1a), 就得到这个简单問題的运动方程組的拉格朗日形式. 結果是

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{l} x; & (a) \\ \frac{dx}{dt} &= v; & (b) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{d^2V}{dt^2} &= -\frac{1}{LC} V; & (c) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{C} I. & (d) \end{aligned} \right\} (1.2)$$

方程(1.2a)也就是运动方程组的牛顿形式。当然,它是人们最熟悉的,并且是经常用来分析简单振荡器的运动的。它是一个不包含耦合项的二阶微分方程。其解包含两个任意的积分常数,它们通常是根据起始位移和起始速度来计算的。因而,为了用起始位移和速度来表示任意常数,必须同时利用方程(1.2a)和(1.2b)。

同样,简单振荡器也可以用两个去耦合的一阶微分方程来描述。这就是运动方程组的简正模形式。这是需要的,因为通常求解一阶微分方程组比求解二阶或耦合的一阶方程组要容易一些。推导这种形式的一种方法是找到哈密顿方程组的线性组合,它们将耦合项去掉了。在现在的简单情形下,将方程(1.1b)两边都乘以任意常数 Y , 然后同方程(1.1a)相加,就有

$$\frac{d}{dt}(v + Yx) = Y\left(v - \frac{g}{LY}x\right); \quad \frac{d}{dt}(I + YV) = \frac{Y}{C}\left(I - \frac{C}{LY}V\right). \quad (1.3)$$

现在,如果这样来选择 Y :

$$\text{式中,} \quad \left. \begin{array}{ll} Y = \pm j\omega; & (a) \\ \omega = +\sqrt{\frac{g}{l}}; & (b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y = \pm j\sqrt{\frac{C}{L}} \equiv \pm j\omega C; \quad (c) \\ \omega = +\frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (d) \end{array} \quad (1.4)$$

那么方程(1.3)就可以写成

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt} - j\omega\right)a = 0; \\ \left(\frac{d}{dt} + j\omega\right)a^* = 0; \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

式中,

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}\sqrt{m}(v + j\omega x); \\ a^* = \frac{1}{2}\sqrt{m}(v - j\omega x); \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}\sqrt{L}(I + j\omega CV); \\ a^* = \frac{1}{2}\sqrt{L}(I - j\omega CV). \end{array} \quad (1.6)$$

关于选择归一化常数 $\sqrt{m}/2$ 和 $\sqrt{L}/2$ 的原因, 下面就会看清楚.

方程組 (1.5) 正是我們所要找的两个一阶去耦合方程. 它們称为运动方程組的簡正模形式[†]. 它們同方程組 (1.1) 或 (1.2) 同样描述了振蕩器. $a(t)$ 和 $a^*(t)$ 称为簡正模幅度, 或者就称为振蕩单元的簡正模. 它們是由一个实速度 $v(t)$ 和一个实位移 $x(t)$ 綫性地組成的, 并且可以看成是两个长度固定的朝相反方向旋轉的矢量. 这两个矢量的幅度經归一化后 (在方程 (1.6) 中将常数选择为 $\sqrt{m}/2$ 和 $\sqrt{L}/2$), 使得它們的平方之和代表系統中所存儲的总能量, 即

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{m}{2} [v^2(t) + \omega^2 x^2(t)] \\ &= |a(t)|^2 + |a^*(t)|^2; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} [CV^2(t) + LI^2(t)] \\ &= |a(t)|^2 + |a^*(t)|^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

将方程組 (1.6) 中的 a 和 a^* 直接代入, 就能証实所选择的归一化是正确的. $|a|^2$ 和 $|a^*|^2$ 分別代表在模式 a 和 a^* 中所存儲的能量. 因为 v 和 x 是实数, $|a|^2 = |a^*|^2$, 因而存儲在两个模式中的能量是相等的.

簡正模方程組 (1.5) 的解是

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= a(0) e^{j\omega t} = \frac{1}{2} \sqrt{m} [v(t) + j\omega x(t)]; \\ a^*(t) &= a^*(0) e^{-j\omega t} = \frac{1}{2} \sqrt{m} [v(t) - j\omega x(t)]; \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

式中, $a(0)$ 和 $a^*(0)$ 是积分常数. 从式 (1.8) 得到

$$a(0) = \frac{1}{2} \sqrt{m} [v(0) + j\omega x(0)] = \sqrt{\frac{1}{2} E} \exp \left[j \tan^{-1} \frac{\omega x(0)}{v(0)} \right];$$

式中, E 是从方程組 (1.7) 所得的总能量. 因而, 可以看出, 为了将“运动”全面地加以确定, 必須規定两个任意常数.

