〔苏〕H.C 库尔佩利 Б.A 舒瓦尔 著
林生 译

双边运算不等式及应用

黑龙江科学技术出版社

双边运算不等式及应用

Shuangbian yunsuan budengshi ji ying yong

〔苏〕H.C.库尔佩利，Б.А.舒瓦尔 著

林生 译

黑龙江科学技术出版社

一九八四年·哈尔滨

内 容 简 介

本书致力于研究各种类型的算子不等式及其构造和论证双边叙列逼近过程单调收敛于算子方程、偏微分方程、积分方程、积微分方程、代数与超越方程组，以及其它类型方程的运算及应用．给出了所研究类型的方程解的上下估计．

本书可供从事研究和应用求解方程的近似方法的科学和科技工作者，以及专门学习微分方程和数学物理、计算和应用数学等领域的研究生和高年级学生使用。

责任编辑：李月茹
封面设计：阎志刚

双边运算不等式及应用

〔苏〕H.C.库尔佩利 Б.A.舒瓦尔 著
林生 译

黑龙江科学技术出版社出版
(哈尔滨市南岗区分部街28号)
长春新华印刷厂印刷・黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32・印张12.5・字数250千
1984年6月第一版・1984年6月第一次印刷
印数：1—5.000

书号：13217・087　　定价：1.60元

序

当前自然科学、技术科学和许多应用科学中占压倒多数的数学问题，可归结为各种类型不可能精确求解的方程，因此求方程解的近似方法就成为现代应用分析的重要部分之一。

快速电子计算机的出现，并在实际计算中越来越深入的运用，就对各种叠代方法引起了更大的兴趣。这是由于它的计算程序简单，在现代计算机实现时要易于其它方法。在大量的叠代过程中有广泛的一类双边过程，它单调地从下方和上方逼近于方程的未知解。双边方法比起其它近似方法具有重要的优越之处，它给出了叠代过程的每一步都夹住包含未知解的可能性，这本身也就得到叙列逼近误差的一种方便的后验* 估计。

为得到双边叠代方法的初始逼近以及为研究它的单调收敛性，重要的辅助工具是相应类型方程的双边不等式。C. A. 恰普利金在建立他的关于微分不等式的定理基础上构造出微分方程近似积分的新的有效方法，它具有正如H.H. 鲁金所指出的平方收敛性。以后，关于微分、积分以及其它类型算子的不等式和它的应用、苏联和外国的作者们都有大量

---

* 该词在原书中印错了，类似的印刷错误我们纠正了一百多处，以后就不再一一指出。

的工作．这些定理对方程解的估计，两个解接近程度的估计，它的分布区域的估计，近似方法误差估计的建立，唯一性的证明，稳定性理论和应用分析的其它问题均可找到广泛的应用．

在积分不等式以及其它一般类型算子不等式和它于半序空间内相应的方程的研究中典型的条件是相应算子单调非降．对于常微分不等式组的情形，通常是该不等式组右端相应的矩阵在对角线外的元为单调非降的条件．

然而应用数学和其它科学的许多重要问题常常归结为不具有单调性的算子的方程和不等式．本书就致力于这种类型的不等式和方程的研究以及把它应用于构造方程解的双边单调的叙列逼近过程．

本书的基本部分是作者所得到的结果．其它结果主要只引入与所研究问题有直接关系的．

本书由六章组成．

第一章引入了半序空间中的泛函分析的一些预备知识，它对以后各章的主要内容的陈述将起实质性的作用．

第二章致力于半序空间中的一般双边算子不等式，并且借助这些不等式建立了相应类型方程解的上下估计．所研究的不等式和方程主要为这种类型，其中的算子不是单调的，但它具有混合单调性，即可表为两个变量的函数，它关于某一个变量为非降，而关于另一个变量为非增．也研究了若干特殊类的不等式，特别是渥尔特拉型算子的不等式．

第三章包含作者关于双边算子不等式用来构造半序格赋范巴拿赫空间中算子方程解的叙列逼近的单调过程的结果和

某些与其相近的结果．研究了一般叙列逼近过程和它的特殊情形——通常叠代过程，恰普利金和M．比科型方法的各种推广和修正以及它们类似的射影叠代．

后面几章致力于将前两章的某些结果应用于具有所考察的算子类的特殊性质的特殊类的算子不等式和方程．研究了积分不等式、常微分不等式、积微分不等式、代数和超越不等式组以及把它们应用于建立相应类型方程解的估计和构造，并论证双边叙列过程逼近于方程的解．

