基尔霍夫定律

宗孔德 译

人民教育出版社

这本小册子包括三篇论文的译文。第一篇是G.基尔霍夫在1847年的著名论文“关于研究电流线性分布所得到的方程的解”。现在电路中的基尔霍夫定律就是根据这篇文章而来的。这是一篇最早的关于网络拓扑学的文章。第二篇是F.雷则的“网络理论中的一些拓扑学原理”的论文。第三篇是L.温伯格的“基尔霍夫‘第三和第四定律’”。这两篇论文从数学观点和工程观点阐述了网络的拓扑学性质，可以帮助大家更好地理解基尔霍夫的论文。

本书可供从事电路理论教学和研究人员参考。

基尔霍夫定律

宗孔德 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张3.75 字数87,000

1981年7月第1版 1982年7月第1次印刷

印数 00,001— 9,000

书号 15012·0346 定价0.36元

目　　录

关于研究电流线性分布所得到的方程的解*

G. 基尔霍夫

设有一含有 n 个导线的系统，这 n 个导线 1、2、…、n 彼此作任意方式的连接. 如果每个导线都有一个电动势与之串联，则确定流经各导线的电流 I_1、I_2、…、I_n 所需要的线性方程的数目，可由下面的两个定理来得到.①

定理 1:

设导线 k_1、k_2、…构成一个闭合回路②，令 w_k 表示第 k 个导线的电阻，E_k 为与第 k 个导线串联的电动势，并认为 E_k 的正方向与电流 I_k 的正方向相同. 则在一个回路绕行方向上所有的 I_{k_1}、I_{k_2}、…都为正的情况下，有

$$w_{k_1}I_{k_1}+w_{k_2}I_{k_2}+\cdots=E_{k_1}+E_{k_2}+\cdots$$

定理 2:

如果导线 λ_1、λ_2、…汇集于一点，且认为电流 I_{λ_1}、I_{λ_2}、…都以正方向趋向于此点，则

$$I_{\lambda_1}+I_{\lambda_2}+\cdots=0$$

如果给定的导线系统不能分解成几个完全分离的系

---

* 中译者注：此文系由 J. B. 奥图尔(J. B. O'Toole)译为英文，今根据英文本译出。

① Poggendorff's Annals, vol. 64, p.513.

② 英译者注：原文为"closed figure"，即现在的回路、网孔的意思。现在直接译成闭合回路。

统①，那末，在这个假设下我将证明求解 I_1、I_2、$\cdots$、I_n 的方程可用上述两个定理来得到，方法如下：

令 m 为结点数，即两个或两个以上导线汇合在一起的点的数目，并令 $\mu=n-m+1$. 则所有电流 I 的公共分母是所有 $w_{k_1}\cdot w_{k_2}\cdot\cdots\cdot w_{k_\mu}$ 乘积之和，这 μ 个元件是从 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 中选出来的，它们具有这样的特性——当将导线 k_1、k_2、$\cdots$、k_μ 移去后网络中就不存在闭合回路了. I_λ 的分子是所有 $w_{k_1}\cdot w_{k_2}\cdot\cdots\cdot w_{k_{\mu-1}}$ 乘积之和，这 $\mu-1$ 个元件是从 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 中选出来的. 每一组 $\mu-1$ 个元件都具有下面的特性，在移去导线 k_1、k_2、$\cdots$、$k_{\mu-1}$ 之后将留下一个闭合回路，这个回路中包含着 λ. 每个组合要乘以该闭合回路中的诸电动势之和. 这里认为电动势的正方向与 I_λ 的正方向是相同的.

为了使整体的观点更便于理解，我把这个定理的证明分成几段.

证 1：

在任意系统中移去若干导线使这个系统中的所有闭合回路都被破坏. 令破坏所有闭合回路所需要移去的导线数最少为 μ，则 μ 也就是能用定理 1 导出的独立方程的数目.

用下列方法人们可以写出 μ 个独立方程，每个用定理 1 得出的方程都可从这 μ 个方程导出.