虽然 a 和 a^* 称为不同的簡正模似乎是人为的, 但这种模式的

[†] 在习惯用的算子代数中, 这种形式也称为波的表示式或对角綫表示式.

划分有利于将 $v + j\omega x$ 和 $v - j\omega x$ 看成是两个反向旋转的矢量。当两个振荡器的耦合很弱时，看来在相同方向旋转的模式比在相反方向旋转的模式，很可能发生更有效的耦合。因而，在这种方式下来划分模式，将有助于理解和简化更加复杂的耦合系统。

1.2 两个耦合的线性振荡器

在本节中我们将正确地解出两个耦合振荡器的运动方程组，从而可以比较下面三节中求得的近似解，并检查它们的适用范围。

考虑图 1.2 中所示的两个简单的耦合摆。两个摆的长度分别为 l_1 和 l_2 ，每一摆锤的质量为 m ，两个锤用弹性常数为 k 、重量可以不计的弹簧连接起来。假定振荡幅度很小；如图中所示，它们分别用符号 x_1 和 x_2 来表示。两个摆都在同一平面上摆动。

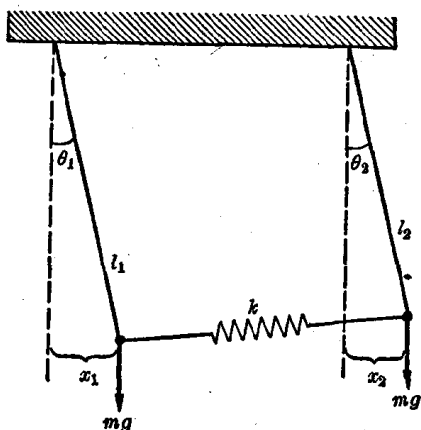


图 1.2 由两个耦合元件构成的系统的坐标

对于小的位移，动能和位能分别为

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (v_1^2 + v_2^2); \\ V &\cong \frac{m}{2} \left(\frac{g}{l_1} x_1^2 + \frac{g}{l_2} x_2^2 \right) + \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2; \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

式中， g 是重力加速度。位能式中前两项是两个摆锤的重力的位能，而比例于 k 的项则是得自耦合的能量。当 $x_1 = x_2$ 时，弹簧的能量为零，因为当两个摆锤静止时，并未假定弹簧中存在张力。当 $x_1 - x_2$ 增加时，张力增大了，因而弹簧中所存储的位能也增多了。

容易証明, 無論从哈密頓式或分析一下作用于每一摆錘的力, 都能得到下面的运动方程組的哈密頓形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -\omega_1^2 x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1); & (a) \\ \frac{dx_1}{dt} &= v_1; & (b) \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\omega_2^2 x_2 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2); & (c) \\ \frac{dx_2}{dt} &= v_2; & (d) \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

式中,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l_{1,2}}; \quad (1.11)$$

$g/l_{1,2}$ 代表重力的回复力; $\pm k(x_1 - x_2)$ 代表彈簧的回复力。

1.2.1 运动方程組的耦合模形式

运动方程組 (1.10), 就其形式本身來說, 是可以正确地解出的。然而, 为了便于以后的分析, 将这些方程化成一种所謂耦合模的形式将是特別有用的。这种形式是耦合的运动方程組的这样的綫性組合, 当互耦合系数 k 趋于零时, 可使所得方程組是两个孤立 (无耦合) 元件的簡正模形式。对方程組 (1.10) 采取下面的步驟, 就能看清楚这一点。将方程 (1.10 b) 乘以 $\pm j\omega_1$, 并且同方程 (1.10 a) 相加。相似地, 将方程 (1.10 d) 乘以 $\pm j\omega_2$, 并且同方程 (1.10 c) 相加。将模式幅度規定为

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{m} (v_1 + j\omega_1 x_1); \\ a_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{m} (v_2 + j\omega_2 x_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

