耦合模和参量电子学

W. H. 卢瑟 著

苏 禾 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书首先介紹耦合模理論，并且說明如何利用这种理論来簡化耦合系統的研究。从这个共同的观点，继而提出行波管、返波管和类似微波器件的統一理論。最后，經过同一个基本方法，处理了参量放大器、振蕩器、变頻器的理論。

本书可供参量电子学和微波技术等領域中的工程技术和研究人員的参考；也可供教学上的参考。

COUPLED MODE AND
PARAMETRIC ELECTRONICS
William H. Louisell
John Wiley & Sons, Inc. 1960
耦合模和参量电子学
苏 禾 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷三厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本850×1168 1/32 印張8 16/32 排版字数207,000
1964年3月第1版 1964年3月第1次印刷 印数1—5,000

統一书号 15119·50 定价(十四) 1.45元

目　　录

第1章

耦合模理論

振蕩和傳播系統中相互耦合的概念对理解和解决很多类型的問題提供了一种极其有用的和普遍的工具．可以引用的一些例子是：耦合的机械振蕩器、耦合电路、固体中的分子振动、声波、定向耦合器、滤波器和微波放大器（諸如行波管、返波放大器和参量放大器）．本书的目的是，通过将这种概念用于微波电子学中的若干有意义的例子，来讲解处理上述問題的一种普通的近似方法．这种近似方法就称为耦合模方法．

概念上，耦合模的方法是相当簡单的．首先，一个复杂的耦合系統被分成一定数目的孤立部分或单元．然后正确地求解孤立单元的运动方程組，并且将解表示为該单元的“簡正模”．然后假定原来的复杂系統是由互相发生弱耦合的孤立单元所組成的．这种耦合仅使每一单元的运动状态受到很小的扰动，而原来耦合系統的运动则用这种对孤立单元运动的微扰加以描述†．

引用一个例子将有助于說明几个問題．考慮两个波导，它們通过公共壁上的一系列小孔而发生弱的耦合．現在需要求在这样一个耦合系統中傳播的波．这个系統首先被分为两个孤立的或不发生耦合的波导．每一波导正是上段所說的一个单元．这样就可

† 熟悉量子力学的讀者很容易认識到这种“耦合模方法”是微扰理論的一种特殊情形．然而，这种理論比本书所需要的普遍得多，因而这里只介紹一种非常簡化的形式．我們沒有意图使这种理論在数学上严格，因为这样带来的复杂性对于一本这样性质的书来說是不适宜的．

找到在每一单元中能够傳播的波. 众所周知，如果对頻率不加限制，那么沿每一波导，波都能以无限多的方式傳播. 对于向前能傳播的每一个波形，必存在一个相应的波向后傳播. 这些波就称为該元件的"簡正模". 它們代表波方程的独立解. 为簡单起見，假定在每一波导中仅存在着最低阶的向前和向后波. 原来的耦合系統現在就能看成是由四个原来的波組成的，在每一元件中有两个波，通过波导中小孔的微扰作用而发生弱的耦合. 耦合将稍微改变原来波的場分布.

显然，如果要从这种方法得到任何实际优点，元件之間的耦合必須是弱的. 如果这种近似不成立，耦合系統的解就和未耦合解差別太大，以致这时知道孤立单元的解也属无用.

当单元之間的耦合很弱时，从物理学方面的考虑可以得出这样的結論：孤立单元的若干模式在耦合机理中将不起什么作用. 在这种情形下，就可忽略掉这些模式，从而簡化原来的問題. 为了說明为什么可以这样作，仍旧考虑两个耦合波导的例子. 稍微回忆一下就知道，当单元之間的耦合很弱时，每一波导中向前波之間的耦合，一般比它們和向后波之間的耦合有效得多. 因而，在分析中可以忽略向后波，从而使問題大为簡化. 将弱耦合系統分成个别单元来考虑的方法，除了使分析簡化外，还能够对耦合机理得到更好的物理理解.

本章只限于研究包含有两个元件的耦合系統. 具体說，这里将处理两个耦合单摆和两組耦合傳輸綫. 这种限制使我們在說明耦合模方法时，有可能不牵涉过多的复杂数学，虽然这种方法对于更多的耦合单元也是适用的. 因为，当仅有两个簡单单元发生耦合时，問題可以正确地解出，这些正确解就可能用来檢驗近似耦合模解的适用性. 在以后的章节中，这些近似将用来处理行波管、参量放大器和其他器件，而知道它們的应用范圍是很重要的.

