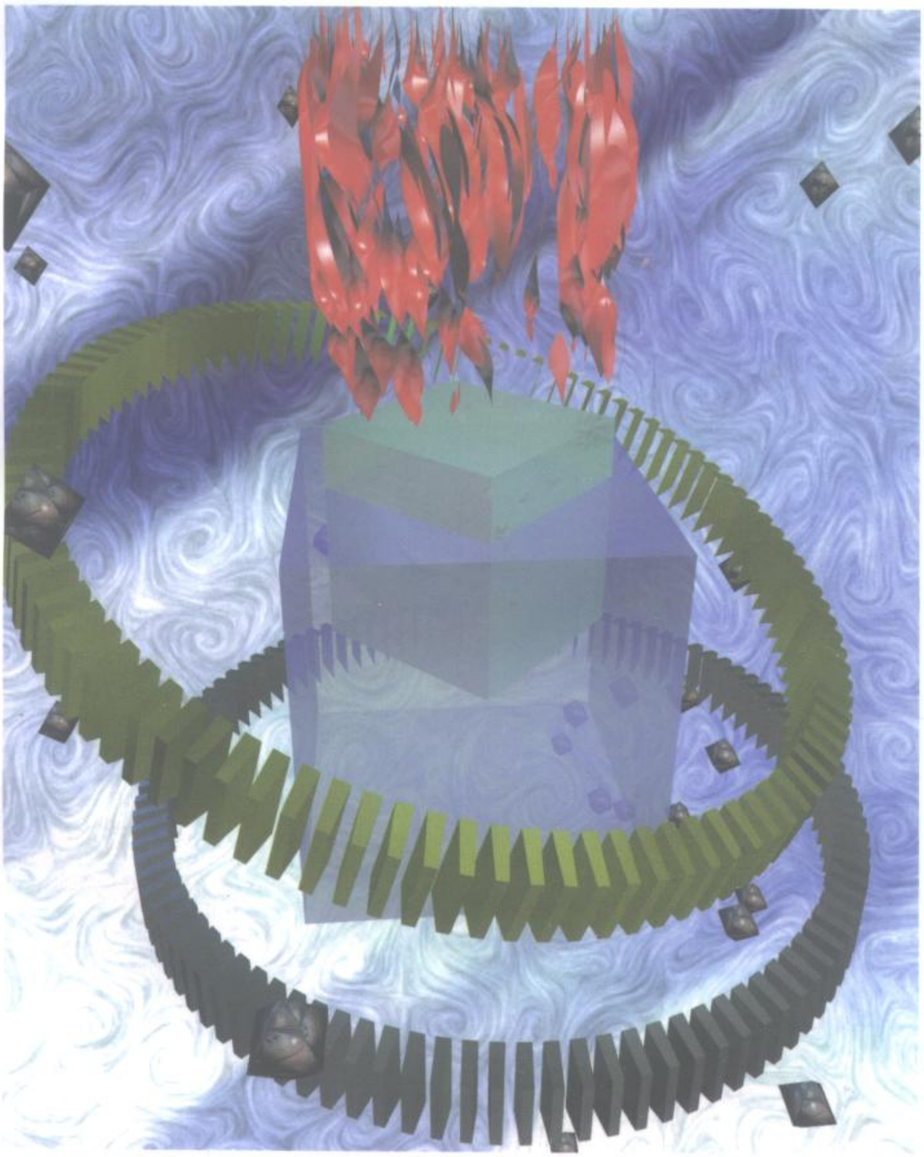
SHUXUE JIANMO DAOLUN

数学建模导论

陈理荣　主编



北京邮电大学出版社

数学建模导论

陈理荣 主编

北京邮电大学出版社

内容简介

本书共分十一章，分别为数学建模概述、规划模型、网络图论模型、组合最优化模型、差分方程模型、微分方程模型、变分法建模、插值与数据拟合建模、随机性模型、决策与对策模型、计算机模拟。书中通过大量的建模范例阐述数学建模的思想和方法，旨在培养读者的洞察力、想象力以及分析问题、解决问题的能力。本书内容丰富、范例生动、通俗易懂、便于自学。每章末附有适当的习题，供读者练习之用。

本书可作为工科院校本、专科生教材，也可供研究生、工程技术人员和管理干部参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模导论/陈理荣主编；崔景泉等编. -北京：北京邮电大学出版社，1999.2

ISBN 7-5635-0348-X

Ⅰ.数…　Ⅱ.①陈…　②崔…　Ⅲ.建立模型-高等学校-教材　Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 33319 号

