

多項式和有理函数插值 及逼近中的若干课题

〔美〕RICHARD S. VARGA 著

吴文达 蔡大用译

TOPICS IN
POLYNOMIAL
AND RATIONAL
INTERPOLATION
AND
APPROXIMATION

清华大学出版社

多项式和有理函数插值 及逼近中的若干课题

〔美〕 Richard S. Varga 著

吴文达 蔡大用 译

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是美国数值代数及逼近论方面著名教授R.S.Varga在加拿大蒙特利尔大学的讲座,1982年正式出版。来我国讲学后,对原书加以修改增补,首次在我国出版此中译本。

全书共七章,概括了某些函数类的无零点区域、函数的实域中逼近与复域中逼近的比较、Walsh超收敛性以及若干著名的猜测,作者介绍了在这些领域中直到1984年的研究结果,并提出了一些尚待解决的问题。

本书可作为高等学校数学系师生及从事研究逼近和插值领域的数学工作者的参考书。

TOPICS IN POLYNOMIAL AND RATIONAL INTERPOLATION AND APPROXIMATION

多项式和有理函数插值 及逼近中的若干课题

〔美〕Richard S.Varga 著

吴文达 蔡大用 译

☆

清华大学出版社出版

北京 清华大学

煤炭工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

☆

开本: 787×1092 1/32 印张: 4¹/₂。字数: 80千字

1985年1月第1版 1985年1月第1次印刷

印数: 1~10000

统一书号: 15235·145 定价0.95元

序

1983年9月，作者访问了中华人民共和国，并用原先的蒙特利尔(Montreal)专著中的材料作了讲演。在访问期间，蔡大用（清华大学）和吴文达教授（北京大学，北京国际经济信息中心）建议这本专著译成中文，决定对在这本1982年出版的专著中原先探讨的课题增加许多新的文献和结果。因此，这个中译本是原著经过改进的更新的版本。

我非常感谢蔡大用和吴文达教授，在准备中译本时他们所做的极其仔细的工作和建议，这在很多方面改进了原著。对我来说，在翻译中和在研究新课题中和他们一起工作是很大的愉快。

Richard S.Varga
于俄亥俄州，克利夫兰
1984年2月

前 言

这个讲座论及的课题总体上属于复分析的领域。这些课题都迷住了我，有些只是短期的，另外一些实际上贯穿了我整个教授生涯。

我希望我对这些课题的热心能渗透给读者，使得他在一定程度上受到感染。

在这个讲座中，我特别希望强调的一个事情是数值计算的功能，在复分析的某些问题中它可以使人思想敏锐并提出新的课题。这是这次讲座中将要反复提到的话题，它来源于我在哈佛大学时所受的分析方面的教育以及后来作为一个数值分析家的实践。为了说明数学结果和种种猜测，我们总是力图给出从各种数值计算得到的数值结果、图表以及其它。还列举了大量尚未解决的问题和猜测，使得读者感到各个课题都是活生生的和正在前进中。

每一章和另外的章独立无关，阅读时可以不参考其它各章。所需全部记号在每章内分别说明（有可能冒同一个项目多次定义的风险），而且每章都有自己一套参考文献。从头至尾使用Rutishauser符号“ $\therefore$ ”表示所做的定义，而“ $\square$ ”表示证明的结尾。遗憾的是，不可能在几页纸之内对这些课题中的每一个都给出自成系统的处理，常常有必要只简单地叙述结果而不加证明。

在这个讲座中我本人的大部分研究成果都是和E. B. Saff教授联名作出的，他应当极大地分享这个讲座的荣誉。和这样一个天才的年轻人共事是我工作激情和喜悦的一个来源。

