

彈性体系的平衡稳定

阿·魯·尔然尼曾著

人民教育出版社

本书系按苏联国立技术理论书籍出版社出版的阿·鲁·尔然尼曾(А. Р. Ржаницин)著“弹性体系的平衡稳定”(Устойчивость равновесия упругих систем) 1955年版译出。

本书系统地叙述了各种弹性体系的平衡稳定。其内容包括:由一个自由度到若干个自由度的体系稳定的一般理论;各种情况下棱柱形杆稳定的解法;超过弹性限度以外的杆、弹性地基杆及组合杆的稳定;曲杆及工字形截面杆及薄壁的稳定性概述。书中包括了一部分图解法、初参数法及其他苏联学者的成就。

本书叙述简明扼要。适合一般工程技术人员及科学研究人员参考。

弹性体系的平衡稳定

阿·鲁·尔然尼曾著

王惠德等译

人民教育出版社出版 高等学校教材 力学系

(北京市书刊出版业营业许可出字第2号)

民族印刷厂印装 新华书店发行

统一书号 15010·881 大32开本 850×1168¹/₃₂ 印张 15¹¹/₃₂

字数 398,000 印数 0001—45000 定价(8) 半1.30

1960年4月第1版 1960年4月北京第1次印刷

序

結構物的靜力穩定理論在計算工程結構中的彈性及塑性體系時具有很廣泛的應用。

本書的目的在於有系統地敘述平衡的穩定問題。敘述從較簡單的關於有限個自由度體系的問題開始，因為從這些問題可以更為明顯地闡述基本原理。除了有限個自由度的體系外，本書相當詳細地探討了各種杆件和部分平板的穩定問題。本書未涉及到剛架、壳体等更為複雜的體系，因為關於這些體系的計算已有大量專門的研究論文和專門著作。此外，對它們的研究只有在對結構各元件的工作進行了研究以後才有可能。

書中引用了作者的許多研究結果；其中有的是第一次發表，有的在以前曾部分地發表過。書中還利用了其他作者——主要是蘇聯學者的成果。

本書對於杆件穩定計算的圖解法予以很大重視。圖解法除了計算方便外，還可以幫助對問題的理解，這對自如地在實踐中應用它們是非常重要的。

本書中對於很多問題作了新穎的敘述。屬於這類問題的有：基於矩陣運算而用於杆件體系的初參數法；受壓平板彎曲微分方程式的新型解法；對有限個自由度體系的穩定的綫性非齊次問題的研究；有關用彈-柔性連結物結合起來的組合杆件計算的許多問題，等等。應當指出，到目前為止所有教程中關於組合杆件穩定計算問題的闡述仍然是以恩格賽爾和鐵木生柯的不完全精確的理論為基礎的。因此作者認為對此問題尚有更加詳細闡述的必要，雖然此新方法的基本原理在戰前就早已發表過並曾在專門著作中敘述過。

作者向A. C. 沃里米尔(Вольмир)教授和И. Я. 什塔耶尔曼(Штаерман)教授致以謝意,他們曾審閱了本書手稿和提出了寶貴的意見。

目 录

序	ix
緒論	1
第一章 单自由度体系的穩定	3
§ 1. 体系的位能	3
§ 2. 平衡状态曲线	7
§ 3. 能障	10
§ 4. 在变形很小条件下的近似解法	12
第二章 具有若干个自由度的体系	15
§ 5. 具有两个自由度的体系	15
§ 6. 在二自由度体系中考虑有限变形	20
§ 7. 多自由度体系的穩定	22
§ 8. 能量法和近似解	25
§ 9. 若干个荷载的影响	32
第三章 单自由度体系穩定的非齐次問題	38
§ 10. 参变荷载和有效荷载	38
§ 11. 独立参数的假设	46
§ 12. 例题	50
§ 13. 外力作用点的位移为直线时的情形	56
§ 14. 若干个外力组成的荷载	58
§ 15. 例题	64
第四章 具有若干个自由度的体系穩定的非齐次問題	70
§ 16. 荷载的参变部分和有效部分	70
§ 17. 独立变数的线性变换	75
§ 18. 外荷载丧失稳定形式的分解	77
第五章 具有有限个自由度的体系穩定的例题	82
§ 19. 柔性地基上重体的穩定	82
§ 20. 变方向力作用下的受压杆	87
§ 21. 承受静水荷载的铰接四杆机构	89
§ 22. 浮体的穩定	94
§ 23. 强力受拉杆件的穩定	97