可能认为本章的簡单問題并不需要这样麻煩地来討論. 然

而，如果将它們放在有关具体器件的章节中討論，那么在这里对这种簡单問題反映出来的很多数学的和物理的特点，就很难說清楚了．因而，作者感到对单摆和傳輸綫作透彻的处理是合理的．

第一部分　振动模式的耦合

1·1　簡单綫性振蕩器

振动模式的耦合理論可以从簡单的綫性振蕩器的研究开始，这种最簡单的单元能够用来作为复杂振动系統的基础．本节的目的是，为了以后的分析，将运动方程組表示为一种特别有用的形式．

在經典力学中，运动方程通常写成三种形式[1]：(1) 牛頓式，(2)哈密頓式和 (3) 拉格朗日式．在各种問題中，这些形式之一可能比另一种簡单．例如，在分析机械結构如桥梁时，就应用牛頓形式．在量子力学中，哈密頓形式是最适宜的，而在量子电动力学中就应用拉格朗日形式．虽然这里对簡单綫性振蕩器介紹所有三种形式，但并不需要預备知識．

还有另一种和哈密頓式密切关連的运动方程組的形式，这种形式称为簡正模形式，它在耦合模理論中是非常有用的．現在就来对簡单振蕩器推导这种形式．

在推导运动方程組的簡正模形式时，单摆和簡单 LC 电路(图 1·1)将平行地介紹．为方便起見，我們将利用力学的术語；当用于 LC 电路时，其意义也是很明显的．

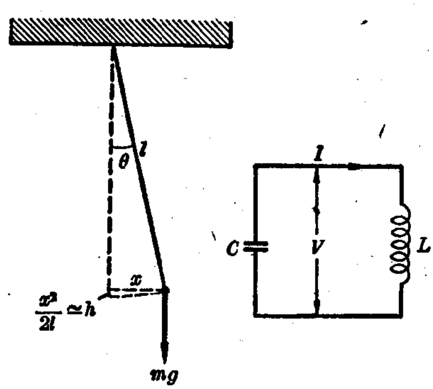

图 1·1　簡单振蕩器的坐标

簡单振蕩器运动方程組的哈密頓形式可以表示为[1]

$$\left.\begin{array}{llll} m\dfrac{dv}{dt}=-m\dfrac{g}{l}x; & \text{(a)} & \dfrac{dI}{dt}=-\dfrac{1}{L}V; & \text{(c)} \\ \dfrac{dx}{dt}=v; & \text{(b)} & \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{C}I; & \text{(d)} \end{array}\right\}(1\cdot1)$$

式中，m 是摆錘的质量；g 是重力加速度；l 是摆长；x 是摆錘的小量位移，如图 1·1 所示．LC 电路上的符号具有通常的含义．

哈密頓形式包括两个耦合的一阶微分方程．在方程(1·1a)中位移和速度发生耦合，而在方程(1·1b)中速度和位移发生耦合．前者的耦合系数是 $-g/l$，后者的耦合系数是 $+1$．正負符号的区别是重要的．当符号相反时，解将是周期性的；如果符号是相同的，解就将是增幅的或衰减的指数函数．

振蕩器的动能可以表示为 $T(v)=mv^2/2$，而位能为 $V(x)=mgx^2/2l$．振蕩器的能量将周期性地从位能轉換为动能，并作相反的轉換．当摆达到最大位移时，速度是零，而所有能量都是位能．当位移通过零値时，所有能量都将是动能．振蕩系統的特性是有两种形式的能量可以利用，并且在这两种形式之間能量将发生周期性的交換．在 LC 电路中，电感周圍磁場中存儲的能量是磁能的形式 $(LI^2/2)$，而电容器平板間电場中存儲的是电能 $(CV^2/2)$．因为方程(1·1c)和(1·1d)中耦合系数的符号是相反的，所以系統将发生振蕩，其中能量在电場和磁場之間周期地交換着．哈密頓形式对于描述系統的两个变量之間的耦合，可以明显地表达出来．

将方程(1·1b)代入方程(1·1a)，就得到这个簡单問題的运动方程組的拉格朗日形式．結果是

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{g}{l}x; & \text{(a)} & \dfrac{d^2V}{dt^2}=-\dfrac{1}{LC}V; & \text{(c)} \\ \dfrac{dx}{dt}=v; & \text{(b)} & \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{C}I. & \text{(d)} \end{array}\right\}(1\cdot2)$$

方程(1·2a)也就是运动方程組的牛頓形式. 当然，它是人們最熟悉的，并且是經常用来分析簡单振蕩器的运动的. 它是一个不包含耦合項的二阶微分方程. 其解包含两个任意的积分常数，它們通常是根据起始位移和起始速度来計算的. 因而，为了用起始位移和速度来表示任意常数，必須同时利用方程(1·2a)和(1·2b).