Montreal大学的Ruhman和Sabidussi教授邀请我参加这

次 NATO 讨论班,并为组成这样一个成功的会议做了 种种努力,为此我表示由衷的感谢。最后,感谢Gretchen Varga对编辑这本讲义中所给予的帮助。

1982年1月7日于俄亥俄州, 克利夫兰

目 录

第一章 e^z 的 Padé 逼近的零点和极点, 以及广义 Bessel 多项式的零点	1
1.1 引言	1
1.2 多项式序列的无零点抛物线区域	4
1.3 e^z 的 Padé 逼近的零点和极点, 综述	11
1.4 关于广义 Bessel 多项式的零点	19
参考文献	24
第二章 Saff-Varga 宽度猜测 和 Mittag-Leffler 函数	27
2.1 引言	27
2.2 Mittag-Leffler 函数的基本性质	30
2.3 $S_m(z, f_1)$ 在临界扇形 $ \arg z \leq \pi/2\lambda$ 中的零点	32
2.4 $S_m(R_m z)$ 在临界扇形外零点的渐近行为	36
2.5 图 2.1-2.3 的讨论	38
参考文献	41
第三章 Eneström-Kakeya 定理及其界线准确性	42
3.1 引言	42
3.2 Eneström-Kakeya 定理 3.2 中界 (1.3) 的界线准确性	44
3.3 Eneström-Kakeya 定理的推广及其界线准确性	50
参考文献	57
第四章 关于插值多项式之差的超收敛性的 Walsh 定理的推广	59
4.1 引言	59
4.2 在 1 的根处 Walsh 定理的推广	62
4.3 Walsh 定理 4.1 推广到半纯情形	67
4.4 在 1 的根处 Hermite-Birkhoff (H-B) 插值问题	74

4.5 Walsh 定理中 ρ^2 的界线准确性	77
参考文献	81
第五章 最优复和实有理逼近的对比	84
5.1 引言	84
5.2 用交替集说明唯一性和非唯一性	86
5.3 定理5.2 和 5.3 的界线准确化	92
5.4 最后的评论和另一些未解决的问题	94
参考文献	96
第六章 关于奇函数和偶函数的Lorentz猜测	98
6.1 引言	98
6.2 Lorentz猜测6.1: 一些部分结果	99
6.3 Lorentz猜测6.2-6.4: 一些部分结果	104
参考文献	107
第七章 Whittaker 猜测和 “1/9” 猜测	108
7.1 引言	108
7.2 Whittaker猜测: 历史	108
7.3 反驳Whittaker猜测7.1	112
7.4 “1/9” 猜测	116
参考文献	122

第一章 e^z 的 Padé 逼近的零点 和极点, 以及广义 Bessel 多项式的零点

1.1 引言

我对 Padé 逼近的零点和极点的兴趣起始于我在哈佛大学研究生院的年代, 在那里, 求 e^z 的部分和 $s_n(z) := \sum_{j=0}^n z^j/j!$ 的零点位置首先迷住了我。1952 年我第一次发表的论文 [1.17] 实际上证明了, 当 $n \geq 1$ 时, 任何 $s_n(z)$ 都没有零点位于对称半带状区域

$$\{z = x + iy : x \geq 0 \text{ 和 } |y| \leq \sqrt{6}\} \quad (1.1)$$

之内。正如我们即将看到的, 当我们考虑到现在已有的结果时, 这个结果是相当粗糙的!

$\{s_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 的所有零点都画在图 1.1 里, 这些零点的图形强烈地提示存在一个几乎“抛物形”的集合, 它对正实轴对称, 其中没有 $\{s_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何零点。

这里值得重温一下有关 e^z 的部分和 $\{s_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 的无零点抛物形区域的发展历史。根据 Iverson [1.7] 中早期的数值结果, 它们很类似于图 1.1 的结果, 1953 年时存在这种无零点“抛物形”区域的可能性就已经很明显。这个问题被搁置了近二十年。直到 1972 年 Newman 和 Rivlin [1.9] 才又宣布了这种无零点抛物形集合存在。