03711

§ 24. 在均匀内部压力作用下强力受拉的弹壁球形壳体的稳定	100
第六章 棱柱形弹性压杆的稳定	103
§ 25. 弹性压杆的近似微分方程式	103
§ 26. 杆件两端的装固条件	106
§ 27. 杆件端部的弹性嵌固	111
§ 28. 杆件的弹性支承	117
第七章 棱柱形弹性杆件稳定问题的精确解法	122
§ 29. 弹性压杆精确方程式的通解	122
§ 30. 精确解的研究	130
§ 31. 压杆挠度的近似公式	134
第八章 弹性压杆稳定问题的基本微分方程式	140
§ 32. 压杆弯曲的线性微分方程式的一般形式和确定任意常数的条件	140
§ 33. 初始条件	142
§ 34. 边界条件	145
§ 35. 边界条件举例	150
§ 36. 不会丧失稳定的杆件	162
§ 37. 共轭条件	163
§ 38. 边界参数	167
第九章 弹性直杆稳定问题的进一步解	169
§ 39. 弹性压杆中弯矩的微分方程式	169
§ 40. 屈曲压杆的位能	171
§ 41. 弹性压杆丧失稳定形式的正交性	174
§ 42. 压杆弯曲轴线的积分方程式	176
第十章 稳定计算中的初参数法	180
§ 43. 初参数法的一般公式	180
§ 44. 弹性支座上的连续压杆	185
§ 45. 刚性支座上的连续杆	188
§ 46. 具有不动节点的多层刚架的柱	194
§ 47. 阶梯形变截面柱	196
§ 48. 初参数法的图解	202
§ 49. 由于丧失稳定而产生有切力的压杆	205
§ 50. 补充举例	209
第十一章 弹性压弯杆件	213
§ 51. 压弯杆件方程式的通解	213
§ 52. 压弯杆件的简化方程式	218

§ 53. 两端铰支承的压弯杆件	221
§ 54. 最有利荷载条件	226
§ 55. 能量定理在压弯杆件中的应用	229
第十二章 压弯杆件问题的图解法	238
§ 56. 与圆弧形梁计算的比拟	238
§ 57. 压弯杆件支承的其他情况	244
§ 58. 阶梯式变截面杆件	253
§ 59. 圆弧法之修改	257
§ 60. 极坐标作图法(铁卓夫圆)	258
§ 61. 压弯杆件的直角坐标图解法	261
第十三章 变截面杆件的稳定	265
§ 62. 弯曲轴线微分方程式的推导	265
§ 63. 常压力	268
§ 64. 承受变压力的等截面杆件	285
§ 65. 楔体和圆锥体在自重作用下的稳定	290
§ 66. 具有最小重量的压杆	295
§ 67. 弹性杆件稳定的近似计算方法	299
§ 68. 归结为代数方程组的方法	303
A. 有限差分法	303
B. 弹性荷载法	305
B. 布布诺夫—迦辽尔金方法	307
Г. 布布诺夫—迦辽尔金方法的变异	311
Д. 缓和边界条件法和广义法	313
E. 李特兹和铁木生柯能量法	314
第十四章 杆件在弹性极限外的稳定	315
§ 69. 中心受压杆在弹性极限外的稳定	315
§ 70. 压力图形状对系数 φ 曲线的影响的研究	322
§ 71. 截面形状的影响	327
第十五章 在弹性极限外工作的压弯杆件	335
§ 72. 在弹性极限外偏心受压杆件的一般计算方法	335
§ 73. 偏心压杆稳定的近似计算方法	339
§ 74. 矩形截面偏心压杆的近似解析计算	342
§ 75. 理想工字形截面的偏心受压	348
第十六章 弹性地基上杆件的稳定	355
§ 76. 在静水压力基床上杆件的稳定	355