这样, 上述的方程組 (1.10) 的綫性組合就可以写成

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_1^* + c_{14}a_2^*; & (a) \\
 \frac{da_2}{dt} &= c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_1^* + c_{24}a_2^*; & (b) \\
 \frac{da_1^*}{dt} &= c_{31}a_1 + c_{32}a_2 + c_{33}a_1^* + c_{34}a_2^*; & (c) \\
 \frac{da_2^*}{dt} &= c_{41}a_1 + c_{42}a_2 + c_{43}a_1^* + c_{44}a_2^*; & (d)
 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned}
 c_{11} &= -c_{33} = j\omega_1 \left(1 + \frac{k}{2m\omega_1^2} \right); \\
 c_{22} &= -c_{44} = j\omega_2 \left(1 + \frac{k}{2m\omega_2^2} \right); \\
 c_{13} &= c_{21} = -c_{23} = -c_{31} = c_{41} = -c_{43} = -j \frac{k}{2m\omega_1}; \\
 c_{12} &= -c_{14} = c_{24} = c_{32} = -c_{34} = -c_{42} = -j \frac{k}{2m\omega_2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

除了原有的小幅度假定,这里并没有引入其他的近似。

当互耦合 k 等于零时, 这些方程化为两个孤立摆的简正模形式(即方程组(1.5)), 因而, 它们正是前面所要求的耦合模形式。这里选择了耦合模形式的名称, 因为孤立元件(摆)的耦合模 a_1, a_1^*, a_2 和 a_2^* 是通过耦合系数 k 而发生耦合的。各个 c_{ij} 称为模式耦合系数。在这种形式中, 可以看到 k 使所有四个孤立的模式都发生耦合。在后面几节中引入近似后, 就可明显地看出这些表面上形式很复杂的方程组有什么用途了。例如, 我们将看到, 标有星号的模式对未标有星号的模式不起多大作用, 原因是它们是朝相反的方向旋转。这就允许作相当大的简化。然而, 从现在的形式就可精确地看出这种假定的适用性。

1.2.2 耦合系统的简正模频率

前面指出过, 两个耦合摆的简单问题的运动方程组可以正确地解出。为了利用标准的方法求出这些正确解, 假定解的形式为

$a_1(t) = a_1(0)e^{j\omega t}$, $a_1^*(t) = a_1^*(0)e^{j\omega t}$, $a_2(t) = a_2(0)e^{j\omega t}$ 和 $a_2^*(t) = a_2^*(0)e^{j\omega t}$. 将这些解代入方程組 (1.13), 就得到四个常数 $a_1(0)$, $a_2(0)$ 及其共轭值的四个齐次代数方程組. 为了具有非零解, 系数的行列式必須等于零. 从这个要求引出了 ω 必須滿足的方程. 这个方程称为特征方程或行列式方程. 在这种情形下, 特征方程的根很容易找到, 它們是 $\omega = \pm\omega_a$ 和 $\omega = \pm\omega_b$, 式中

$$\omega_{a,b} = \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{k}{m} \right)^2} \right]^{1/2}. \quad (1.15)$$

这些就是耦合系統簡正模的頻率. 对于耦合系統來說, 它們的作用同无耦合振蕩器中 $\pm\omega_1$ 和 $\pm\omega_2$ 的作用一样.

1.2.3 能量守恒

下面有意义的是根据耦合模幅度 (a_1 和 a_2 及其共轭值) 来計算耦合摆的总能量, 而不利用近似. 正确的表示式可以用來說明 1.3 节中介绍的弱耦合近似的适用性.

两个耦合摆的总能量(方程組 (1.9)) 可以表示为

$$E = \frac{m}{2} \left(v_1^2 + \omega_1^2 x_1^2 + v_2^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \frac{k}{m} (x_1 - x_2)^2 \right); \quad (1.16)$$

式中 $\omega_{1,2}$ 的定义得自方程 (1.11). 現在从方程組 (1.12) 解出 $v_{1,2}$ 和 $x_{1,2}$, 并用 a_1 和 a_2 来表示; 将这些式子代入方程 (1.16), 就有

$$E = |a_1|^2 + |a_1^*|^2 + |a_2|^2 + |a_2^*|^2 - \frac{k}{2m} \left(\frac{a_1 - a_1^*}{\omega_1} - \frac{a_2 - a_2^*}{\omega_2} \right)^2. \quad (1.17)$$

前四项代表两个摆无耦合或互相孤立时 ($k=0$) 所包含的能量, 而最后的表式則代表同耦合机理有关的能量.

除了还没有利用边界条件外, 两个耦合摆的严格問題已經解出了. 下一个重要的步骤是假定耦合很弱, 从而将問題加以簡化.

1.3 两个弱耦合振蕩器

当耦合有关的能量远小于任一个摆的重力位能时, 1.2 节中