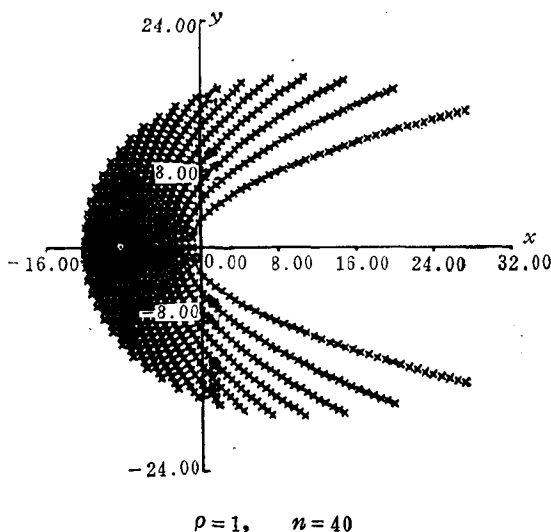


图 1.1

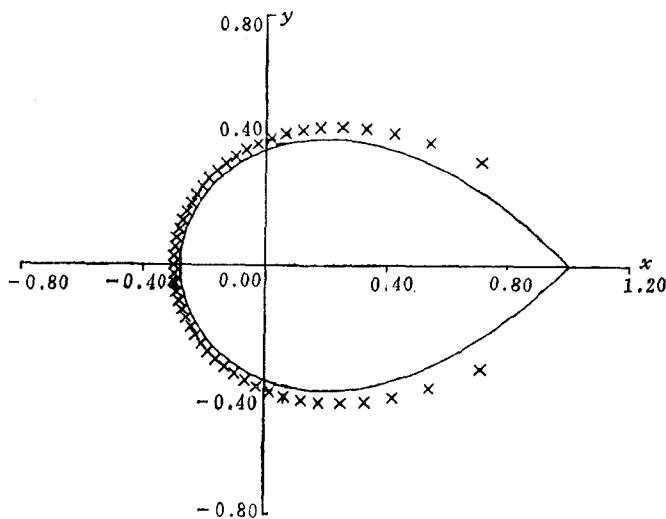
因为他们的证明方法是不正确的，有必要撤回这个结论，但是稍后一些时候，在1976年〔1.10〕中他们又严格地确立了这种集合的存在性。十分有趣的是，几乎在1976年同时，Saff和Varga〔1.13〕利用完全不同的方法，建立了“更大的”这种抛物形集合的存在性。此外，他们的方法不仅适用于由 e^s 部分和组成的Padé表的第一行，也适用于Padé逼近的每一行。在1.2节里我们将讨论Saff和Varga〔1.13〕的结果，它们的应用以及界线准确性。

重要的是在这里我们要强调数值结果，如图1.1所示的结果，能洞察进一步的理论发展（但不是证明）。这将是本书反复要谈到的话题。

e^s 的部分和 $\{s_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 具有这种无零点的抛物形集

合不是很古怪吗？自然要问一个抛物线和这个特定的函数 e^z 有什么关系？我们即将看到，这和第二章中我们讨论的 Saff—Varga 宽度猜测有关。

区别图1.1中 $\{s_n(z)\}_{n=1}^{40}$ 的零点图形和图1.2中正规化多项式 $s_{49}(49z)$ 的零点图形之间的不同也是很重要的。图1.2表明，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $S_n(nz)$ 的零点有一种渐近的位置和分布。早在1924年，Szegő 在 [1.16] 这篇十分值得注意的文章中，在**没有**现代计算机的帮助和启发下，就提出了当 $n \rightarrow \infty$ 时， $S_n(nz)$ 零点的这种结果！在1.3节，我们将把 Szegő 的工作推广到 e^z 的 Padé 逼近中去。



$$\rho=1, \quad n=49$$

图 1.2

因为 1.3 节中的渐近方法也适用于 **广义 Bessel 多项式 (GBP)** 的零点，在 1.4 节中我们将处理对 GBP 的这种推

广。基于图 1.7—1.10 给出的数值结果，我们还提出这个领域中两个新的猜测。

1.2 多项式序列的无零点抛物线区域

Saff 和 Varga [1.13] 中关于多项式序列的无零点抛物形区域的主要结果，对于后面的叙述是基本的知识，我们把它写成：

定理 1.1 ([1.13])。令 $\{p_k(z)\}_{k=0}^n$ 为相应次数 k 的多项式序列，且满足三项递推公式

$$p_k(z) = \left[\frac{z}{b_k} + 1 \right] p_{k-1}(z) - \frac{z}{c_k} p_{k-2}(z),$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