在书的最后所征引的文献只包含微分、积分和其它类算子的不等式及其众多应用的丰富文献中不大的一部分．作者力求包含在文献目录中主要都是紧密应用于本书论题的研究工作，并且仅对作者的结果有直接关系的才引用原文．

我们非常感谢H．B．阿兹别列夫的宝贵建议，他是微分和积分不等式理论的苏联学派的创始人之一，他实质上发展了苏联学者恰普利金关于双边方法的富有成效的思想．

对责任编辑Ю．A．米特罗波列斯基和评阅者A．M．沙摩依连科与A．Ю．鲁茨加的一系列有益的建议和意见表示自己愉快的谢意．

目　　录

第一章　半序空间中泛函分析的预备知识

§1　半序集

在数学和它的应用中常常遇到这样的对象的集合，它不具有类似于例如实数的序的性质的那种序的性质，如果研究具有公共定义域的所有实函数的集，并且按通常方式确定《小于》和《大于》概念，那么就不是任何两个函数都可以互相比较．在一点处第一个函数的值较大，而在另一点处则第二个函数的值较大的情况就是这样．对矢量空间可以得到类似的情况，如果我们按自然方式确定序的概念，对矢量函数空间也有同样情况．因此利用半序集概念，这种在许多数学对象中所固有的性质所建立的理论在泛函分析和它的应用中具有很丰富的内容，并且富有成效．线性半序空间理论是Л．В．康托罗维奇在1935—1937年所建成．这个理论被广泛的应用于现代数学的不同领域和边缘科学．后来半序空间理论，由苏联和外国数学家们在许多不同方向作了很大的发展．在它的基础上能够构造出现代应用数学中许多重要问题解的一系列有效的近似方法．

定义　集M叫做半序的，假如对某些元偶u，$v\in M$确定了关系$u<v$（u小于v），并且满足下列公理：

a）$u<v$，除去 $u=v$ 或 $v<u$；

b）如果 $u<v$ 且 $v<w$，那么 $u<w$。

不等式 $u<v$ 也可以写成 $v>u$（v 大于 u）的形式。如果 $u<v$ 或 $u=v$，那么可写成 $u\leqslant v$ 或 $v\geqslant u$。

定义 集 M 叫做有序的，或整序的，如果对于任意的 u，$v\in M$ 恰好满足下列关系式之一：$u<v$，$u=v$，$u>v$。

我们引入在分析中常常会遇到的有序和半序集的一些例子。

1．所有实数的集是有序集，假如关系 $\leqslant$ 理解为通常的含义。

2．实 n 维矢量空间 R_n 可按下列方式成为半序的：对于两个矢量 $u=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 和 $v=\{v_1v_2,\cdots,v_n\}$，规定 $u<v$，如果对于所有的 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $u_i\leqslant v_i$，并且至少对于一个 i 有 $u_i<v_i$。

空间 R_n 也可以这样建立半序，规定 $u\leqslant v$，如果对于集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 的某个子集 G 中的所有的 i 都有 $u_i\leqslant v_i$，并且对于所有 $i\in N-G$ 有 $u_i\geqslant v_i$。

空间 R_n 还可以用各种不同的方法使之有序．例如对于两个矢量 u，v 关系 $u<v$ 可以这样确定：$u<v$，假如可找到指标 k（$0\leqslant k<n$）使得对于 $i=1,2,\cdots,k$ 有 $u_i=v_i$，并且 $u_{k+1}<v_{k+1}$（如果 $u_1<v_1$，则 $k=0$）。

3．类似地可以建立所有具有可列多个坐标的实矢量 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，即所有实叙列的集 S 的序（全序或半序）。

4. 给定在空间R_n的区域B内的所有实连续函数$u=u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的集$C(B)$为半序的，假如规定$u<v$，当对于所有点$x\in B$有$u(x)\leqslant v(x)$，并且至少有一个点$x\in B$，使得$u(x)<v(x)$时.

5. 矢量$u=u(t), u(t)=\{u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)\}$的集（$n$为自然数或无限)，其中每个坐标$u_i(t)$是相应定义在区域$B_i$内的实函数，可按下列方式成为半序的：$u<v$，假如对于所有$i=1,2,\cdots,n$，有$u_i(t)\leqslant v_i(t)$，并且至少有一个值$i$使$u_i(t)<v_i(t)$(在例 4 给定的意义下确定).

定义 半序集M的某子集M_0叫做有下（上）界，假如存在元$Z\in M$，使得对于所有$x\in M_0$满足关系式$x\geqslant z$（$x\leqslant z$）. 在上面给定的情况下元素z称为集M_0的下（上）界.