令 1、2、$\cdots$、$\mu-1$、μ 为这样的 μ 个导线，即把它们移去后系统中就不存在任何闭合回路了. 在移去 $\mu-1$ 个导线之后，系统中还剩下一个闭合回路. 将定理 1 应用于这个剩下的闭合回路，如果我们移去的导线依次为：

① 英译者注：用现在的术语来说，就是网络中不包含几个分离部分.

$$2、3、\cdots、\mu-1、\mu$$
$$1、\quad 3、\cdots、\mu-1、\mu$$
$$\cdots\cdots$$
$$1、2、3、\cdots、\mu-1$$

这样得出来的 μ 个方程中的每一个方程，都是不能从这 μ 个方程的其他方程推导出来的，因为每个方程中都包含着一个不出现在其它方程中的未知量．只有第一个方程中包含着 I_1,第二个方程中包含着 I_2,等等．但是,每个从定理 1 得出的方程都能从这些方程中得到．如果一个闭合回路是由几个闭合回路共同组成的，则这个闭合回路的方程一定可由那几个闭合回路的方程导出（用加法或减法）．我们希望证明，每个闭合回路都能由那 μ 个回路组合起来得出．因为给定系统 S 的所有闭合回路，可分为含有导线 μ 的回路和那些属于系统 S' 的回路，系统 S' 是系统 S 中将导线 μ 移去后所剩下的部分．如果我们假设所有属于第二类的闭合回路，都能由 μ 个闭合回路中的前 $\mu-1$ 个组合得出，则可看出必定可以从这 μ 个闭合回路中组合出系统 S 的每一个闭合回路，因为任一个含有导线 μ 的回路，都可以由一个含有导线 μ 的确定回路和一些不含有 μ 的回路组合起来得出．如果系统S'' 是从系统 S 中移去 μ 和 $\mu-1$ 个导线产生出来的，那末对于系统 S' 所作的假设可以变化成对于 S'' 相似的假设．即可以变化成这样的假设：所有在 S'' 中出现的闭合回路，都可以由那 μ 个回路中的前 $\mu-2$ 个组合而成．照这样的推理继续做下去，最终我们会得到系统 $S^{(\mu-1)}$．因为它只包含一个闭合回路，所以我们所作的假设的正确性就可以清楚地看出来了．

证 2：

因为定理 1 和定理 2 必须提供必要的方程数目来确定 I_1、I_2、$\cdots$、I_n，所以根据我们上面的证明，这些方程如下：

$$\alpha_1^1 w_1 I_1 + \alpha_2^1 w_2 I_2 + \cdots + \alpha_n^1 w_n I_n = \alpha_1^1 E_1 + \alpha_2^1 E_2 + \cdots + \alpha_n^1 E_n$$
$$\alpha_1^2 w_1 I_1 + \alpha_2^2 w_2 I_2 + \cdots + \alpha_n^2 w_n I_n = \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2 + \cdots + \alpha_n^2 E_n$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_1^\mu w_1 I_1 + \alpha_2^\mu w_2 I_2 + \cdots + \alpha_n^\mu w_n I_n = \alpha_1^\mu E_1 + \alpha_2^\mu E_2 + \cdots + \alpha_n^\mu E_n$$
$$\alpha_1^{\mu+1} I_1 + \alpha_2^{\mu+1} I_2 + \cdots + \alpha_n^{\mu+1} I_n = 0$$
$$\alpha_1^{\mu+2} I_1 + \alpha_2^{\mu+2} I_2 + \cdots + \alpha_n^{\mu+2} I_n = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_1^n I_1 + \alpha_2^n I_2 + \cdots + \alpha_n^n I_n = 0$$

式中的各个 α 的值有时为 $+1$，有时为 -1，有时为 0。式中 μ 的意义和前面相同。

由上式可得，各电流 I 的公共分母（即上面方程的行列式）是 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 的 μ 次齐次函数，它只含有每个 w 的一次项，除 w 之外就只有常数了。我们也可以把这个结果用下述方式来表达：各电流的公共分母是 w_1、w_2、$\cdots$、w_n中 μ 个元素的每一种组合之和，每个组合各乘以一个数值系数。同样地，我们也注意到每个电流的分子是 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 中 $\mu-1$ 个元素的每一种组合之和，其中每种组合各乘以 E_1、E_2、$\cdots$、E_n 的一个线性齐次函数，它们的系数是常数。