其中 b_k 和 c_k 都是正数，而且 $p_{-1}(z) = 0$ ， $p_0(z) = p_0 \neq 0$ 。
设

$$\alpha = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ b_k \left[1 - \frac{b_{k-1}}{c_k} \right] \right\} \quad (2.2)$$

其中 $b_0 = 0$ 。如果 $\alpha > 0$ ，则抛物线区域

$$P_\alpha = \{ z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\alpha(x + \alpha), x > -\alpha \} \quad (2.3)$$

不包含 $\{p_k(z)\}_{k=1}^n$ 的零点。

证明：令 z 是 P_α 中的任何固定点，但不是任何 $p_k(z)$ 的零点，其中 $1 \leq k \leq n$ ，且定义

$$\mu_k = \mu_k(z) = \frac{z p_{k-1}(z)}{b_k p_k(z)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

根据 (2.1), μ_k 还可表示为

$$\mu_k = \frac{z}{z + b_k - b_k c_k^{-1} b_{k-1} \mu_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (2.5)$$

于是

$$\mu_k = T_k(\mu_{k-1}) \quad (2.6)$$

其中

$$\xi := T_k(w) := \frac{z}{z + b_k - b_k c_k^{-1} b_{k-1} w}$$

证明的方法是用归纳法

$$\operatorname{Re} \mu_k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

首先, 当 $k = 1$ 时, 利用 (2.1) 和 (2.4) 可得 $\mu_1 = \frac{z}{(z + b_1)}$,

从而, 当且仅当 $\operatorname{Re} z \geq -b_1$ 时, $\operatorname{Re} \mu_1 \leq 1$ 。但由于 $z \in P_\alpha$, 所以 $\operatorname{Re} z > -\alpha \geq -b_1$, 最后的等式是由 (2.2) 得出的。

因此 (2.7) 当 $k = 1$ 时成立。其次, 利用归纳法假设 $\operatorname{Re} \mu_{k-1} \leq 1$, 则 μ_k 就落在 (2.6) 式经变换 T_k 后的半平面 $\operatorname{Re} w \leq 1$ 的映象之中。现在, 利用 (2.2) 和 $\operatorname{Re} z > -\alpha$ 这一事实, 就可以验证 T_k 的极点, 即 $w_k := (z + b_k) c_k / b_k b_{k-1}$ 满足 $\operatorname{Re} w_k > 1$ 。因此, T_k 把 $\operatorname{Re} w \leq 1$ 映射到 ξ 平面上的一个闭盘 D_k 之上。 D_k 的半径 r_k 和中心 ξ_k 可以由几何关系显式地计算出来, 由此我们可以导出 (见 [1.13]) $r_k + \operatorname{Re} \xi_k \leq 1$, 即 $\operatorname{Re} \mu_k \leq 1$, 这就对 (2.7) 完成了归纳。

其次利用 (2.1), 可以得出 $0 \neq p_0(0) = p_1(0) = \dots = p_k(0)$, 以及 $p_k(z)$ 和 $p_{k-1}(z)$ 无公共零点。那么, 如果某一个 $z_0 \in P_\alpha$ 使得 $p_k(z_0) = 0$, 从 (2.1) 和 (2.4) 就得出

$$c_k = \frac{(z_0 + b_k)}{b_k b_{k-1}} = \mu_{k-1}(z_0)$$

现在, 从连续性考虑, (2.7) 给出 $\operatorname{Re} \mu_{k-1}(z_0) \leq 1$ 。于是, 根据 (2.2), 上述关系式给出 $\operatorname{Re} z_0 \leq -\alpha$, 这和假设 $z_0 \in P_\alpha$ 相矛盾。因此, 对于每个 $k = 1, 2, \dots, n$ 不可能有 $p_k(z)$ 的零点在 P_α 之内。 $\square$