§ 77. 静水压力基床上杆件的各种支承情况	358
§ 78. 在一般形式弹性地基上杆件的稳定	366
§ 79. 分隔液体的隔墙的稳定	371
第十七章 组合杆件的稳定	377
§ 80. 横向剪力对杆件挠度影响的简化估计法	377
§ 81. 组合杆件的定义	380
§ 82. 在具有刚性横向连杆的组合杆件内剪切内力的微分方程式	382
§ 83. 正弦荷载下的组合杆件	384
§ 84. 具有刚性横向连杆的中心受压组合杆件的稳定	387
§ 85. 由两个分肢组成的组合杆件的稳定	392
§ 86. 其他形式的边界条件	398
第十八章 压弯组合杆件	402
§ 87. 由两个分肢组成的压弯组合杆件	402
§ 88. 在任意横向荷载下的压弯杆件	406
§ 89. 具有刚性横向连杆的压弯组合杆件问题的一般解法	408
§ 90. 具有绝对柔性剪切连杆的杆件的稳定	411
§ 91. 具有两个竖杆的框架式杆件的稳定	417
§ 92. 多竖杆的框架式杆件	422
第十九章 具有弹性横向连杆的组合杆件以及某些其他形式组合杆件的稳定	425
§ 93. 具有弹性横向连杆的组合杆件的基本方程式	425
§ 94. 加劲薄板用的受压肋的稳定	433
第二十章 曲杆的稳定	437
§ 95. 平面曲杆稳定的一般方程式的推导	437
§ 96. 在静水荷载作用下圆拱的稳定	442
§ 97. 在静水荷载作用下曲杆稳定的其他情况	447
§ 98. 坦拱的稳定	450
第二十一章 工字梁平面弯曲形式的稳定	460
§ 99. 一般方程式的推导	460
§ 100. 在垂直平面内的纯弯曲	464
§ 101. 正弦荷载	467
§ 102. 荷载作用高度的影响	469
§ 103. 沿直线铰接工字梁的稳定	472
§ 104. 板条的稳定	475

第二十二章 平板的稳定	478
§ 105. 平板稳定方程式的通解	478
§ 106. 各向均匀受压的平板	481
§ 107. 在 x 轴方向及 y 轴方向受荷不同的矩形平板	484
§ 108. 均匀受压的圆平板	489

緒 論

在研究平衡过程和平衡状态时，必須顧計到离开平衡状态而产生某些极小量或有限数量的偏离的可能性。任何离开平衡状态的偏离都是平衡的一种破坏，并因而引起运动。如果这种运动将随着時間而导致平衡状态的恢复，或者在任何情况下均不使偏离程度增大，則此种平衡状态称为稳定的。如果体系在經過某一段時間的运动以后将产生离开原来平衡状态的相当大的偏离(無論开始时的偏离多么小)，則这种平衡状态称为不稳定的。

既然靜止状态是运动状态的特殊情况，則穩定及不穩定平衡現象也可以看做是体系稳定及不稳定运动的特殊情况。然而与更为一般的运动稳定問題相比，平衡穩定問題有它自己一系列特点，其中最主要的特点就是在解平衡穩定問題时不引入時間变量 t 。由此得到的极重要的簡化，使可能为更多的个别問題和情况求得最終的实用的結果。此外，由于不含有基本参数 t ，平衡穩定理論的數解法与运动穩定問題的數解法之間也有着本質上的区别。

在自然界中，只有对穩定的平衡状态可以进行長時間的觀察，并且只有穩定平衡具有实用意义。因此，令平衡方程式具有使平衡状态保持穩定所需遵守的条件，是极其重要的。

广义言之，平衡概念系包括不隨時間而改变的各种体系的各种不同性質的状态。例如介質的热力平衡，混合物的化学平衡，等等。我們將只研究承載着外力的(外力具有位能)机械体系的平衡状态。当然，靜力平衡的研究方法有很多也可移用于其他形式的平衡問題的研究。

靜力平衡的穩定問題在实用方面是特別重要的，因为承受外力机械作用的結構物，按其用途絕大部分都必須处于穩定平衡状态。靜力

平衡体系的失去稳定在多数情况下就等于是体系的破坏。反过来,结构的任何破坏都可以解释为失去总稳定或局部稳定的现象。当钢拉杆破坏时,这一点表现得特别明显。若逐渐增加荷载,我们最后将达到这样一种状态,此时很小的拉力增加就会引起很大的变形增长,最后趋于断裂。因此,破坏不应认为是杆件断裂的瞬间,而应该是在变形开始剧烈增长的时刻。

保证压杆、受弯梁、平板、壳体等的稳定问题在工程技术中有着特别大的意义。结构稳定理论主要也就是在这个方面得到了发展,并在工程计算实践中获得了广泛应用。本门科学的实用性常使得其理论基础及叙述的严密性退到第二位,但是不应因此而对本门科学有所非难,因为它的主要目的是在于探讨结构稳定计算的实用方法。但是,随着这些方法的发展,也就有必要把它们在一般理论的基础上作进一步的综合。虽然这种理论知道已久(拉格朗日,明琴格,莱邇—狄立赫莱);但所有关于结构稳定方面的教程及专题论文一般均以欧拉在1744年有史以来第一次所提出并解决了的弹性压杆的稳定问题这一特例作为基础。然而,如果从单自由度或若干个自由度的体系来开始研究平衡的稳定,如同本书所作的那样,则可能更为合理,因为它们能够很鲜明地显示出静力稳定问题的全部特性。