同样，簡单振蕩器也可以用两个去耦合的一阶微分方程来描述. 这就是运动方程組的簡正模形式. 这是需要的，因为通常求解一阶微分方程組比求解二阶或耦合的一阶方程組要容易一些. 推导这种形式的一种方法是找到哈密頓方程組的綫性組合，它們将耦合項去掉了. 在現在的簡单情形下，将方程(1·1b)两边都乘以任意常数Y，然后同方程(1·1a)相加，就有

$$\frac{d}{dt}(v+Yx)=Y\left(v-\frac{g}{lY}x\right); \quad \Big| \quad \frac{d}{dt}(I+YV)=\frac{Y}{C}\left(I-\frac{C}{LY}V\right). \tag{1·3}$$

現在，如果这样来选擇Y：

$$Y=\pm j\omega; \quad (a) \quad \Big| \quad Y=\pm j\sqrt{\frac{C}{L}}\equiv\pm j\omega C; \quad (c)$$

式中，

$$\omega=+\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad (b) \quad \Big| \quad \omega=+\frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (d) \tag{1·4}$$

那么方程(1·3)就可以写成

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}-j\omega\right)a=0;\\ \left(\frac{d}{dt}+j\omega\right)a^*=0;\end{aligned}\right\} \tag{1·5}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}a=\frac{1}{2}\sqrt{m}(v+j\omega x); \quad &\Big| \quad a=\frac{1}{2}\sqrt{L}(I+j\omega CV);\\ a^*=\frac{1}{2}\sqrt{m}(v-j\omega x); \quad &\Big| \quad a^*=\frac{1}{2}\sqrt{L}(I-j\omega CV).\end{aligned}\right\} \tag{1·6}$$

关于选擇归一化常数$\sqrt{m}/2$和$\sqrt{L}/2$的原因，下面就会看清楚.

方程組(1·5)正是我們所要找的两个一阶去耦合方程．它們称为运动方程組的簡正模形式†．它們同方程組(1·1)或(1·2)同样描述了振蕩器．$a(t)$和$a^*(t)$称为簡正模幅度，或者就称为振蕩单元的簡正模．它們是由一个实速度$v(t)$和一个实位移$x(t)$綫性地組成的，并且可以看成是两个长度固定的朝相反方向旋轉的矢量．这两个矢量的幅度經归一化后(在方程(1·6)中将常数选擇为$\sqrt{m}/2$和$\sqrt{L}/2$)，使得它們的平方之和代表系統中所存儲的总能量，即

$$E=\frac{m}{2}[v^2(t)+\omega^2x^2(t)] = |a(t)|^2+|a^*(t)|^2; \qquad E=\frac{1}{2}[CV^2(t)+LI^2(t)] = |a(t)|^2+|a^*(t)|^2. \tag{1·7}$$

将方程組(1·6)中的a和a^*直接代入，就能証实所选擇的归一化是正确的．$|a|^2$和$|a^*|^2$分别代表在模式a和a^*中所存儲的能量．因为v和x是实数，$|a|^2=|a^*|^2$，因而存儲在两个模式中的能量是相等的．

簡正模方程組(1·5)的解是

$$\left.\begin{aligned} a(t)&=a(0)\,e^{j\omega t}=\frac{1}{2}\sqrt{m}[v(t)+j\omega x(t)];\\ a^*(t)&=a^*(0)e^{-j\omega t}=\frac{1}{2}\sqrt{m}[v(t)-j\omega x(t)]; \end{aligned}\right\} \tag{1·8}$$

式中，$a(0)$和$a^*(0)$是积分常数．从式(1·8)得到

$$a(0)=\frac{1}{2}\sqrt{m}[v(0)+j\omega x(0)]=\sqrt{\frac{1}{2}E}\exp\left[j\tan^{-1}\frac{\omega x(0)}{v(0)}\right];$$

式中，E是从方程組(1·7)所得的总能量．因而，可以看出，为了将“运动”全面地加以确定，必須規定两个任意常数．

虽然a和a^*称为不同的簡正模似乎是人为的，但这种模式的

† 在习惯用的算子代数中，这种形式也称为波的表示式或对角綫表示式．

划分有利于将 $v+j\omega x$ 和 $v-j\omega x$ 看成是两个反向旋轉的矢量．当两个振蕩器的耦合很弱时，看来在相同方向旋轉的模式比在相反方向旋轉的模式，很可能发生更有效的耦合．因而，在这种方式下来划分模式，将有助于理解和簡化更加复杂的耦合系統．