至于把定理 1.1 推广到幂级数部分和的插值多项式序列的无零点抛物线区域, 见 Henrici [1.6]。新近把定理推广到复系数三项递推式的结果, 见 Runckel [1.22] 和 Leopold [1.21]。定理 1.1 推广到四项递推式的结果, 见 de Bruin [1.20]。

显然, 如果序列 $\{p_k(z)\}_{k=1}^\infty$ 对于所有的 $k \geq 1$ 满足 (2.1), 且

$$\alpha := \inf_{k \geq 1} \left\{ b_k \left[1 - \frac{b_{k-1}}{c_k} \right] \right\}$$

满足 $\alpha > 0$, 则定理 1.1 告诉我们 (2.3) 的 P_α 不包含无穷序列 $\{p_k(z)\}_{k=1}^\infty$ 的任何零点, 我们后面将要用到这一事实。

为了指出和 Padé 逼近式的关系, 考虑任何形式幂级数

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \quad a_0 \neq 0, \quad (2.8)$$

并定义相应的 Hankel 行列式如下: 对于 $n \geq 0, v \geq 1$,

$$A_n^{(0)} := 1, n \geq 0; \quad A_n^{(v)} := \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-v+1} \\ a_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n-v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+v-1} & a_{n+v-2} & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

并约定, 对于 $j = 1, 2, \dots, a_{-j} = 0$ 。那么, 给定任何

非负整数对 (n, ν) , $f(z)$ 的 (n, ν) 型的 **Padé 逼近式** (见 Perron [1.12]) 是如下形状的有理函数 $R_{n, \nu}(z)$:

$$R_{n, \nu}(z) = \frac{P_{n, \nu}(z)}{Q_{n, \nu}(z)} \quad (2.10)$$

其中如果 π_m 表示次数最多为 m 全体复系数多项式的集合, 那么

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } P_{n, \nu} \in \pi_n; \quad Q_{n, \nu} \in \pi_\nu, \text{ 而且 } Q_{n, \nu}(z) \neq 0; \\ \text{ii) } Q_{n, \nu}(z)f(z) - P_{n, \nu}(z) \text{ 在零点的幂级数} \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

展开式从 z 的 $(n + \nu - 1)$ 次幂开始。

众所周知 (见 [1.12]), 如果,

$$A_n^{(\nu)} \neq 0, \quad (2.12)$$

那么下述多项式显然满足 (2.11)

$$P_{n, \nu}(z) = \frac{1}{A_n^{(\nu)}} \sum_{j=0}^n z^j \det \begin{pmatrix} a_j & a_{j-1} & \cdots & a_{j-\nu} \\ a_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n-\nu+1} \\ a_{n+2} & a_{n+1} & \cdots & a_{n-\nu} \\ \vdots & & & \\ a_{n+\nu} & a_{n+\nu-1} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

和

$$Q_{n, \nu}(z) = \frac{1}{A_n^{(\nu)}} \det \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 & \cdots & z^\nu \\ a_{n+1} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-\nu+1} \\ a_{n+2} & a_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n-\nu+2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n+\nu} & a_{n+\nu-1} & & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

如果 $A_n^{(\nu)} \neq 0$, 我们就称 (2.13) 的 $P_{n, \nu}(z)$ 为 (n, ν)

