高等数学习题课30讲
（修订版）

—与教学同步的教学辅导书
—阶段复习的指导书
—研究生考试的辅导书
—自学高等数学的良师益友

徐　兵　编著

北京航空航天大学出版社

高等数学习题课 30 讲

（修订版）

徐　兵　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是学习高等数学的同步教学辅导书，阶段复习的指导书，硕士研究生入学考试的辅导书，也是自学高等数学者的良师益友。其内容为函数、极限、导数、微分、积分、空间解析几何、多元函数、重积分、曲线积分、曲面积分、场论初步、微分方程及级数等。

本书是以习题课的形式展开，将上述内容分为30个专题。依其内容特点分为以概念、性质为主；以基本计算方法为主；以证明题为主；以应用为主的四种不同类型的习题课。每种类型都包括了五部分内容：教学基本要求、教学方式、思考题与例题分析、课内练习题及课外练习题。

本书可作为理工科大学生学习高等数学的辅导书，及备考硕士研究生的复习辅导书。同时可作为自学高等数学者必备资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课30讲/徐兵编著.-修订版.-北京：北京航空航天大学出版社，1998.8

ISBN 7-81012-803-5

Ⅰ.高… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等数学-解题 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第12539号

高等数学习题课30讲

(修订版)

徐　兵　编著

责任编辑　郭维烈

责任校对　李宝田

*

北京航空航天大学出版社出版发行

(北京市学院路37号，邮编100083，发行部电话62015720

北京宏文印刷厂印装　各地书店经销

开本：850×1168　1/32　印张：14　字数：373千字

1998年8月第2版　1998年第1次印刷　印数：5000册

ISBN 7-81012-803-5/O·043　定价：20.00元

前　言

近年来教学思想、教学方式都朝着素质教育的目标在改变。特别是研究生的入学考试近年来也发生了较大的变化。从命题指导思想到成题，已朝着有利于启发学生思维、提高能力、提高素质的方向前进。试题中逐渐增加概念与性质的综合运用，从侧重于基本方法的演练发展到利用基本计算方法的思想去解决问题。这些变化对高等数学的教与学提出了更高的要求。

笔者从事数学教学实践已 30 多年，感悟到高等数学习题课是高等数学教学的一个重要环节，成功的习题课应能起到教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。学习中与其熟记几个概念，性质，不如明了其要素；与其多做几类练习题，不如明了其解题思路，进而能将计算方法条理化，总结出其规律性。笔者认为，习题课“成功”的标志为：

能使教师了解到学生掌握本学科知识的程度。

能使学生明了教学基本要求，发现自己学习中的薄弱环节，并能及时得以弥补。

能使学生对概念中的模糊观念得以澄清，明了基本概念的要素；对基本方法得以条理化，明了计算中应该注意的问题；学会利用基本计算方法的思路解决更广泛的问题；学会解决综合性问题的分析方法。

本书以习题课的形式展开，将高等数学内容分为 30 个专题。依据内容特点，分为以概念、性质为主；以基本计算方法为主；以证明题为主；以应用为主的四种不同类型的习题课。每讲都包括五部分内容；教学基本要求、教学方式、思考题与例题分析、课内练习题及课外练习题。为了利于读者明了基本概念的要素及基

本性质的特点，尽量以思考题或选择题为引线，引导学生深入，以求提高。为了能对基本方法加深记忆，明了其要点及应注意的问题，在例题中给以思路分析或附以解说性的说明，并给出引导性的归纳总结。

由于目前学校师资不足，不能保证习题课的正常进行，因此本书的编写立足于读者自学，书中对课内与课外练习题都给出较详尽的解题思路分析与评析。读者只需自己研习，不必再找老师答疑也能解惑。因而本书也是自学高等数学者的必备资料。

本书不仅是学生学习高等数学的同步参考辅导书，也是学生进行阶段复习的指导书。

本书也以备考研究生的考生作为主要读者。笔者分析了直至1998年的硕士研究生入学考试试题，书中融入了近十年来研究生入学考试命题的基本演变思想。为了便于读者复习备考，本书所有内容顺序都与通用教材的顺序同步，各讲内容都围绕教学大纲、考试大纲展开。各讲内容都不涉及后面的内容，而后面的内容尽量包括前面知识的综合运用。

本书为修订版，对1989年的第一版作了较大的改变，以期适应新形势的发展。北京航空航天大学李海志、沈颂华教授近几年也多次指导、鼓励，北航理学院李心灿、王日爽、邵鸿飞、计慕然、李恒沛等同仁及北京航空航天大学出版社王小青副总编对本书的修订版作出了良好的建议。在此表示致谢。

书中疵误难免，恳请读者指正。

作者于北京航空航天大学

1998年5月

目　　录

第1讲　函　　数

一、目的与要求

1. 理解函数的概念;明确函数定义有两个要素:依赖关系、定义域;掌握函数表达式的运用。

2. 了解函数的基本性质;知道判定诸性质的思路。

3. 掌握将复合函数由外及里分解为简单函数的方法。

二、教学方式

以思考题为引线,引导学生明确函数定义的要素。以典型例题为导向,引导学生掌握函数表达式的运用。

三、思考题与例题分析

由于中学代数中已对函数的概念、求定义域作了较多的介绍,本节内容侧重于对函数概念、函数表达式的运用及将复合函数由外及里分解为简单函数的研究。

1. 函数的概念

思考题1　函数“依赖关系定义”的关键特征是什么?