出版发行　北京邮电大学出版社　　电话：(010)62282185(发行部)
社　　址　北京市海淀区西土城路 10 号
经　　销　各地新华书店经售
印　　刷　河北省高碑店市印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　17.5
字　　数　445 千字
版　　次　1999 年 2 月第 1 版　　1999 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-5635-0348-X/O・21
印　　数　4 000 册
定　　价　24.50 元

前　言

数学建模是一种具有创新性的科学方法，它将现实问题简化、抽象为一个数学问题或数学模型，然后采用恰当的数学方法求解，进而对现实问题进行定量分析和研究，最终达到解决实际问题之目的。在科学数学化的进程中，数学建模为组织和构造新知识提供方法，有力地推进了各门科学的发展和完善；随着计算机应用的发展，数学建模又成为高新科技的一种“数学技术”，起着关键性的作用，使高新科技不断取得丰硕成果；时代的进步又使数学建模的内涵愈来愈丰富，愈来愈深刻，现在已发展成为一门独立的新学科。

实践证明：在大学里开设数学建模课程，对于培养学生的洞察力、想象力、逻辑思维以及分析问题、解决问题的能力，是一条行之有效的途径，为之国家教委给予了高度重视，也深受广大学生的欢迎. 目前，世界许多国家的大学都开设了数学建模课程。

在清华大学肖树铁教授的倡导下，在叶其孝、姜启源、谭永基、任善强、李尚志等一批数学家的带领下，我国数学建模教育的发展异常迅速，并开展了一年一度的全国大学生数学建模竞赛活动。我们邮电院校积极学习兄弟院校的先进经验，从 1992 年开始开展数学建模教育和数学建模竞赛的培训以来，对如何通过数学建模教育来提高学生的数学素质，以及如何让更多的学生在数学建模教育中受益，作了一些尝试和探索，取得了一些经验。我们邮电各高等院校联合编写《数学建模导论》一书，正是我们总结这些经验之后，向前迈出的一步。

本书作为“导论”主要是面向初次学习数学建模的大学本、专科学生。书中除了为他们补充一些基本的应用数学知识之外，主要是通过精选各领域的建模范例来展示数学建模的思想和方法，让读者从中领悟什么是数学建模，怎样进行数学建模，如何利用计算机进行建模，以及如何通过数学模型去分析、解决实际问题等，从而达到发展思维和发展想象力的作用。

全书共分十一章，由下列同志参加编写：长春邮电学院崔景泉（第二章），重庆邮电学院杨春德（第三、四章），北京邮电大学罗守山（第五、六章），西安邮电学院李昌兴（第八、九章），南京邮电学院杨振华（第十一章），重庆邮电学院陈理荣（第一、七、十章）。陈理荣担任主编。

本书得到邮电部教育司的支助，受到邮电部公共基础课教指委的热情关怀和支持，各院校对本书的编写非常重视，派出了热心数学建模教育的骨干教师参加编写工作，任善强教授和叶正麟教授审阅了全书，提出了很多宝贵意见，在此，向他们一并表示诚挚的谢意。

数学建模是一门新课，教学内容和教学方法都在探索之中，编写教材的难度较大，再加上编者水平有限，本书必然存在很多不足之处，诚恳希望广大读者提出宝贵意见，以便进一步修改。

编　者　1998 年 1 月

目　录

第一章　数学建模概述

科学的数学化是当代科学发展的一个主要趋向，它已经在不同的程度上涉及一切科学领域和人类活动的各个方面. 数学模型是数学科学联结其它非数学科学的中介和桥梁，它不仅是对实际问题的数学描述，而且是对实际问题进行理论分析和科学研究的有力工具. 因此，建立数学模型或数学建模是发展科学和解决实际问题首先需要解决的关键课题，其内容十分丰富、广泛，目前已发展为一门新学科.

本章介绍数学建模的基本概念、建模步骤以及建模的方法和原则，并通过几个典型建模实例展示其概貌.

第一节　数学模型

一、原型和模型

现实世界五彩缤纷、变化万千，向人们呈现着千姿百态的事物，诸如太阳系、山川河流、大海、湖泊、植物群、动物群、建筑物、飞机、导弹、卫星、宇宙飞船、铁路网、公路网、电力网、通信网、工矿企业以及一种制度、一个思想体系、一个工程计划、一个研究项目等等都是事物.

所谓原型(prototype)就是人们在社会实践中所关心和研究的现实世界中的事物(或对象). 在科技领域常常把所考察的原型用“系统”或“事物系统”等术语代之，如机械系统、电力系统、通信系统、生态系统、生命系统、经济系统、管理系统等等. 其实，现实世界中的一切事物都符合“系统是由相互依存、相互作用的若干元素结合而成的具有特定功能的有机整体”的含义，而且系统的观点能让人们更好地认识和把握事物. 人们所关心和研究的事物或系统总是存在着矛盾，矛盾就是问题，研究事物或系统就是去解决问题. 事物或系统总是处于运动变化的过程之中，如何把握它们在运动变化过程中的规律性，是研究事物或系统的根本问题. 因此，本书中所述的“现实对象”、“研究对象”、“实际问题”、“事物系统”以及“事物过程”等术语都是指事物的原型.