定义 元m（元M）叫做子集M_0的下确界或最大下界（上确界或最小上界)，如果$m(M)$是M_0的下（上）界，并且于M_0的任一下（上）界Z有关系式$m\leqslant Z$（$M\geqslant Z$).

上确界和下确界相应地记做$\inf M_0$和$\mathrm{Sup} M_0$. 容易证明如果 inf和Sup存在，那么它们都是唯一的.

定义 所有使得$u\leqslant x\leqslant v$的x的集称为区间，并记为$[u, v]$，其中x，u，v为半序集M的元.

定义 半序集M叫做格，如果对于任意两个元x，$y\in M$存在下确界$\inf\{x, y\}$和上确界$\mathrm{Sup}\{x, y\}$.

§1中作为例子所引入的一切集合都是格. 在集R_n和S的情况下下确界和上确界可按坐标加以计算，设$x=\{x_1, \cdots, x_n\}$，$y=\{y_1, \cdots, y_n\}$，则

$$\inf\{x, y\} = \{u_i\},\ u_i = x_i,\ 当x_i \leqslant y_i时,$$
$$u_i = y_i,\ 当y_i \leqslant x_i时;$$
$$\mathrm{Sup}\{x, y\} = \{v_i\},\ v_i = x_i,\ 当x_i \geqslant y_i时,$$
$$v_i = y_i,\ 当y_i \geqslant x_i时.$$

在半序集$C(B)$中元$u = \inf\{x, y\}$和$v = \mathrm{Sup}\{x, y\}$可按逐点的值加以计算：

$$u(t) = \min\{x(t), y(t)\},$$
$$v(t) = \max\{x(t), y(t)\}.$$

因为$x(t)$和$y(t)$连续，所以$u(t)$和$v(t)$也连续，从而它们都属于$C(B)$.

§2 广义度量空间

定义 我们以G表示这样的集合，它具有下面性质（例如参看〔71〕）：

1) G是含有最小元θ的半序集；

2) 对于任意的元u，$v \in G$，唯一确定它们的和$u + v \in G$，并且满足条件：

a) $u + v = v + u$，$u + \theta = u$；

b) 若u，v，$w \in G$且$u \leqslant v$，则$u + w \leqslant v + w$；

c) 由不等式$u + v \leqslant w$可得出$u \leqslant w$；

3) 任何非增序列$\{u_n\}(u_n \in G, u_{n+1} \leqslant u_n,\ n = 1, 2, \cdots)$有唯一的极限（记作$\lim u_n = u$或者$u_n \downarrow u$），并且具有以下性质：

a) 若$u_n = u\ (n = 1, 2, \cdots)$，则$u_n \downarrow u$；

b) 若$u_n \downarrow u$，$v_n \downarrow v$，则$u_n + v_n \downarrow u + v$；

c) 若$u_n\downarrow u$，$v_n\downarrow v$且$u_n\leqslant v_n$，则$u\leqslant v$；

d) 改变叙列的前有限个元并不改变它的极限.

例如集G可以是：具有非负坐标的有限维或无限维矢量的集，定义在某区域内的非负函数集等等.

现在我们来定义抽象的广义度量空间，特别是用集G的元来度量它的空间R.

定义 由元x，y，…组成的任意集E叫做由集G度量的抽象空间，如果每一对元x，$y\in E$相应有元$d(x, y)\in G$，称为x和y的距离，它具有通常度量空间距离的性质，即

1) $d(x, y)=\theta$当且仅当$x=y$；

2) 对于任意的x，$y\in E$有$d(x, y)=d(y, x)$；

3) 对于一切x，y，$Z\in E$有$d(x, y)\leqslant d(x, Z)+d(y, Z)$.

定义 我们以R表示具有以下性质的空间（例如参看〔71〕）：

1) R是以集G的元来度量化的抽象空间；

2) 对于某些元列$\{x_i\}$ $(x_i\in R)$有唯一确定的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ $(x\in R)$，改变其前有限项并不改变该极限，同时若$x_n=x$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$；

3) 任意的球$S(x^*, r)$，这里$x^*\in R$，$r\in G$，即这样的元$x\in R$的集，它使得$d(x^*, x)\leqslant r$，在R中的收敛意义下是闭集.

4) 空间R在这样意义下是完全的，若$\{x_n\}$满足条件

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqslant C_n \quad (n, p = 0, 1, 2, \cdots),$$

这里$C_n \downarrow \theta$，则叙列$\{x_n\}$收敛到某个元$x \in R$.

现在我们假定广义度量空间是半序的.