对结构稳定问题的方法上不恰当的阐述,曾不只一次地导致过对基本概念的理解与叙述方面的误解,例如对临界力、杆件的纵向弯曲等概念的误解。此外,线性问题与非线性问题划分之模糊也曾使得广大工程人员对于稳定问题的研究发生困难。

第一章 单自由度体系的稳定

§1. 体系的位能

结构稳定概念的产生是与通常计算图形(即认为变形和位移很小,因而在荷载增长的过程中结构图形的所有几何尺寸均可以认为不变)的精确化相联系的。在许多场合下,甚至很小的变形也可能严重地改变结构的工作条件,此时在平衡方程式中可能加入诸如力和位移的乘积之项,这样在一定条件下就会导致平衡方程式解答唯一性的破坏,并产生数值上不确定的解。只有在考虑有限变形及过渡到非线性平衡方程式的条件下,问题的本质才能完全被揭示。为了初步阐明稳定的概念,通常用来说明这种现象的例子——中心受压细杆的纵向弯曲——是相当复杂的,更为适宜的是先来研究比较简单的具有有限个自由度的体系,特别是单自由度的体系。用来表达体系所有可能的变形状态所必需的独立参数的数量,就叫做自由度的数目。

取一端弹性嵌固的绝对刚性杆件作为单自由度体系的例子(图1)。它的变形只要用一个参数就可以表征出来,例如用杆轴对其初始位置的转角 θ 。我们将认为角 θ 可以取从负无穷大到正无穷大之间的所有数值。由于杆件支承的弹性,在支承中产生与转角 θ 成正比的反力矩 M 。支承的刚性系数用 α 来表示。于是:

$$M = \alpha\theta.$$

在体系上加一沿杆轴方向作用的力 P ,并设当它的作用点(杆端)移动时该力的大小及方向均不改变。很容易看出,只要力的作用点从其初始位置有一个哪怕是微小的偏移,就会对杆件

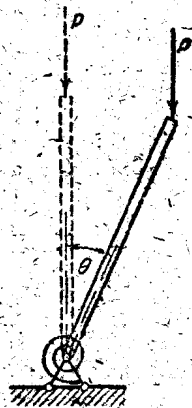


图 1

的支承点产生一个外力矩，当 θ 值不大时这个外力矩有使偏移值增大的趋势。如果力 P 是很大，则在任何小的 θ 时体系均将不能保持平衡。此时杆件未偏移前的初始位置是不稳定的。

现在来更详细地研究这个问题。在研究中将引用体系在任意偏移位置时的位能值。取体系在初始位置 $\theta=0$ 时的位能作为假设的零点。当体系转到偏移位置时，力 P 完成了功，其大小等于力 P 与其作用点竖向位移值 $\Delta=l(1-\cos\theta)$ 的乘积。乘积 $P\Delta$ 应取负号，因为与体系的零点位置比较位能系减少了这一数值。另一方面，在支承中有弹性位能蓄积了起来，它的大小等于 $\frac{1}{2}M\theta^2=\frac{\alpha}{2}\theta^2$ 。体系的总位能将等于：

$$U = \frac{\alpha}{2}\theta^2 - Pl(1 - \cos\theta). \quad (1.1)$$

函数(1.1)的图示见图 2。

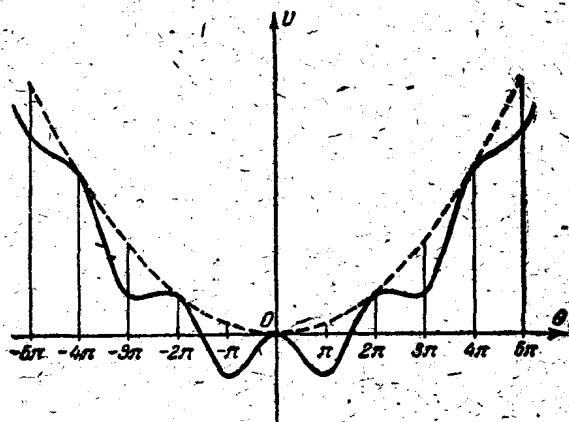


图 2

现设想有一单位重量的小球，它可以沿图 2 所示之曲线移动。它的位能刚好用数值 U 来表示。显然，无论小球或是所研究体系的平衡位置仅是与曲线 U 上那些切线为水平的点相对应。在这些点上函数 U 具有极值：极小值或极大值。因此，平衡条件呈如下之形式：