所谓模型(model)是指为了某个特定目的将原型所具有本质属性的某一部分信息经过简化、提炼而构造的原型替代物. 一个原型，为了不同的目的可以有多种不同的模型. 例如，为了制定大型企业的生产管理计划，模型就不必反映各生产装置的动态特性，但必须反映产品的产量、销售量和库存原料量等变化情况. 也就是说，各装置的动态特性对这种模型来说是非本质的. 相反，为了实现各生产装置的最佳运行，模型就必须详细地描述各装置内部状态变化的生产过程动态特性. 这时，各装置的动态特性就变成了本质的. 可见，模型所反映的内容将因其使用的目的不同而不同.

模型一般分为具体模型和抽象模型两大类. 具体模型有直观模型、物理模型等，抽象模型有思维模型、符号模型、数学模型等. 本书专门讨论数学模型.

二、数学模型的概念

其实，我们对于数学模型(mathematical model)并不陌生，例如在力学中描述力、质量和加速度之间关系的牛顿第二定律($F = ma$)就是一个典型的数学模型. 然而，什么是数学模型，目前尚无统一的定义，下面介绍两种常见的看法：

(1) 什么是数学模型? 概言之，就是对某种事物系统的特征和数量关系，借助数学语言而建立起来的符号系统. 详言之，数学模型有广义理解和狭义理解. 按广义理解：凡是以相应的客观原型作为背景加以一级抽象或多级抽象的数学概念、数学式子、数学理论等等都叫做数学模型. 按狭义理解：那些反映特定问题或特定事物系统的数学符号系统就叫做数学模型. 在应用数学中所指的数学模型，通常是按狭义理解的，而且构造数学模型的目的仅在于解决具体的实际问题.

(2) 按照 E. A. Bender 的提法，数学模型乃是"关于以部分现实世界为一定目的而做的抽象、简化的数学结构".

除这两种看法之外，还有一些关于数学模型定义的其它说法. 但是，它们都在讲用数学描述实际问题，不必过于追求严格定义. 通俗地讲，数学模型不是原型的复制品，而是为一定的目的对原型所作的一种抽象模拟，它用数学式子、数学符号、程序、图表等刻划客观事物的本质属性与内在联系，是对现实世界的抽象、简化而又本质的描述. 它源于现实，且高于现实. 它或者能解释事物的各种性态，预测它将来的性态；或者能为控制某一事物的发展提供最优化策略；等等，都是为了最终达到解决实际问题之目的.

三、数学模型的分类

数学模型按照不同的分类标准有着多种分类.

(1) 按照人们对原形的认识过程来分，数学模型可以分为描述性的数学模型和解释性的数学模型.

描述性的模型是从特殊到一般，它是从分析具体客观事物及其状态开始，最终得到一个数学模型. 客观事物之间量的关系通过数学模型被概括在一个具体的抽象的数学结构之中.

解释性的模型是由一般到特殊，它是从一般的公理系统出发，借助于数学客体，对公理系统给出正确解释的一种数学模型.

(2) 按照模型的应用领域分，如人口模型、交通模型、电气系统模型、通信系统模型、机电系统模型、环境模型、生态模型、水资源模型、再生资源利用模型、传染病模型和污染模型等.

(3) 按照建立模型的数学方法分，如几何模型、代数模型、图论模型、规划论模型、微分方程模型、最优控制模型、信息模型、随机模型、决策与对策模型、模拟模型等.

(4) 按照模型的特征分，如静态模型和动态模型、确定性模型和随机模型、离散模型和连续性模型、线性模型和非线性模型等.

(5) 按照对模型结构了解的程度分，有所谓的白箱模型、灰箱模型和黑箱模型，它们分别意味着人们对原型的内在机理了解清楚、不太清楚和不清楚.

四、数学模型的作用

数学模型的根本作用在于它将客观原型化繁为简、化难为易，便于人们采用定量的方法去分析和解决实际问题. 正因为如此，数学模型在科学发展、科学预见、科学预测、科学管理、科学

决策、驾控市场经济乃至个人高效工作和生活等众多方面发挥着特殊的重要作用.

马克思指出:"一种科学只有成功地应用数学时,才算达到了真正完善的地步". 数学模型给科学研究的对象以定量描述,从而把科学推向更高的阶段.