定义 空间R叫做正则半序的，如果任何非降（非增），有上（下）界的叙列$\{x_n\}(x_n \in R)$，按空间R的度量收敛.

可以给出正则半序空间的一般定义.

定义 定义有这样或那样收敛概念的半序空间E叫做正则半序的，如果任何非降（非增），有上（下）界的叙列$\{x_n\}$（$x_n \in E$）必收敛.

§3 半序巴拿赫空间和格—赋范空间

定义 带有零元θ的线性空间E叫做半序线性空间，假如除去半序集的公理a)和b)(参看§1)之外还满足条件

c) 对于任意的$\lambda > 0$由$x \geqslant \theta$可得到$\lambda x \geqslant \theta$;

d) 由$x_i \geqslant y_i (i = 1, 2)$ 可得到$x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2$.

在半序线性空间中区间〔u, v〕，即使得$u \leqslant x \leqslant v$的$x \in E$的集是凸集.

定义 半序线性空间叫做K—线性集(Л. В. 康托罗维奇的线性集)，假如对于任意的元x和y可确定他们的上确界($\mathrm{Sup}(x, y)$).

定义在K—线性集E中元x的模为

$$|x| = x_+ + x_-,$$

这里x_+和x_-是元x相应的正的和负的部分，它由下列等式

$$x_+ = \mathrm{Sup}(x, \theta); \quad x_- = \mathrm{Sup}(-x, \theta).$$

确定用这样方法引入元的模具有范数的性质.

所有在§1里引入的半序集的例子均可作为K—线性集的例子.

定义 K—线性集叫做阿基米德的，如果由对于某x，$y\in E$和任意自然数n满足不等式$nx\leqslant y$可推出$x\leqslant\theta$.

我们指出所有在§1中考察的半序集，以及下面所引入的K—线性集都是阿基米德K—线性集的例子

1) K—线性集$l_p(p\geqslant 1)$,即所有这样的实数列$x=\{x_n\}$的集，它满足条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty;$$

正的元指的是对于所有$n=1,2,\cdots$都有$x_n\geqslant 0$，同时至少对于一个n有$x_n>0$;

2) K—线性集$L_p(p\geqslant 1)$，即所有这样的可测实函数$x(t)$的集，它定义在区间$[a,b]$上且满足条件

$$\int_a^b|x(t)|^p dt<\infty$$

在所给情况下认为$x>\theta$,如果几乎处处有$x(t)\geqslant 0$，同时在正测度集上有$x(t)>0$.

定义 巴拿赫空间E叫做半序巴拿赫空间，如果E是K—线性集，并且E中范数具有单调性，即由$|x|\leqslant|y|$可得到$\|x\|\leqslant\|y\|$.

定义 半序巴拿赫空间叫做正则的，如果任何有上(下)界的非降（非增）叙列按范数收敛.

定义 如果巴拿赫空间每个按范数有界的单调元列按范

数收敛，则空间叫做完全正则的.

可以证明，所有完全正则半序巴拿赫空间是正则的.

不难证明，所有有限维赋范的矢量空间是完全正则的半序空间. 空间l_p和L_p同样也是完全正则的半序空间.

有界叙列的空间m和连续函数的空间$C(B)$不是正则的. 例如公式

$$x_{n,i}=\frac{i}{i+n},\quad y_{n,i}=\frac{n}{i+n},$$

所确定的元列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别为非增和非降，并且两个元列分别有下界元$\theta=\{0,0,\cdots,0,\cdots\}$和上界元$e\{1,1,\cdots 1,\cdots\}$，它们按由公式

$$\|x\|=\operatorname*{Sup}_i|x_i|$$

所确定的空间m的范数不收敛. 在区间$[0,1]$上的连续函数列$x_n(t)=1-t^{\frac{1}{n}}$非增，而$y_n(t)=1-t^n$非降，并且两个叙列分别有下界函数$x(t)\equiv 0$和上界函数$x(t)\equiv 1$，然而这些叙列在空间C中没有极限.

定义 实巴拿赫空间E中的闭集$K\subset E$叫做锥，如果满足条件：

a）对于所有$\alpha,\beta\geqslant 0$由u，$v\in K$可得到$\alpha u+\beta v\in K$；

b）如果$x\neq\theta$，则元x或$-x$中至少有一个不属于K.

锥叫做实心的，如果包含内点.在矢量空间中锥的最简单的例子是带有非负坐标的矢量的集. 在泛函空间C和L^p中非负函数的集是锥，容易看到，在空间C中非负函数的锥是实心的，而在空间L^p中不是实心的.

在锥不具有正则的性质的情况下，由锥的元列中上(下)