证 3：

不论是使电阻 $w_\kappa=\infty$，或切断导线 κ，或是将它从电路中移去，都会使电流 I 的分母和分子的数值系数确定下来。将 $w_\kappa=\infty$ 代入各电流 I 的表示式，则各表示式就必然变成在系统中移去导线 κ 时用定理 1 和 2 所得的解。由于 $w_\kappa=\infty$，I_κ 本身必定等于零。

用 $w_1\cdot w_2\cdot\cdots\cdot w_{\mu-1}$ 去除各电流的分子和分母，然后置 $w_1=\infty$、$w_2=\infty$、$\cdots$、$w_{\mu-1}=\infty$，从而使 I_λ 变换为(I_λ)。我们用 $A^\lambda_{\kappa_1、\kappa_2、\cdots、\kappa_{\mu-1}}$表示 I_λ 分子中各个 E 的乘以 $w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa_{\mu-1}}$ 的函数。用符号 $a_{\kappa_1、\kappa_2、\cdots、\kappa_\mu}$ 表示分母中 $w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa_\mu}$ 的系数。于是，有：

$$(I_\lambda)=\frac{A^\lambda_{1、2、\cdots、\mu-1}}{a_{1、2、\cdots、\mu-1、\mu}\cdot w_\mu+a_{1、2、\cdots、\mu-1、\mu+1}\cdot w_{\mu+1}+\cdots+a_{1、2、\cdots、\mu-1、n}\,w_n}$$

如果 λ 是 1、2、$\cdots$、$\mu-1$ 之中的一个，则这就是前面观察所得的结果：

$$(I_\lambda)=0$$

如果 λ 不包含在 1、2、$\cdots$、$\mu-1$ 之中，则：

$$(I_\lambda)=I'_\lambda$$

式中 I'_λ 为当导线 1、2、$\cdots$、$\mu-1$ 移去时流过导线 λ 的电流.

为了求解 I'_μ、$I'_{\mu+1}$、$\cdots$、I'_n，将定理 1 和 2 用于所剩下的导线系统得出一组方程，并设想这些方程已经建立起来了.设定理 1 提供了 μ' 个独立方程. 于是各电流 I' 的公共分母是 w_μ、$w_{\mu+1}$、$\cdots$、w_n 的 μ' 次函数，分子是相同变量的$(\mu'-1)$次函数. 按照 μ 的定义，可能是 $\mu'=1$ 也可能是 $\mu'>1$. 如果 $\mu'>1$，为了使$(I_\lambda)=I'_\lambda$能够成立，则要求 I'_λ 的分子和分母有一个 w_μ、$w_{\mu+1}$、$\cdots$的$(\mu'-1)$次的公因子，或者是 $(I_\lambda)=I'_\lambda=0$，或者是最后一种可能性，即(I_λ)为0/0的形式. 如果某一个电流(I)是0/0的形式，则所有的电流也一定都是这个形式，这是因为它们具有一个公共的分母，而且，又都不是无穷大. 如果不是这样的情况，则每个 I' 的分子和分母一定具有一个$(\mu'-1)$次的公因子，而且对于所有的 I' 必然都具有相

同的因子，然而这是不可能的，关于这一点可用下面的方法加以证明。

设有一个上述型式的因子，因子中含有 w_κ，κ 必须是至少在一个闭合回路中的导线，否则 w_κ 就必然不会在 I_μ、$I_{\mu+1}$、$\cdots$ 的方程中出现。由于电流 I' 的分子和分母对每个 w 都是线性的，所以如果去掉那个因子 w_κ 我们就可以得到不含 w_κ 的各电流表示式。如果我们把各电流的表示式代入含有 $w_\kappa I'_\kappa$ 的一个方程中去，则会变成一个恒等式。取对 w_κ 的偏导数，则得：

$$I'_\kappa=0$$

但这个方程不可能永远成立。如果它能永远成立的话，则它在任意多的 $w=\infty$ 时，即如果移去任意多的导线时，也必然成立；但是如果移去那末多导线使得只剩下一个含 κ 的闭合回路，则对于任意值的电动势 E 不可能使 I'_κ 为零。