分析　函数“依赖关系定义”指出:“对于 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个规则总有值与之相对应,则称 y 为 x 的函数。常记为 $y=f(x)$。”分析上述定义可以知道,它有两个

关键特征：

x 的取值允许范围，即函数的定义域；

对应规则，即函数的依赖关系。

因此说，函数概念的两个基本要素为：定义域、对应规则（或称依赖关系）。

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才能认为它们是同一个函数。

至于说“对应规则”的特点及 y 的取值特点，在函数的定义中并没有限制，因此可能出现：

(1) 当自变量 x 的值变动时，变量 y 的取值不一定随 x 的变动而变化，y 可能总取一个值。如 $y=c$（常数）也表示一个函数。

(2) 函数对应规则的形式没有加以限制。

① 如果函数对应规则的形式是解析表达式，且它可以表示为 $y=f(x)$，则称此函数为显式表示。

② 如果函数对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的，则称 y 是 x 的隐函数。

③ 如果函数对应规则是由几个解析表达式而表示的，则称之为分段函数。如

$$y=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2+1 & 0\leqslant x<1 \\ x^2 & x\geqslant 1 \end{cases}$$

注意，这里的 $y=f(x)$ 不是三个函数，而是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数，它是由三个解析表达式表示的函数。

④ 如果 x 与 y 是通过第三个变量联系起来的，如 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则称这种函数关系为参数方程表示的函数。

⑤ 如果对应规则是由表格或图形表示出来的，则称这种表示为函数的表格表示法或图形表示法。

例 1 选择题 下列函数对中为同一个函数的有（ ）。

A. $y_1=x, y_2=\frac{x^2}{x}$；　　　B. $y_1=x, y_2=\sqrt{x^2}$；

C. $y_1=\sqrt{x^2}, y_2=|x|$；　　　D. $y_1=x, y_2=(\sqrt{x})^2$。

分析　对于A，易见 y_1 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而 y_2 的定义域为 $x\neq0$，即$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。可知 y_1 与 y_2 的定义域不相同，因此 y_1 与 y_2 不是同一个函数，故应排除A。

对于B，y_1 与 y_2 的定义域都为$(-\infty,+\infty)$；而 $y_1=x$，$y_2=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant0\end{cases}$，$y_2$ 为分段函数。易见 y_1 与 y_2 的表达式不相同。因此 y_1 与 y_2 也不是同一个函数，故应排除B。

对于C，y_1 与 y_2 的定义域都为$(-\infty,+\infty)$；由B的分析可知，C中 y_1 与 y_2 的表达式也相同。因此 y_1 与 y_2 表示同一个函数，故应选C。

对于D，$y_1=x$，$y_2=(\sqrt{x})^2=x$，两者表达式相同，但是 y_1 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而 y_2 的定义域为 $x\geqslant0$，因此 y_1 与 y_2 也不是同一个函数，故应排除D。

综合之，本例应单选C。

2. 函数表达式的运用问题

读者在中学代数中已经知道，$y=f(x)=x^3+2x^2-x+5$，表示函数 y 与自变量 x 之间的关系式为 $y=f(\quad)=(\quad)^3+2(\quad)^2-(\quad)+5$，基于此点，考虑：

例2　设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f(f(x))$。

分析　由题意可知，$f(\quad)=\frac{(\quad)}{1-(\quad)}$，因此当 $x\neq1, x\neq\frac{1}{2}$ 时

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$

有必要指出，对于分段函数的相应问题应该注意函数表达式

与定义范围两者之间的相互关系。

思考题 2 试分析下列运算是否正确。

"设 $f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$,求 $f(-x)$。

解 由 $f(x)$ 的表达式可知,欲求 $f(-x)$ 可将 $-x$ 代替 $f(x)$ 表达式中 x 的位置,即

$$f(-x)=\begin{cases}(-x) & x\geqslant 0\\ (-x)^2 & x<0\end{cases},"$$

分析 读者先注意所给 $f(-x)$ 的表达式及其自变量相应的取值范围,不难发现运算中 $f(x)$ 的表达式及其自变量取值范围不一致。这是上述运算的症结所在。在所给函数表达式中 $f(x)=x$ 仅在 $x\geqslant 0$ 时才成立,因此 $f(-x)=-x$ 也只能在 $-x\geqslant 0$ 时才能成立。故知正确的运算应为:

$$f(-x)=\begin{cases}(-x) & -x\geqslant 0\\ (-x)^2 & -x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x & x\leqslant 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$$