回顾科学发展史,数学模型对很多科学概念的表达、科学规律的揭示以及科学体系的形成都起到了不可缺少的重要作用. 例如物理学中的很多重要概念,诸如瞬时速度、瞬时电流、物体受力沿曲线做功等等很难用语言说清楚,而用导数、积分就清楚而准确地表达了这些概念的意义. 又如历史上关于物体运动原因的探讨,开始研究时,科学家们单从质的方面寻找物体运动的原因,由亚里士多德提出的"力是产生运动的原因",一直步入到将物体运动的原因"归结为上帝"的错误结论. 以后,伽利略不纠缠于物体运动的质的分析,他从量的方面着手,即从揭示物体运动是按照什么样的数量关系处于运动状态的,才发现了物体运动定律:惯性定律,并得到"力是物体产生加速运动的原因"的科学结论. 再如电磁学的理论体系是建立在麦克斯韦构建的方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

之上的. 其应用范围十分广泛,包括了像电动机、回旋加速器、电视机以及微波雷达等所有这些大型电磁设备的基本原理,都来自麦克斯韦方程组这一数学模型.

当代计算机科学的发展和广泛应用,使得数学模型的方法如虎添翼,加速了数学向各个学科的渗透,产生了众多的边缘学科. 就以生物数学这一新学科来说吧,它是在生物科学研究中,由其各分支运用数学模型和数学方法产生的生态数学、遗传数学、生理数学、仿生数学等内容构成的. 当今几乎所有重要的学科,只要在其名称前面或后面加上"数学"或"计算"二字,就成了现有的一种国际学术杂志名称. 这表明各学科正在利用数学方法和数学成果来加速本学科的发展.

数学模型还物化于各种高新科技之中,从家用电器到天气预报,从通信到广播电视,从核电站到卫星,从新材料到生物工程,高科技的高精度、高速度、高安全、高质量、高效率等特点无一不是通过数学模型和数学方法并借助计算机的计算、控制来实现的. 就连计算机本身的产生和进步也是强烈地依赖于数学科学的进展,而计算机软件技术说到底实际上也是数学技术. 因此,"高科技的本质是数学技术","数学是一门整理宇宙的科学"等誉谈是不足为奇的.

第二节　数学建模

数学建模(mathematical modelling)是构造刻划客观事物原型的数学模型并用以分析、研究和解决实际问题的一种科学方法. 运用这种科学方法,建模者必须从实际问题出发,遵循"实践——认识——实践"的辩证唯物主义认识规律,紧紧围绕着建模的目的,运用观察力、想象力和逻辑思维,对实际问题进行抽象、简化,反复探索、逐步完善,直到构造出一个能够用于分析、研究和解决实际问题的数学模型. 因此,数学建模不仅是一种定量解决实际问题的科学方法,而且还是一种从无到有的创新活动过程.

数学建模的成败与人的因素密切相关，人是数学建模的主体，事物原型是数学建模的客体. 在数学建模的过程中，既要发挥人的聪明才智“改造”客体、解决实际问题，又要“改造”建模者自己，从中丰富智慧、增长才干. 一个成功的数学模型总是主体的能动性与客体的规律性达到高度统一的境界时的产物，因此人们常说：数学建模具有强烈的技艺性，建模者要像艺术家那样苦炼功夫，方能修行到家.

数学建模没有固定的模式. 按照建模过程，一般采用的建模基本步骤，如图 1-1 所示，并分述各步骤的含义如下：

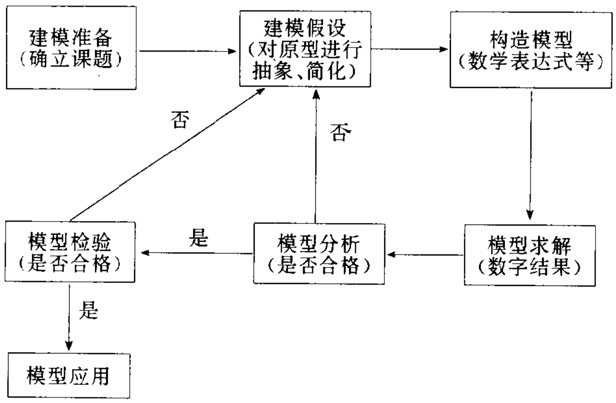


图 1-1　数学建模的基本步骤

1. 建模准备

建模准备是确立建模课题的过程. 数学建模是一项创新活动，它所面临的课题是人们在生产和科研中为了使认识和实践进一步发展必须解决的问题. “什么是问题？问题就是事物的矛盾. 哪里没有解决的矛盾，哪里就有问题”，因此发现课题的过程就是分析矛盾的过程. 贯穿生产和科技中的根本矛盾是认识和实践的矛盾，我们分析这些矛盾，从中发现尚未解决的矛盾，就是找到了需要解决的实际问题. 如果这些实际问题需要给出定量的分析和解答，那么就可以把这些实际问题确立为数学建模的课题.