根据上述理由，可以看到如果 $\mu'>1$，则 (I_μ)、$(I_{\mu+1})$、$\cdots$、(I_n) 必然以 0/0 的形式出现；或者因为我们已经求出 $(I_1)=0$、$(I_2)=0$、$\cdots$、$(I_{\mu-1})=0$。如果将导线 1、2、$\cdots$、$\mu-1$ 移去后还有一个以上的闭合回路，则乘积 $w_1\cdot w_2\cdot\cdots\cdot w_{\mu-1}$ 既不可能在 I_1、I_2、$\cdots$、I_n 的分子中也不可能在分母中出现。

证 4：

在（导线）1、2、$\cdots$、$\mu-1$ 移去之后只剩下一个闭合回路的情况下，让我们来确定各电流 I 的分子和分母中的乘积 $w_1\cdot w_2\cdot\cdots\cdot w_{\mu-1}$ 所乘的各个因子。

令所剩下的回路中包含导线 λ_1、λ_2、$\cdots$、λ_ν。如果 λ 不在这 ν 个导线之中，则 $I'_\lambda=0$，而如果 λ 在其中，则

$$I'_\lambda=\frac{E_{\lambda_1}+E_{\lambda_2}+\cdots+E_{\lambda_\nu}}{w_{\lambda_1}+w_{\lambda_2}+\cdots+w_{\lambda_\nu}}$$

式中 E_{λ_1}、E_{λ_2}、$\cdots$的正方向认为与 I_λ 的正方向相同.

这个 I'_λ的分母只能与(I_λ)的分母相差一个数值因子，即与表示式

$$a_{1、2、\cdots、\mu-1、\mu}\cdot w_\mu+a_{1、2、\cdots、\mu-1、\mu+1}\cdot w_{\mu+1}+\cdots+$$
$$+a_{1、2、\cdots、\mu-1、n}\cdot w_n$$

只相差一个数值因子. 所以除了 $a_{1、2、\cdots、\mu-1、\lambda_1}$、 $a_{1、2、\cdots、\mu-1、\lambda_2}$、 $\cdots$、 $a_{1、2、\cdots、\mu-1、\lambda_\nu}$ 之外 $a_{1、2、\cdots、\mu-1、\mu}$、 $a_{1、2、\cdots、\mu-1、\mu+1}$、$\cdots$皆为零， 而且$a_{1、2、\cdots、\mu-1、\lambda_1}$、 $a_{1、2、\cdots、\mu-1、\lambda_2}$、 $\cdots$、 $a_{1、2、\cdots、\mu-1、\lambda_\nu}$ 都彼此相等. 我们由此可以推断出在电流 I 的分母中 $w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa_\mu}$ 的组合的系数，只有在由于移去导线 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_μ 后所有闭合回路都被破坏的情况下才不为零. 我们进一步得出结论：满足上述条件且包含有($\mu-1$)个公因子 w 的所有组合必定具有相同的系数.

根据上述的理由，可以证明：如果移去了导线 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_μ 也象移去导线 κ'_1、κ'_2、$\cdots$、κ'_μ 一样能使所有的闭合回路被破坏掉，则各电流 I 的分母中的任意两个组合

$$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa_\mu}\text{和 } w_{\kappa'_1}\cdot w_{\kappa'_2}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa'_\mu}$$

必须具有相同的系数.

为了完成这个证明，我们作下列论证：

如果移去导线 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_μ 能使所有闭合回路遭到破坏，则这些导线中的每一个导线必须至少在一个闭合回路中出现.

另一方面，在每一个闭合回路中必须至少有 κ_1、

κ_2、…、κ_μ 中的一个导线出现．所以，如果我们知道导线 κ' 在一个闭合回路之中，则它必定出现在与 κ_1、κ_2、…、κ_μ 中的至少一个导线相同的闭合回路中．

此外，导线 κ_1、κ_2、…、κ_μ 中的每一个导线必须出现在一个闭合回路中，这个回路中并不出现其它 $\mu-1$ 个导线．例如，导线 κ_μ 出现在移去 κ_1、κ_2、…、$\kappa_{\mu-1}$ 后剩下来的那个闭合回路中，我们用符号 f_{κ_μ} 表示这个回路．如果导线 κ'_μ 也在 f_{κ_μ} 中，则我们移去导线 κ_1、κ_2、…、$\kappa_{\mu-1}$、κ'_μ 时所有闭合回路也都将遭到破坏．根据这个论证，不难看出，如果我们选定任一闭合回路 f，则总可以找到 $\mu-1$ 个导线使得在 $\mu-1$ 个导线移去之后还剩下这个唯一的闭合回路 f．因为，如果导线 κ_1、κ_2、…、κ_μ 中的，比如说，κ_1、κ_2、κ_3 出现在闭合回路 f 里，且 κ'_2 是出现在 f_{κ_2} 而不出现在 f 的一个导线，κ'_3 是出现在 f_{κ_3} 而不出现在 f 的一个导线，则 κ'_2、κ'_3、κ_4、…、κ_μ 就是所希望的那 $\mu-1$ 个导线．