例 3 若 $f(x+1)=x^2+3x+3$,求 $f(x)$。

分析 例 3 与例 2 是相反问题。由 $f(g(x))$ 的关系式求出 $f(x)$ 的表达式,常见的方法有两种:

(1) 令 $t=g(x)$,并从中解出 $x=g^{-1}(t)$,代入 $f(g(x))$ 的表达式可解。

(2) 可考虑将 $f(g(x))$ 的关系式右端凑为 $g(x)$ 的表达式,再把凑好的关系中的 $g(x)$ 换为 x,则可得 $f(x)$ 的表达式。

在本例中,令 $t=x+1$,则 $x=t-1$,代入所给 $f(x+1)$ 关系式,则有

$$f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+3=t^2+t+1$$

因此 $f(x)=x^2+x+1$。

如果采用第二种方法,则有

$$f(x+1)=(x^2+2x+1)+(x+1)+1=$$
$$(x+1)^2+(x+1)+1$$

因此　$f(x)=x^2+x+1$。

3. 函数的性质

函数的基本性质包括单调性、有界性、奇偶性、周期性。研究函数的单调性、有界性不可能脱离自变量的范围。判定给定函数的单调性除可以直接利用函数的性质来判断外，基本上要利用导数的性质来判定。对于函数的有界性，除可以利用一些代数不等式等特殊性质外，也需利用导数性质来判定。这两个性质都需在第9讲中介绍。判定函数的奇偶性需利用定义或奇偶函数的性质来判定。如

在某对称区间上的两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；

在某对称区间上的两个奇(偶)函数之积必为偶函数。

例4　选择题　设 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=f(x)\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ 必定为(　　)。

A. 奇函数；　　　　B. 偶函数；

C. 奇偶性与 a 有关；　D. 非奇非偶函数。

分析　欲判定 $F(x)$ 的奇偶性，只需依定义判定。

$$F(-x)=f(-x)\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=$$
$$-f(x)\cdot\frac{a^{-x}(1+a^x)}{a^{-x}(1-a^x)}=f(x)\frac{a^x+1}{a^x-1}=F(x)$$

因此 $F(x)$ 为偶函数。故本例应选B。

说明　如果问题中没有指明区间，只是指出 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数，或有界函数等)，通常要理解为是在 $f(x)$ 的定义区间上成立。

例5　选择题　在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 为

A. 奇函数；　　　　　　　B. 偶函数；

C. 无界函数； D. 有界函数。

分析 所给选项为两类，需分别研究。

$f(-x)=\dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$既不等于$-f(x)$，也不等于$f(x)$，因此$f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数，故应排除A与B。

由于$0\leqslant f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}=\dfrac{1+x^2+2x}{1+x^2}=1+\dfrac{2x}{1+x^2}\leqslant 2$，可知$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的有界函数，故应排除C，选D。

综合之，本例应单选D。

上述判定函数有界性是利用不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$。一般情形判定函数的有界性需依第9讲利用导数性质判定。因此本讲中对函数单调性与有界性的研究侧重于明确概念，且只限于会利用不等式的放大或缩小来判定。

4. 复合函数

为了给函数的微分法及积分法打下良好基础，读者应该掌握将复合函数由外层到里层分解为简单函数。所谓简单函数是指基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商所成之函数。

如$y=2^{\sin^2(x+\ln x)}$可分解为$y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin w$，$w=x+\ln x$，即分解为简单函数。

例6 设$y=\sqrt{\ln(x-1)}$，求y的定义域。

分析 求复合函数的定义域，通常可以先将复合函数由外及里分解为简单函数。然后由外层到里层，考察相应的简单函数在满足前一层次有定义条件下的定义范围，直至最里层。对每个简单函数则依中学所学过的原则：

分式的分母不能为零；

偶次方根号下的表达式的值非负；

对数的真数大于零；

取反正弦或反余弦的表达式的绝对值不大于1；等等。

本例由外到里可分解为 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=x-1$。先考察最外层函数，应有 $u\geqslant0$，因此需 $u=\ln v\geqslant0$，从而知 $v\geqslant1$。进而知 $v=x-1\geqslant1$，可得 $x\geqslant2$ 为所求函数的定义域。

四、课内练习题

下面请读者先做几个练习题，后总结其规律：

1. 设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|<1\\ x^2+1 & |x|\geqslant1\end{cases}$，求 $f(f(x))$。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b,b\neq a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$\varphi(x)=3x-1$