1·2 两个耦合的綫性振蕩器

在本节中我們将正确地解出两个耦合振蕩器的运动方程組，从而可以比較下面三节中求得的近似解，并檢查它們的适用范圍．

考虑图 1·2 中所示的两个簡单的耦合摆．两个摆的长度分别为 l_1 和 l_2，每一摆錘的质量为 m，两个錘用弹性常数为 k、重量可以不計的弹簧連接起来．假定振蕩幅度很小；如图中所示，它們分别用符号 x_1 和 x_2 来表示．两个摆都在同一平面上摆动．

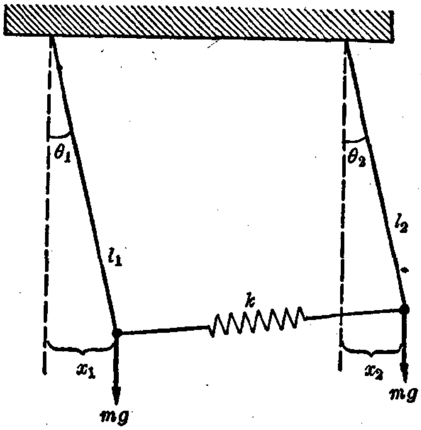

图 1·2 由两个耦合元件构成的系統的坐标

对于小的位移，动能和位能分别为

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(v_1^2+v_2^2); \\ V &\cong \frac{m}{2}\left(\frac{g}{l_1}x_1^2+\frac{g}{l_2}x_2^2\right)+\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2; \end{aligned}\right\} \tag{1·9}$$

式中，g 是重力加速度．位能式中前两项是两个摆錘的重力的位能，而比例于 k 的項則是得自耦合的能量．当 $x_1=x_2$ 时，弹簧的能量为零，因为当两个摆錘靜止时，并未假定弹簧中存在張力．当 x_1-x_2 增加时，張力增大了，因而弹簧中所存儲的位能也增多了．

容易証明，无論从哈密頓式或分析一下作用于每一摆錘的力，都能得到下面的运动方程組的哈密頓形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv_1}{dt}=-\omega_1^2x_1+\frac{k}{m}(x_2-x_1)\,; &&\text{(a)}\\&\frac{dx_1}{dt}=v_1; &&\text{(b)}\\&\frac{dv_2}{dt}=-\omega_2^2x_2+\frac{k}{m}(x_1-x_2)\,; &&\text{(c)}\\&\frac{dx_2}{dt}=v_2; &&\text{(d)}\end{aligned}\right\}\quad(1\cdot10)$$

式中，

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{l_{1,2}}; \qquad (1\cdot11)$$

$g/l_{1,2}$ 代表重力的回复力；$\pm k(x_1-x_2)$ 代表彈簧的回复力.

1·2·1 运动方程組的耦合模形式

运动方程組 (1·10)，就其形式本身来說，是可以正确地解出的. 然而，为了便于以后的分析，将这些方程化成一种所謂耦合模的形式将是特別有用的. 这种形式是耦合的运动方程組的这样的綫性組合，当互耦合系数 k 趋于零时，可使所得方程組是两个孤立(无耦合)元件的简正模形式. 对方程組(1·10)采取下面的步驟，就能看清楚这一点. 将方程(1·10 b)乘以 $\pm j\omega_1$，并且同方程(1·10 a)相加. 相似地，将方程(1·10 d) 乘以 $\pm j\omega_2$，并且同方程(1·10 c)相加. 将模式幅度規定为

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\frac{1}{2}\sqrt{m}\,(v_1+j\omega_1x_1)\,;\\a_2&=\frac{1}{2}\sqrt{m}\,(v_2+j\omega_2x_2)\,.\end{aligned}\right\}\qquad(1\cdot12)$$

这样，上述的方程組(1·10)的綫性組合就可以写成

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt}&=c_{11}a_1+c_{12}a_2+c_{13}a_1^*+c_{14}a_2^*; &&\text{(a)}\\
\frac{da_2}{dt}&=c_{21}a_1+c_{22}a_2+c_{23}a_1^*+c_{24}a_2^*; &&\text{(b)}\\
\frac{da_1^*}{dt}&=c_{31}a_1+c_{32}a_2+c_{33}a_1^*+c_{34}a_2^*; &&\text{(c)}\\
\frac{da_2^*}{dt}&=c_{41}a_1+c_{42}a_2+c_{43}a_1^*+c_{44}a_2^*; &&\text{(d)}
\end{aligned}\right\} \tag{1·13}$$