$$\frac{dU}{d\theta} = 0. \quad (1.2)$$

在本例的情形中,

$$\frac{dU}{d\theta} = \alpha\theta - Pl \sin\theta = 0. \quad (1.3)$$

从这个方程式可以求出体系的所有平衡位置。这里采用图解法最为简单,如图3所示;方程式(1.3)的根就相当于直线 $U_1 = \alpha\theta$ 和正弦曲线 $U_2 = Pl \sin\theta$ 交点的横坐标。平衡位置的数目与 P 的大小有关,因为当正弦曲线的振幅 Pl 改变时,它与直线 $y = \alpha\theta$ 交点的数目也将改变。在图2上,方程式(1.3)的根相当于曲线 U 上极值点的相应数目。

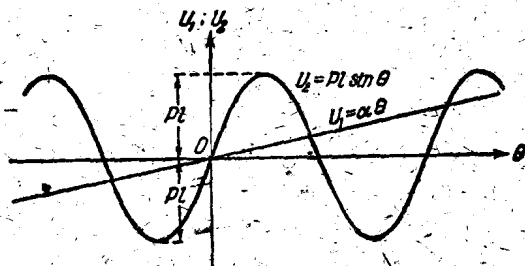


图 3

这里指出,平衡条件(1.3)也可从各力对杆件支承点的力矩之和等于零的条件直接得出,它要比先立出位能的式子然后再对 θ 求导数的方法简单些。

从图2也可以明显地看出,并不是所有的平衡状态都是稳定的。只有当位函数 U 取极小值时,平衡才是稳定的。在极小值之点,曲线 U 凸向下方,而当沿该曲线移动的小球从 U 的极小值位置偏离某一数值 θ (不超过某一相当小的数值)时,它将返回到这个平衡位置。我们所研究的体系的情形也是如此。在相应于 U 为极大值处的不稳定的平衡状态中,不管偏离多小的角度 θ ,体系均不会返回去,而将转移到另一个平衡位置。

在解析上平衡状态的稳定条件用下列不等式表示:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0, \quad (1.4)$$

同时式中的 θ 应满足平衡条件(1.2)。条件(1.4)是稳定的一般条件的一种个别情况, 这一般条件就是: 在稳定的平衡状态时体系的位能为极小。

当力 P 增大时, 曲线 U 将有所改变, 而相应于平衡位置的那些点一

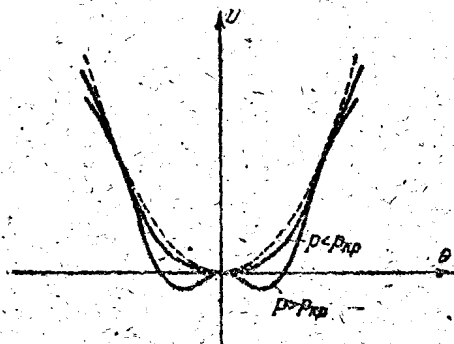


图 4

般说来也将移动。而对于那些停留在原位的点(在我们的例子中就是 $\theta=0$ 的点), 平衡状态可能由稳定的变为不稳定的(图4)。显然, 当力 P 达到某一数值时应该有一种过渡的平衡状态, 此时不仅一阶导数 $\frac{dU}{d\theta}$ 等于零, 而且二阶导数 $\frac{d^2U}{d\theta^2}$

也刚好等于零。这种介于稳定的和不稳定之间的平衡状态可称之为临界平衡状态。于是, 在解析上体系的临界状态由下列二方程式确定:

$$\frac{dU}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2U}{d\theta^2} = 0. \quad (1.5)$$

对于我们所研究的体系来说, 这些方程式给出等式(1.3)及下式:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \alpha - Pl \cos \theta = 0. \quad (1.6)$$