我们的证明将用下面的方法进行：如果上述的那种两个组合有 ν 个公因子 w，而它们的系数又彼此相等．则我们将证明只具有 $\nu-1$ 个公因子的两个组合，其系数也必须彼此相等．如果我们能证明这一点，我们的论点也就得到证实了．

不论 ν 等于几，证明的方法总是一样的．因此，我们就把 ν 固定为一个数值，比如让 $\nu=3$．我们要阐明的是：

$$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa_\mu} \text{ 和 } w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa'_3}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa'_\mu}$$

两个组合必定具有相同的系数．

当 κ_1 和 κ_2 移去后，给定的系统形成了另一个导线系统，在这新形成的系统中如果移去的导线数少于 $\mu-2$ 时就不会使所有的闭合回路遭到破坏；而在移去 κ_3、κ_4、…、κ_μ 和移去

κ_3'、κ_4'、$\cdots$、κ_μ' 时则全部遭到破坏. 由此可知 κ_3' 出现在至少与 κ_3、κ_4、$\cdots$、κ_μ 中一个导线(比如说 κ_3) 相同的回路中. 这个回路是移去 κ_4''、κ_5''、$\cdots$、κ_μ'' 后唯一留下的一个，则这个回路就是原系统中移去 κ_1、κ_2、κ_4''、κ_5''、$\cdots$、κ_μ'' 后留下的同一个唯一的回路. 因此，具有 $\mu-1$ 个公因子 w 的两个组合

$$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3}\cdot w_{\kappa_4''}\cdot w_{\kappa_5''}\cdot \cdots \cdot w_{\kappa_\mu''}$$

和

$$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3'}\cdot w_{\kappa_4''}\cdot w_{\kappa_5''}\cdot \cdots \cdot w_{\kappa_\mu''}$$

必须具有相同的系数. 然而，由于我们的假设，下列的组合

$$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3}\cdot w_{\kappa_4}\cdot \cdots \cdot w_{\kappa_\mu}$$

和

$$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3}\cdot w_{\kappa_4''}\cdot \cdots \cdot w_{\kappa_\mu''}$$

以及

$$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3'}\cdot w_{\kappa_4'}\cdot \cdots \cdot w_{\kappa_\mu'}$$

和

$$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3'}\cdot w_{\kappa_4''}\cdot \cdots \cdot w_{\kappa_\mu''}$$

成对的具有相同的系数. 所以

$w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3}\cdot \cdots \cdot w_{\kappa_\mu}$ 和 $w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot w_{\kappa_3'}\cdot \cdots \cdot w_{\kappa_\mu'}$

的系数也彼此相等.

到此为止我们已经捎带着证明了电流 I 的公共分母是 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 中任意 μ 个元素 w_{κ_1}、w_{κ_2}、$\cdots$、w_{κ_μ} 的组合之和，而 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 具有在导线 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_μ 移去后不会留下闭合回路的性质. 分母中的这个组合之和要乘以一个数值系数，如果我们相应地调整电流 I 的分子则可将此数值系数置为一.