型的Padé分子，而称 (2.14) 的 $Q_{n,\nu}(z)$ 为 (n, ν) 型的 **Padé分母**。

用上述记号，我们给出定理 1.1 下述重要推论。

推论 1.2 ([1.13])。令 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ 是个形式幂级数，并假设对于固定的 $\nu \geq 0$ ，相应的Hankel行列式 (2.9) 满足

$$\left. \begin{aligned} A_k^{(\nu)} > 0, \quad A_k^{(\nu+1)} > 0, \quad k=0, 1, \dots, n \\ A_k^{(\nu+2)} > 0, \quad k=0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

则 $f(z)$ 在 (2.13) 中的 Padé 分子 $\{P_{j,\nu}(z)\}_{j=0}^n$ 没有零点落在 (2.3) 中的抛物线区域 P_a 之内。这里正的常数 a 定义为

$$a = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{A_k^{(\nu)} A_{k-1}^{(\nu+1)}}{A_{k-1}^{(\nu+1)} A_k^{(\nu+1)}} \right\} \quad (2.16)$$

证明：Frobenius [1.3] 中的一个古典恒等式断言，Padé 分子 (2.13) 满足

$$P_{k,\nu}(z) = \left[\frac{z}{b_{k,\nu}} + 1 \right] P_{k-1,\nu}(z) - \frac{z}{c_{k,\nu}} P_{k-2,\nu}(z), \quad (2.17)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} b_{k,\nu} &:= -\frac{A_k^{(\nu)} A_{k-1}^{(\nu+1)}}{A_{k-1}^{(\nu)} A_k^{(\nu+1)}}, \quad k \geq 1 \\ c_{k,\nu} &:= \frac{A_{k-1}^{(\nu)} A_{k-2}^{(\nu+1)}}{A_{k-2}^{(\nu)} A_{k-1}^{(\nu+1)}}, \quad k \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

而且 $c_{1,\nu} = 1$ 。显然，根据假设 (2.15)，所有 $b_{k,\nu}$ 和

$c_{k,,}$ 是正的。利用已知恒等式

$$[A_{k-1}^{(r+1)}]^2 - A_{k-1}^{(r+1)} A_k^{(r+1)} = A_{k-1}^{(r+1)} A_{k-1}^{(r)}, \quad (2.19)$$

我们可以看出 (2.16) 定义的 α 就变成 (2.2) 中的那个量 (其中 $b_k = b_{k,,}$ 和 $c_k = c_{k,,}$), 再应用定理 1.1 就得到所要的结果。□

我们把求出 e^z 的 Padé 分子 $P_{n,,}(z)$ 的无零点区域, 作为定理 1.1 和推论 1.2 的一个具体应用。众所周知 (见 [1.12, 433 页]) e^z 的 Padé 分子 $P_{n,,}(z)$ 和分母 $Q_{n,,}(z)$ 可由下面的显式给出

$$\left. \begin{aligned} P_{n,,}(z) &= \sum_{j=0}^n \frac{(n+v-j)! n! z^j}{(n+v)! j! (n-j)!} \\ Q_{n,,}(z) &= \sum_{j=0}^v \frac{(n+v-j)! v! z^j}{(n+v)! j! (v-j)!} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

推论 1.3 ([1.13])。对于任何 $v \geq 0$, e^z 的 Padé 分子序列 $\{P_{n,,}(z)\}_{n=1}^\infty$ 在 (2.3) 中的抛物形区域 P_{v+1} 之内没有零点。

证明: 众所周知, 当 $s \geq 1$ 时, e^z 的 Hankel 行列式 $A_m^{(s)}$ 为

$$A_m^{(s)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^m j(j+1)\cdots(j+m-1)} \quad (2.21)$$

从而, 直接应用推论 1.2, 就得无穷序列 $\{P_{n,,}(z)\}_{n=1}^\infty$ 在抛物形区域 P_{v+1} 中没有零点。□

定理 1.1 及其推论 1.2 和 1.3 界线准确的程度如何? 界线非常准确! 为了说明这一点, 可以等价地叙述推论 1.3 为, 对任何 $n \geq 0$ 和 $v \geq 0$, e^z 的所有正规化的 Padé 分子 $P_{n,,}$