如果所指的是初始平衡位置 $\theta=0$ 的情况, 并且条件(1.3)是对任意的 P 而言, 则条件(1.6)给出:

$$\alpha - Pl = 0. \quad (1.7)$$

由此得出在 $\theta=0$ 的平衡位置上力 P 的临界值:

$$P_{kp} = \frac{\alpha}{l}. \quad (1.8)$$

§ 2. 平衡状态曲线

在单自由度体系中位能 U 是变形 θ 和外力 P 的函数。因此平衡条件(1.2)更正确些应写成:

$$\frac{\partial U(P, \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (1.9)$$

由这个方程式所确定的 P 和 θ 之间的关系可以在 θ 和 P 的坐标面上给出某一曲线, 这曲线即称为平衡状态曲线。在我们的例子中, 可从(1.3)得出这根曲线, 即:

$$P = \frac{a\theta}{l \sin \theta} \quad (1.10)$$

它的图形如图 5 所示。我们将指出, 平衡状态曲线(1.9)上的那些极值点系与临界平衡状态相对应。这些点满足下列等式:

$$\frac{dP}{d\theta} = 0. \quad (1.11)$$

如果将导数 $\frac{dP}{d\theta}$ 的数值按隐函数的微分规则加以分解, 则从(1.9)可得:

$$\frac{dP}{d\theta} = - \frac{\frac{\partial U_s(P, \theta)}{\partial \theta}}{\frac{\partial U_s(P, \theta)}{\partial P}} = - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}}{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial P}} \quad (1.12)$$

由此得知, 要满足等式(1.11), 必须有 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$ 。这样就得出了临界平衡状态的条件(1.5)中的第二个条件, 只是其中的一般导数已改成偏导数, 因为在这里 P 已不认为是常数。此外, 因为整条平衡状态曲线均满足条件(1.9), 所以公式(1.11)可以全部代替(1.5)中体系临界状态的两个条件。

在导数 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ 改变符号的地方, 体系从稳定状态转变到不稳定状态, 或者相反。但从式(1.12)可看出, $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ 符号的改变相当于导数 $\frac{dP}{d\theta}$ 符号

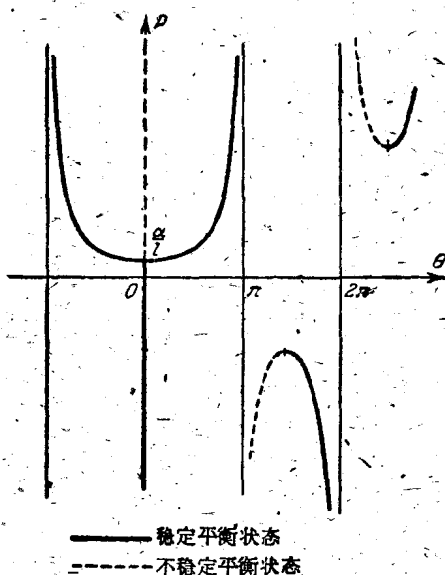


图 5

的改变, 亦即平衡状态曲线倾斜方向的改变。由此得出, 如果平衡状态曲线的上升部分相应于体系的稳定状态, 则在经过极大值点以后, 曲线(1.9)的下降部分就将是不稳定状态。而当曲线的下降部分是稳定的平衡状态时, 其上升部分就将相应于不稳定状态。

在特殊情形下可能有:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial P} = 0. \quad (1.13)$$

此时平衡状态曲线就趋向无穷大或(当 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$ 时)形成奇点。

对于图 1 所示的体系来说, 当 $\theta = m\pi$ (其中 m ——整数)时, 复合导数 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial P} = l \sin \theta$ 变为零。因此图 5 所示的平衡状态曲线在这些 θ 值处趋于无穷大。在经过平衡状态曲线的无穷大值时, 和经过它的极值点时一样, 稳定状态的区域为不稳定状态的区域所代替。至于 $\theta = 0$, $P = \frac{a}{l}$ 这一点我们将在稍后提及。

设平衡状态曲线的极大值或极小值之点相应于 P 的某一临界值 P_{kp} 。

当将力 P 稍稍增大或减小时, 在平衡状态曲线上就将得到与极值点相靠近的两个点, 或者一个点也没有(图 6)。因此, 当 P 改变时, 开始先出现一个新的平衡状态(临界状态), 然后分为二种, 其中一种是稳定的, 另一

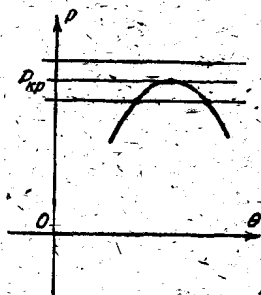


图 6