现在可以很容易地求出 I 的分子. 从方程$(I_\lambda)=0$(如果 $\lambda\leqslant\mu-1$)，和从方程$(I_\lambda)=I_\lambda'$ (如果 $\lambda>\mu-1$)，当 λ 是 λ_1、

λ_2、…、λ_ν 中的一个时，则有

$$A^{\lambda}{}_{1,2,\cdots,\mu-1}=E_{\lambda_1}+E_{\lambda_2}+\cdots+E_{\lambda_\nu}$$

而在相反的情况下，则

$$A^{\lambda}{}_{1,2,\cdots,\mu-1}=0$$

如果 λ 不在这个回路中，则 $w_1\cdot w_2\cdot\cdots\cdot w_{\mu-1}$ 项的系数为零。我们已经证明过只有在移去导线 1、2、…、$\mu-1$ 之后剩下一个闭合回路时这个回路中电流分子的系数才不会等于零。如果 λ 在这个回路中，则系数等于这个回路中的电动势之和。回路中电动势的正方向认为和电流 I_λ 的正方向是一致的。

证 5：

为了证明我们所提出的定理，现在还必须证明 $\mu=n-m+1$。只有在给定的导线系统不能分解为几个彼此完全分离的系统时这个论点才能成立。但直到现在我们的论证还没有用到这一假设。

正如我们已经看到的，μ 是用定理 1 所能得出的独立方程的数目；所以定理 2 所能给出的独立方程的数目必须是 $n-\mu$。但是，现在可以证明在（系统不能分解为几个彼此完全分离的系统）那个假设下有 $n-\mu=m-1$。从而得出 $\mu=n-m+1$。

用定理 2 不能得出多于 $m-1$ 个独立方程，因为如果我们把定理 2 应用于所有 m 个结点，则每个电流就要在所列的方程组中出现两次，一次的系数为 $+1$，另一次的系数为 -1。所以，把所有方程相加起来就会得到恒等式 $0=0$。而另一方面，如果把定理 2 应用于任意 $m-1$ 个结点处，则所得到的方程就是独立的。因为如果我们选择任意个结点，则未知量中

的一个或几个就只出现一次．令结点的序号为 1、2、$\cdots$、m，并令（κ、λ）表示连接其中 κ 和 λ 两点的导线． 如果点 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_ν 中的一个点，比如说点 κ_1，除了与点 κ_2、$\cdots$、κ_ν 相连以外还与另外的点 λ 相连，则未知量 $I_{(\kappa、\lambda)}$ 将在 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_ν 诸点的方程中只出现一次． 但是，如果连接 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_ν 各点的导线相互连接而不形成一个自成体系的封闭系统，则点 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_ν 中的一个点一定与不在这个集合中的一点 λ 相连．

请允许我对刚刚证明了的定理再作一些注解．如果电流 I_λ 分子中的各项按 E_1、E_2、$\cdots$、E_n 相同的顺序来排列，则 E_κ 的系数就会变成 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 中的任何 $\mu-1$ 个元素的组合（这个组合有时为正有时为负）之和，这些组合来自 I 的分母中含有 w_λ 或 w_κ 的那些组合．这里的 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 就是出现在电流 I 的分母里的那些值．这些恰好是内容为 $w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa_{\mu-1}}$ 的组合， 它们具有一种特性， 当导线 κ_1、κ_2、$\cdots$、$\kappa_{\mu-1}$ 移去后，只剩下一个闭合回路并且这个回路包含着 λ 也包含着 κ． 如果在所剩下的回路中 I_λ 的正方向与 E_κ 的方向一致则 $w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa_{\mu-1}}$ 取为正，反之取为负．

由此还得出，如果从任意系统中选两个导线，则其中第二个导线中的电动势在第一个导线中引起的电流与第一个导线中同样大小的电动势在第二个导线中引起的电流恰好是相等的．

不难看出，电流的分母中的组合出现的条件亦可用下面的方法表示：如果由定理 1 给出的方程与 I_{κ_1}、I_{κ_2}、$\cdots$、I_{κ_μ} 无关，则有 $w_{\kappa_1}\cdot w_{\kappa_2}\cdot\cdots\cdot w_{\kappa_\mu}$ 的组合出现． 可以证明这个条件与下述条件是一致的．即，从应用定理 2 所形成的方程中不

能导出在 I_{κ_1}、I_{κ_2}、$\cdots$、I_{κ_μ} 之间或在这些电流的某几个之间的方程来. 这个论证常常使我更容易写出各电流 I 的分母中所缺的组合. 例如,如果导线 1、2、3 汇集于第一点, 3、4、5 汇集于第二点,5、6、7 汇集于第三点(如图 1 所示), 则所缺的组合包括:

$$w_1 \cdot w_2 \cdot w_3\text{、}\quad w_3 \cdot w_4 \cdot w_5\text{、}\quad w_5 \cdot w_6 \cdot w_7\text{、}$$

$$w_1 \cdot w_2 \cdot w_4 \cdot w_5\text{、}\quad w_3 \cdot w_4 \cdot w_6 \cdot w_7\text{、}\quad w_1 \cdot w_2 \cdot w_4 \cdot w_6 \cdot w_7$$