式中,

$$\left.\begin{aligned}
&c_{11}=-c_{33}=j\omega_1\left(1+\frac{k}{2m\omega_1^2}\right);\\
&c_{22}=-c_{44}=j\omega_2\left(1+\frac{k}{2m\omega_2^2}\right);\\
&c_{13}=c_{21}=-c_{23}=-c_{31}=c_{41}=-c_{43}=-j\,\frac{k}{2m\omega_1};\\
&c_{12}=-c_{14}=c_{24}=c_{32}=-c_{34}=-c_{42}=-j\,\frac{k}{2m\omega_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{1·14}$$

除了原有的小幅度假定,这里并沒有引入其他的近似.

当互耦合 k 等于零时，这些方程化为两个孤立摆的簡正模形式(即方程組(1·5))．因而，它們正是前面所要求的耦合模形式．这里选擇了耦合模形式的名称,因为孤立元件(摆)的耦合模 a_1, a_1^*, a_2 和 a_2^* 是通过耦合系数 k 而发生耦合的．各个 c_{ij} 称为模式耦合系数．在这种形式中，可以看到 k 使所有四个孤立的模式都发生耦合．在后面几节中引入近似后,就可明显地看出这些表面上形式很复杂的方程組有什么用途了．例如,我們将看到,标有星号的模式对未标有星号的模式不起多大作用，原因是它們是朝相反的方向旋轉．这就允許作相当大的簡化．然而，从現在的形式就可精确地看出这种假定的适用性．

1·2·2 耦合系統的簡正模频率

前面指出过，两个耦合摆的簡单問題的运动方程組可以正确地解出．为了利用标准的方法求出这些正确解，假定解的形式为

$a_1(t)=a_1(0)e^{j\omega t}$，$a_1^*(t)=a_1^*(0)e^{j\omega t}$，$a_2(t)=a_2(0)e^{j\omega t}$ 和 $a_2^*(t)=a_2^*(0)e^{j\omega t}$. 将这些解代入方程組 (1·13)，就得到四个常数 $a_1(0)$，$a_2(0)$ 及其共軛值的四个齐次代数方程組. 为了具有非零解，系数的行列式必須等于零. 从这个要求引出了 ω 必須满足的方程. 这个方程称为**特征方程**或**行列式方程**. 在这种情形下，特征方程的根很容易找到，它們是 $\omega=\pm\omega_a$ 和 $\omega=\pm\omega_b$，式中

$$\omega_{a,b}=\left[\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}+\frac{k}{m}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{m}\right)^2}\right]^{1/2}. \quad (1\cdot15)$$

这些就是耦合系統簡正模的頻率. 对于耦合系統来說，它們的作用同无耦合振蕩器中 $\pm\omega_1$ 和 $\pm\omega_2$ 的作用一样.

1·2·3 能量守恒

下面有意义的是根据**耦合模幅度**（a_1 和 a_2 及其共軛值）来計算耦合摆的总能量，而不利用近似. 正确的表示式可以用来說明 1·3 节中介紹的弱耦合近似的适用性.

两个耦合摆的总能量（方程組(1·9)）可以表示为

$$E=\frac{m}{2}\left(v_1^2+\omega_1^2x_1^2+v_2^2+\omega_2^2x_2^2+\frac{k}{m}(x_1-x_2)^2\right); \quad (1\cdot16)$$

式中 $\omega_{1,2}^2$ 的定义得自方程(1·11)。現在从方程組 (1·12) 解出 $v_{1,2}$ 和 $x_{1,2}$，并用 a_1 和 a_2 来表示；将这些式子代入方程(1·16)，就有

$$E=|a_1|^2+|a_1^*|^2+|a_2|^2+|a_2^*|^2-\frac{k}{2m}\left(\frac{a_1-a_1^*}{\omega_1}-\frac{a_2-a_2^*}{\omega_2}\right)^2. \quad (1\cdot17)$$

前四項代表两个摆无耦合或互相孤立时($k=0$)所包含的能量，而最后的表式則代表同耦合机理有关的能量.

除了还沒有利用边界条件外，两个耦合摆的严格問題已經解出了. 下一个重要的步驟是假定耦合很弱，从而将問題加以簡化.

1·3 两个弱耦合振蕩器

当耦合有关的能量远小于任一个摆的重力位能时，1·2 节中