显然，如果有人拿一个数学建模课题向你咨询，那么你首先就应该深入生产和科研实际以及社会生活实际，掌握与课题有关的第一手资料，汇集与课题有关的信息和数据，弄清问题的实际背景和建模的目的，进行建模筹划，组织必要的人力和物力等，然后以创新者的勇气和魄力将问题确立为你的数学建模课题.

2. 建模假设

作为课题的原型都是复杂的、具体的，是质和量、现象和本质、偶然和必然的统一体. 这样的原型，如果不经过抽象和简化，人们对其认识是困难的，也无法准确把握它的本质属性. 而建模假设就是根据建模的目的对原型进行抽象、简化. 把那些反映问题本质属性的形态、量及其关系抽象出来，简化掉那些非本质的因素，使之摆脱原型的具体复杂形态，形成对建模有用的信息资源和前提条件.

但是，对原型的抽象、简化不是无条件的，必须按照假设的合理性原则进行. 假设合理性原则有以下几点：

(1) 目的性原则：从原型中抽象出与建模目的有关的因素，简化掉那些与建模目的无关的

或关系不大的因素.

(2) 简明性原则:所给出的假设条件要简单、准确,有利于构造模型.

(3) 真实性原则:假设条款要符合情理,简化带来的误差应满足实际问题所能允许的误差范围.

(4) 全面性原则:在对事物原型本身作出假设的同时,还要给出原型所处的环境条件.

3. 构造模型

在建模假设的基础上,进一步分析建模假设的各条款,首先区分哪些是常量,哪些是变量;哪些是已知的量,哪些是未知的量;然后查明各种量所处的地位、作用和它们之间的关系,选择恰当的数学工具和构造模型的方法对其进行表征,构造出刻划实际问题的数学模型.

在构造模型时究竟采用什么数学工具,要根据问题的特征、建模的目的要求及建模人的数学特长而定.可以这样讲,数学的任一分支在构造模型时都可能用到,而同一实际问题也可以构造出不同的数学模型.一般地讲,在能够达到预期目的的前提下,所用的数学工具越简单越好.

在构造模型时究竟采用什么方法构造模型,要根据实际问题的性质和建模假设所给出的建模信息而定.就以系统论中提出的机理分析法和系统辨识法来说吧,它们是构造数学模型的两种基本方法.机理分析法是在对事物内在机理分析的基础上,利用建模假设所给出的建模信息或前提条件来构造模型;系统辨识法是对系统内在机理无所知的情况下利用建模假设或实际对系统的测试数据所给出的事物系统的输入、输出信息来构造模型.随着计算机科学的发展,计算机模拟有力地促进了数学建模的发展,也成为一种重要的构造模型的基本方法.这些构模方法各有其优点和缺点,在构造模型时,可以同时采用,以取长补短,达到建模的目的.

4. 模型求解

构造数学模型之后,根据已知条件和数据,分析模型的特征和模型的结构特点,设计或选择求解模型的数学方法和算法,然后编写计算机程序或运用与算法相适应的软件包,并借助计算机完成对模型的求解.

5. 模型分析

根据建模的目的要求,对模型求解的数字结果,或进行稳定性分析,或进行系统参数的灵敏度分析,或进行误差分析等.通过分析,如果不符合要求,就修改或增减建模假设条款,重新建模,直到符合要求.如果通过分析符合要求,还可以对模型进行评价、预测、优化等方面的分析和探讨.

6. 模型检验

模型分析符合要求之后,还必须回到客观实际中去对模型进行检验,看它是否符合客观实际.若不符合,就修改或增减假设条款,重新建模.循环往复,不断完善,直到获得满意结果.

目前计算机技术已为我们进行模型分析、模型检验提供了先进的手段,充分利用这一手段,可以节约大量的时间、人力和经费.

7. 模型应用

模型应用是数学建模的宗旨,也是对模型的最客观、最公正的检验.因此,一个成功的数学模型,必须根据建模的目的,将其用于分析、研究和解决实际问题,充分发挥数学模型在生产和科研中的特殊作用.

以上介绍的数学建模基本步骤应该根据具体问题灵活掌握,或交叉进行,或平行进行,不

拘一格地进行数学建模则有利于建模者发挥自己的才能.

第三节　发射卫星为什么用三级火箭

采用运载火箭把人造卫星发射到高空轨道上运行，为什么不能用一级火箭而必须用多级火箭系统？为什么一般都采用三级火箭系统？

下面通过建立运载火箭有关的数学模型来回答上述问题.

火箭是一个复杂的系统，为了使问题简单明了，我们只从动力系统和整体结构上分析，并且假设引擎是足够强大的.