因此,图 2 中所示的导线组合中,各电流的分母就是 w_1、w_2、$\cdots$、w_6 中任意三个元素所有的组合之和, 但要去掉下列的组合:

$$w_1 \cdot w_2 \cdot w_4\text{、}\quad w_1 \cdot w_3 \cdot w_5\text{、}\quad w_2 \cdot w_3 \cdot w_6\text{、}\quad w_4 \cdot w_5 \cdot w_6.$$

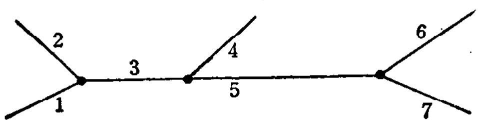

图 1

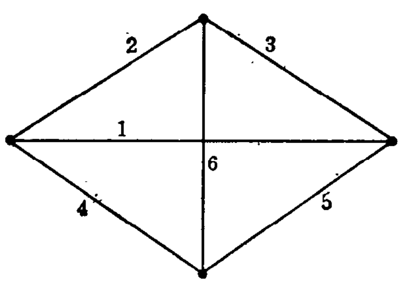

图 2

网络理论中的一些拓扑学原理

F. 雷　则*

I. 引　言

一个多世纪以前基尔霍夫创立了电路理论的基础. 他的创造性的工作虽然基本上是正确的，却不能说是完美的. 远在拓扑学成为近代数学的一个确定部分之前，基尔霍夫在引入回路电流、独立回路和在网络中求支路电流的方法等概念上用了许多拓扑学想法. 事实上，当基尔霍夫写这篇著名的论文时，人们对于拓扑学知道得还很少. 那时候线图的理论多半还是数学上的难题，这个难题起源于 L. 欧拉的著名的柯尼斯堡桥问题(见附录).

约在十九世纪末，波音卡对拓扑学［他称之为“拓扑(Aanlysis Situs)”］作出了许多贡献，把拓扑学置于牢固的基础上. 随着波音卡的初始工作，数学上有许多的发现，现在拓扑学已经是数学上一个特殊的分支了. 在最近 50 年间拓扑学影响着几乎所有的纯数学分支和一些应用数学的领域.

上世纪中许多作者曾企图借助线性代数和拓扑学领域的进展来重新考查和重新叙述基尔霍夫定律. 近些年来人们在

---

* 纽约 Syracuse, Syracuse 大学，电工程系。

电网络拓扑学方面有相当大的兴趣．一些现在关心的主要课题是：

1）基本的网络理论与基尔霍夫定律，

2）有源网络，

3）开关网络——布尔代数用于线图，

4）信息网络——在讯道网络中的信息流，

5）系统的可靠性，

6）拓扑综合方法：(a) 时域综合和(b) 频域综合．

虽然在上述课题上有不少零散的技术文献，但还没有关于这方面内容的整体概述．这是由于虽然基尔霍夫定律已经为从事电路理论的人们所熟知，但它们的全部内容还没有在一本英文的书籍中详尽的论述．近来的几本英文书[2]、[3]已经在这个方向迈了相当大的步子，几位作家也想要在他们将来的著作中把这些课题的深入论述包括进去．

本文的第一个目的是要给电讯工程师们介绍一些拓扑学上入门的但却是重要的概念，这部分内容在第 II 节中讲到．对于把拓扑学具体应用于工程领域来说，熟悉这些概念是必要的．本文的第二个目的是把第 II 节中的内容用于线性电路，这个内容将在第 III 节中讨论．

我很难把上述的课题作一个基本概括，时间和篇幅都不允许包括这样广阔的内容．但是总希望这里所作的工作能作为在这个特殊领域中进一步前进的踏脚石．本文虽然在下面要介绍一些前人工作的要点，但也不能详述所有前人在这方面的工作．

基尔霍夫的初始工作是在 1847 年发表的[1]*．约在四

* [1]是指参考文献。