求 $f(\varphi(x))$ 和 $\varphi(f(x))$。

4. 若 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$ 并求出它的定义域。

5. 将 $y=a^{\sin\sqrt{x^2+1}}$ 分解为简单函数。

课内练习题解答

读者可以发现题1为由 $f(g(x))$ 的表达式求 $f(x)$ 的表达式，题2与题3为分段函数复合问题。

对于题1，$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，如果将右方化为 $x+\frac{1}{x}$ 的表达式，则

$$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=$$

$$(x+\frac{1}{x})^2-2$$

可得 $f(x)=x^2-2$

对于题 2，为分段函数的复合函数问题。

当 $0<|x|<1$ 时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$，故

$$f(f(x))=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{x^2}=|x|$$

当 $x=0$ 时，$|f(0)|=\sqrt{1-0^2}=1$，故

$$f(f(0))=(f(0))^2+1=2$$

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=x^2+1>1$，故

$$f(f(x))=f^2(x)+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

综合之

$$f(f(x))=\begin{cases}|x| & 0<|x|<1\\ 2 & x=0\\ x^4+2x^2+2 & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

说明　由本例可以看出，对于分段函数的复合函数，应该注意自变量与中间变量的取值范围，这是保障运算正确的关键。

对于题 3，

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant\varphi(x)\leqslant b,\quad b\neq a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

而 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$ 等价于 $a\leqslant 3x-1\leqslant b$，即 $\frac{1+a}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1+b}{3}$，故

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \dfrac{1+a}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1+b}{3},\quad b\neq a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

而 $\varphi(f(x))=3f(x)-1=\begin{cases}\dfrac{3}{b-a}-1 & a\leqslant x\leqslant b,\quad b\neq a\\ -1 & \text{其它}\end{cases}$

对于题 4，注意到 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$，且 $f(\varphi(x))=1-x$，可得

$e^{\varphi^2(x)}=1-x$，两端取对数解得

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x),\quad \varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$$

由于 $\varphi(x)\geqslant 0$，可得知

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

进而可得其定义域为 $x\leqslant 0$。

对于题5，由外到里分解为 $y=a^u$，$u=\sin v$，$v=w^{\frac{1}{2}}$，$w=x^2+1$。

说明 将复合函数由外到里分解为简单函数，不要丢掉中间的环节很重要，这是保障以后能正确求复合函数导数的关键。

五、课外练习题

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域及 $f(f(-7))$。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，求 $f(f(x))$。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(f(x))$。

4. 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$，$g(x)=\begin{cases}x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(g(x))$。

5. 将 $y=(\arcsin\dfrac{x}{2})^2$ 由外及里分解为简单函数。

6. 试回答下列问题：

(1) 若两个函数都是某个区间上的单调增加函数，它们的乘积是否仍为该区间上的单调增加函数？

(2) 周期函数是否必定有周期？

(3) $y=\sin n$（n 为自然数）是否是以 2π 为周期的函数？

(4) 是否 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 一定能复合成 y 为 x 的函数？

课外练习题参考解答

1. $f(x)$的定义域为$-7\leqslant x<2$， $2<x<3$。 $f(-7)=1$，$f(f(-7))=\frac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$。

2. 由于对于任意的x总有$|f(x)|\leqslant 1$，因此$f(f(x))=1$。

3. $f(f(x))=\begin{cases}2+x & x<-1\\ 1 & x\geqslant -1\end{cases}$。

4. $f(g(x))=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$。

5. $y=u^2, u=\arcsin v, v=\frac{x}{2}$。

6. (1) 否。如$f(x)=x^2, g(x)=-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内都为单调增加函数。但是$f(x)\cdot g(x)=-x$在$(0,+\infty)$内并不是单调增加函数。

(2) 否。周期函数的定义为：若存在$T>0$，使得对于任意的x都有$f(x+T)=f(x)$，则称$y=f(x)$为周期函数。若在周期T的所有取值中，存在一个大于零的最小正数T_0，则称T_0为最小周期。通常所说周期函数的周期总是指其最小周期。考虑

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

对于任意给定的正数T，都有$f(x+T)=f(x)$，因此$f(x)$为周期函数，任何正数都是该函数的周期，但是$f(x)$不存在最小周期。

这表明周期函数不一定有(最小)周期。

(3) 注意$y=\sin x$是以2π为周期的函数，但是$y=\sin n$(n为自然数)并不是以2π为周期的函数。由于$y=f(n)=\sin n$的定义域为自然数集合，而$n+2\pi$不是自然数，因此在本例中$f(n+2\pi)$没有意义，根本谈不上$f(n)=f(n+2\pi)$。

此题表明判定某些性质必须先考察其前提条件是否满足。