一、为什么不能用一级火箭发射人造卫星

下面用三个数学模型回答这个问题.

1. 卫星进入 600 km 高空轨道时，火箭必须的最低速度

首先将问题理想化，**假设**：

(1) 卫星轨道是以地球中心为圆心的某个平面上的圆周，卫星在此轨道上以地球引力作为向心力绕地球作平面匀速圆周运动；

(2) 地球是固定于空间中的一个均匀球体，其质量集中于球心；

(3) 其它星球对卫星的引力忽略不计.

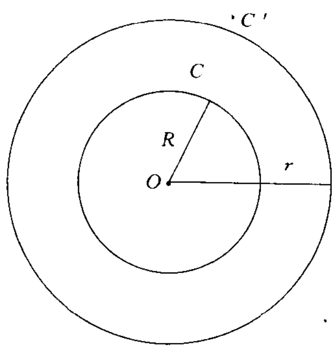


图 1-2　卫星运行轨道示意图

建模与求解：设地球半径为 R，中心为 O，质量为 M，曲线 C 表示地球表面，C' 表示卫星轨道，C' 的半径为 r，卫星的质量为 m，如图 1-2 所示.

根据假设(2)和(3)，卫星只受到地球的引力，由牛顿万有引力定律可知其引力大小为

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \qquad (1.3.1)$$

其中 G 为引力常数.

为消去常数 G，把卫星放在地球表面，则由(1.3.1)式得

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \qquad 或 \qquad GM = R^2 g,$$

再代入(1.3.1)式，得

$$F = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2, \qquad (1.3.2)$$

其中 $g = 9.81(m/s^2)$ 为重力加速度.

根据假设(1)，若卫星围绕地球作匀速圆周运动的速度为 v，则其向心力为 mv^2/r. 因为卫星所受的地球引力就是它作匀速圆周运动的向心力，故有

$$mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{mv^2}{r}.$$

由此便推得卫星距地面为 $(r-R)$ km，必须的最低速度的数学模型为

$$v = R\sqrt{\frac{g}{r}}. \qquad (1.3.3)$$

取 $R=6\,400$ km, $r-R=600$ km，代入上式，得

$$v \approx 7.6 \text{ km/s},$$

即要把卫星送入离地面 600 km 高的轨道，火箭的末速度最低应为 7.6 km/s.

2. 火箭推进力及升空速度

火箭的简单模型是由一台发动机和一个燃料仓组成. 燃料燃烧产生大量气体从火箭末端喷出，给火箭一个向前的推力. 火箭飞行要受地球引力、空气阻力、地球自转与公转等的影响，使火箭升空后作曲线运动. 为使问题简化，**假设**：

(1) 火箭在喷气推动下作直线运动，火箭所受的重力和空气阻力忽略不计；

(2) 在 t 时刻火箭质量为 $m(t)$，速度为 $v(t)$，且均为时间 t 的连续可微函数；

(3) 从火箭末端喷出气体的速度(相对火箭本身) 为常数 u .

建模与分析：由于火箭在运动过程中不断喷出气体，使其质量不断减少，在 $(t,t+\Delta t)$ 内的减少量可由台劳展式表示为

$$m(t+\Delta t)-m(t)=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t+o(\Delta t^2). \tag{1.3.4}$$

因为喷出的气体相对于地球的速度为 $v(t)-u$，则由动量守恒定律有

$$m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)-\left[\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t+o(\Delta t^2)\right](v(t)-u). \tag{1.3.5}$$

从(1.3.4)式及(1.3.5)式可得火箭推进力的数学模型为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \tag{1.3.6}$$

令 $t=0$ 时，$v(0)=v_0$，$m(0)=m_0$，求解上式，得火箭升空速度模型

$$v(t)=v_0+u\ln\frac{m_0}{m(t)}. \tag{1.3.7}$$

(1.3.6)式表明火箭所受推力等于燃料消耗速度与喷气速度(相对火箭)的乘积. (1.3.7)式表明，在 v_0, m_0 一定的条件下，升空速度 $v(t)$ 由喷气速度(相对火箭) u 及质量比 $m_0/m(t)$ 决定. 这为提高火箭速度找到了正确途径：从燃料上设法提高 u 值；从结构上设法减小 $m(t)$.

3. 一级火箭末速度上限

火箭——卫星系统——的质量可分为三部分：m_p(有效负载，如卫星)，m_F(燃量质量)，m_s(结构质量，如外壳、燃料容器及推进器). 一级火箭末速度上限主要是受目前技术条件的限制，**假设**：

(1) 目前技术条件为：相对火箭的喷气速度 $u=3$ km/s 及

$$\frac{m_s}{m_F+m_s}\geqslant\frac{1}{9}.$$

(2) 初速度 v_0 忽略不计，即 $v_0=0$.

建模与求解：因为升空火箭的最终(燃料耗尽)质量为 m_p+m_s，由(1.3.7)式及假设(2)得到末速度为

$$v=u\ln\frac{m_0}{m_p+m_s}. \tag{1.3.8}$$

令 $m_s=\lambda(m_F+m_s)=\lambda(m_0-m_p)$，代入上式，得

$$v=u\ln\frac{m_0}{\lambda m_0+(1-\lambda)m_p}, \tag{1.3.9}$$

于是，当卫星脱离火箭，即 $m_p = 0$ 时，便得火箭末速度上限的数学模型为

$$v^0 = u \ln \frac{1}{\lambda}. \tag{1.3.10}$$

由假设(1)，取 $u = 3\text{km}, \lambda = \dfrac{1}{9}$ ，便得火箭末速度上限

$$v^0 = 3 \ln 9 \approx 6.6 \text{ km/s}.$$

因此，用一级火箭发射卫星，在目前技术条件下无法达到在相应高度所需的速度.

二、理想火箭模型

从前面对问题的假设和分析可以看出：火箭推进力自始至终在加速着整个火箭，然而随着燃料的不断消耗，所出现的无用结构质量也在随之不断加速，作了无用功，故效益低，浪费大.

所谓理想火箭，就是能够随着燃料的燃烧不断抛弃火箭的无用结构. 下面建立它的数学模型.

假设：在 $(t, t+\Delta t)$ 时段丢弃的结构质量与烧掉的燃料质量以 α 与 $1-\alpha$ 的比例同时进行.

建模与分析：由动量守恒定律，有

$$\begin{aligned}
m(t)v(t) &= m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - \alpha \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t \cdot v(t) - (1-\alpha)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t \cdot (v-u) + o(\Delta t^2) \\
&= [m(t+\Delta t) - m(t) + m(t)]v(t+\Delta t) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t \cdot v(t) + (1-\alpha)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t \cdot u + o(\Delta t^2) \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t + o(\Delta t^2) + m(t)\right]v(t+\Delta t) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t \cdot v(t) + (1-\alpha)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t \cdot u + o(\Delta t^2) \\
&= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t[v(t+\Delta t) - v(t)] + m(t)v(t+\Delta t) + (1-\alpha)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t \cdot u + o(\Delta t^2),
\end{aligned}$$

即有

$$-m(t)[v(t+\Delta t) - v(t)] = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t[v(t+\Delta t) - v(t)] + (1-\alpha)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t \cdot u + o(\Delta t^2).$$

两端同除以 Δt，并令 $\Delta t \to 0$ ，得

$$-m(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = (1-\alpha)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot u \quad 及 \quad v(0) = 0, m(0) = m_0.$$

解之，便得理想火箭升空速度的数学模型为

$$v(t) = (1-\alpha)u \ln \frac{m_0}{m(t)} \tag{1.3.11}$$

由上式可知，当燃料耗尽，结构质量抛弃完时，便只剩下卫星质量 m_p ，从而最终速度的数学模型为

$$v(t) = (1-\alpha)u \ln \frac{m_0}{m_p} \tag{1.3.12}$$

(1.3.12)式表明：当 m_0 足够大，便可使卫星达到我们所希望它具有的任意速度. 例如，考虑到空气阻力和重力等因素，估计要使 $v = 10.5$ km/s 才行，如果取 $u = 3$ km/s，$\alpha = 0.1$，则可推出 $\dfrac{m_0}{m_p} = 50$ ，即发射 1 吨重的卫星大约需 50 吨重的理想火箭.

三、多级火箭卫星系统

理想火箭是设想把无用结构质量连续抛弃以达到最佳的升空速度，虽然这在目前的技术条件下办不到，但它确为发展火箭技术指明了奋斗目标. 目前已商业化的多级火箭卫星系统便是朝着这种目标迈出的第一步. 多级火箭是从末级开始，逐级燃烧，当第 i 级燃料烧尽时，第 $i+1$ 级火箭立即自动点火，并抛弃已经无用的第 i 级（这里，用 m_i 表示第 i 级火箭质量，m_p 表示有效负载）. 为了简单起见，先做如下**假设**：

（1）设各级火箭具有相同的 β，βm_i 表示第 i 级结构质量，$(1-\beta)m_i$ 表示第 i 级的燃料质量.

（2）喷气相对火箭的速度 u 相同，燃烧级的初始质量与其负载质量之比保持不变，记该比值为 K.

先考虑二级火箭. 由(1.3.7)式，当第一级火箭燃烧完时，其速度为

$$v_1 = u \ln \frac{m_1 + m_2 + m_p}{\beta m_1 + m_2 + m_p} ,$$

在第二级火箭燃烧完时，其速度为

$$v_2 = v_1 + u \ln \frac{m_2 + m_p}{\beta m_2 + m_p} ,$$

将 v_1 代入上式，得

$$v_2 = u \ln \left(\frac{m_1 + m_2 + m_p}{\beta m_1 + m_2 + m_p} \cdot \frac{m_2 + m_p}{\beta m_2 + m_p} \right) . \tag{1.3.13}$$

据假设(2)，$m_2 = Km_p$，$m_1 = K(m_2 + m_p)$，代入(1.3.13)式，仍取 $u = 3$ km/s，近似取 $\beta = 0.1$，可得

$$v_2 = 6 \ln \frac{K+1}{0.1K+1} . \tag{1.3.14}$$

欲使 $v_2 = 10.5$ km/s，由(1.3.14)式，$K \approx 11.2$，从而

$$\frac{m_1 + m_2 + m_p}{m_p} \approx 149 .$$

同理，可推算出三级火箭

$$v_3 = u \ln \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_p}{\beta m_1 + m_2 + m_3 + m_p} \cdot \frac{m_2 + m_3 + m_p}{\beta m_2 + m_3 + m_p} \cdot \frac{m_3 + m_p}{\beta m_3 + m_p} \right)$$

及

$$v_3 = 9 \ln \frac{K+1}{0.1K+1} .$$

欲使 $v_3 = 10.5$ km/s，应该 $K \approx 3.25$，从而

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_p}{m_p} \approx 77 .$$

与二级火箭相比，在达到相同效果的情况下，三级火箭的质量几乎节省了一半.

现记 n 级火箭的总质量（包括有效负载 m_p）为 m_0，在相同假设下（$u = 3$ km/s，$v_{末} = 10.5$ km/s，$\beta = 0.1$），可以算出相应的 m_0/m_p 值，现将计算结果列于表 1.1 中：

表 1.1　n 级火箭初始质量与负载质量比

n(级数)	1	2	3	4	5	…	∞(理想)
m_0/m_p	×	149	77	65	60	…	50

实际上，由于受技术条件的限制，采用四级或四级以上的火箭，经济效益是不合算的，因此采用三级火箭是最好的方案.

第四节　捕鱼业的持续稳产高效益

渔业资源是一种再生资源，实践证明：不能过度开发，应该在追求可持续稳定捕获的前提下夺取高产高效益. 下面通过建立某渔场单一鱼群的数学模型研究如下问题：

(1) 渔场鱼量的变化规律；

(2) 可持续稳定捕获的条件；

(3) 如何在稳定条件下控制捕获量以达到持续高产高效益；

(4) 分析捕捞过度带来的问题.

一、构造渔场鱼量变化规律的数学模型

1. 假设与建模

(1) 在无捕捞的情况下，鱼群的生存和增长只受渔场自然资源和环境条件的限制，假设渔场能容纳鱼群的鱼量为 N，t 时刻鱼群的鱼量为 $x(t)$. 显然，鱼群鱼量的增长率应为 $x(t)$ 的函数 $R(x)$，且是 $x(t)$ 的减函数，一个简单的假定是设增长率 $R(x)$ 与鱼群可增长条件比 $(N-x)/N$ 成正比，即

$$R(x) = r\left(\frac{N-x}{N}\right) = r\left(1-\frac{x}{N}\right), \tag{1.4.1}$$

其中比例系数 r 称为固有增长率.

因为增长率是指在某个时刻 t 单位鱼群在单位时间的增长量，即

$$\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x} = R(x). \tag{1.4.2}$$

所以由式(1.4.1)和(1.4.2)可得到在无捕捞条件下鱼群增长规律的数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x) = r\,x\left(1-\frac{x}{N}\right), \tag{1.4.3}$$

该模型常称为 Logistic 模型. 因为因子 $\left(1-\frac{x}{N}\right)$ 体现了对鱼群增长的阻滞作用，所以也称为阻滞增长模型. $f(x)$ 表示单位时间的增长量.

(2) 渔场鱼量越多越易捕捞，假设单位时间捕捞量 $h(x)$ 与渔场鱼量 $x(t)$ 成正比，比例常数 K 表示单位时间捕捞率. K 可以进一步分解为 $K=qE$，其中 E 称为捕捞强度，用可以控制的参数(如出海的渔船数量)来度量；q 称为捕捞系数，表示单位强度下的捕捞率. 为了方便起见，假定总是选择了合适的捕捞强度单位，使得 $q=1$. 于是单位时间的捕捞量为

$$h(x) = Kx = Ex. \tag{1.4.4}$$