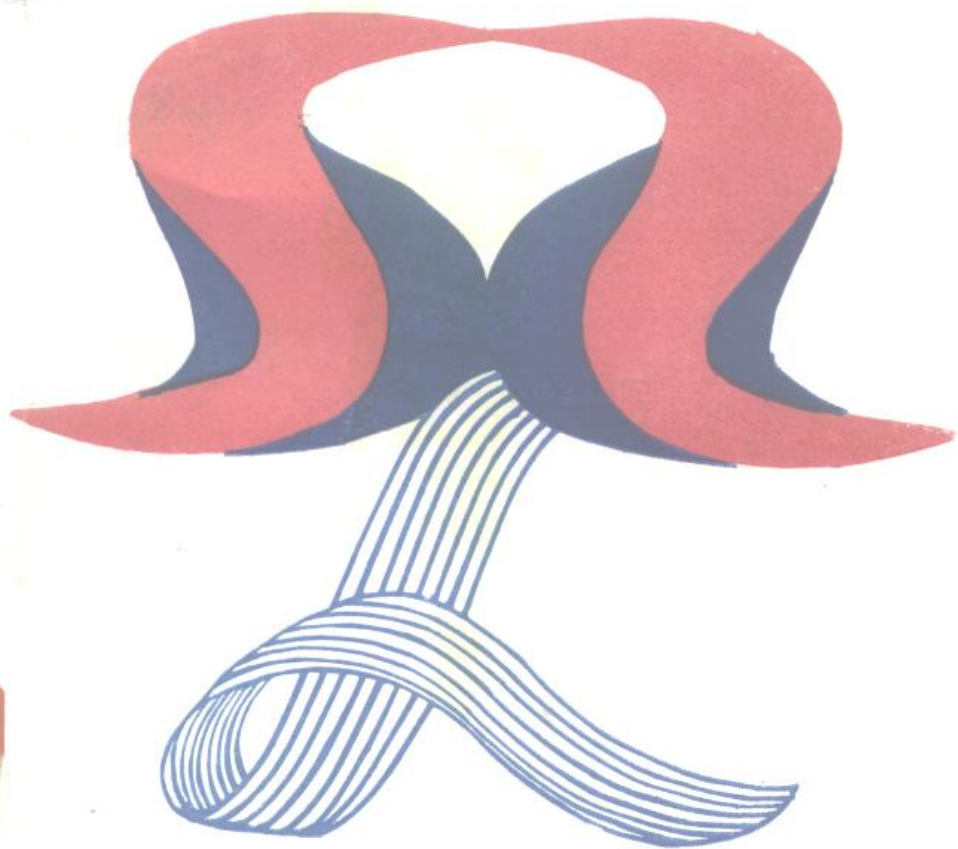


塑性力学

贾乃文 编著

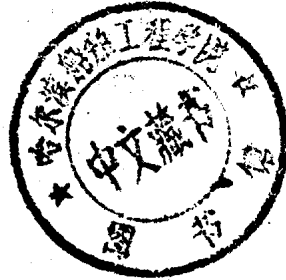


重庆大学出版社

360130

塑性力学

贾乃文 编著



重庆大学出版社

内 容 摘 要

本书分十三章：绪论、塑性中的应力和应变、屈服条件、塑性本构关系、梁的弯曲、柱体的扭转、轴对称和球对称问题、环形板的弹塑性弯曲、理想刚塑性平面滑移线、金属塑性成形力学分析、极限定理与结构极限分析、拉伸塑性稳定、粘塑性概论。各章末均有精选之习题。本书概念明确、条理清晰、表达简单。本书可作为力学、机械、土建等专业的本科生和研究生的塑性力学教科书或教学参考书使用，也可供化工、水利、造船等专业的学生和教师以及工程技术人员参考。

塑 性 力 学

贾乃文 编著

责任编辑 刘天骥

重庆大学出版社出版发行

重庆科委印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：14.375 字数：323千

1992年7月第1版 1992年7月第1次印刷

印数：1-3000

标准书号： ISBN 7-5624-0492-5 定价：8.50元
O·67

〔中〕新登字 020 号

前 言

这是一本为学习塑性力学的大学生和研究生以及为讲述塑性力学的教师而编写的教科书和教学参考书。

在纷繁浩瀚的经典和近代塑性理论中，在庞大博深的应用塑性工程领域，如何精选素材，系统而又全面，简练而又条理地编写一本塑性力学教材，是作者作为一名讲述塑性力学的教师多年来的愿望。但之所求，未必付之而就。本书是作者对此的试尝，愿将它作为引玉之砖，抛给读者，望从中有所获益。

本书重点在于对各种力学模型和工程问题的塑性变形过程进行应力和变形分析。本书十三章中，除绪论、应力应变张量、屈服条件和塑性本构关系四章外，其余九章均是对力学模型和工程问题的解析分析和理论求解。本书引进了国内外最新塑性力学教材和文献的精华，也包括了作者多年来这方面的研究成果。作者力求的是表述的概念明确，分析的条理清晰，全面开拓塑性力学的解析领域。但限于水平，书中一定有很多错漏之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

在本书出版的时候，作者要特别感谢多年来给以指教和帮助的清华大学黄克智教授、徐秉业教授；特别感谢为本书出版做出贡献的《金属成形工艺》编辑部刘天骥先生；感谢支持作者工作的华南理工大学工程力学系的领导和各位老师。

作者 于广州、五山

1992年5月

目 录

| | |
|------------------------------|-------|
| 第一章 绪论 | (1) |
| 第二章 塑性中的应力和应变 | (5) |
| § 2-1 应力张量及其不变量 | (5) |
| § 2-2 等斜面上应力及应力强度 | (10) |
| § 2-3 应变张量及其不变量 | (16) |
| § 2-4 应变速度与应变率 | (23) |
| § 2-5 应变强度的数学合理描述 | (27) |
| § 2-6 平面和轴对称应力和应变 | (30) |
| 第二章习题..... | (33) |
| 第三章 屈服条件 | (35) |
| § 3-1 屈服函数与屈服面 | (35) |
| § 3-2 两个常用的屈服条件 | (40) |
| § 3-3 适用于其它材料的屈服条件 | (47) |
| § 3-4 加载准则与强化方式 | (55) |
| § 3-5 关于材料强化的两个公设 | (61) |
| § 3-6 正交各向异性屈服条件 | (67) |
| 第三章习题..... | (70) |
| 第四章 塑性本构关系 | (72) |
| § 4-1 弹性应力应变关系 | (72) |
| § 4-2 Levy-Mises增量理论 | (75) |
| § 4-3 Prandtl-Reuss增量理论..... | (79) |
| § 4-4 塑性势与相关联流动法则 | (83) |

| | | |
|------------|------------------|---------|
| § 4-5 | 形变理论塑性本构方程 | (87) |
| § 4-6 | 本构理论的验证和比较 | (93) |
| | 第四章习题 | (99) |
| 第五章 | 梁的弯曲 | (101) |
| § 5-1 | 矩形截面梁的弹塑性弯曲 | (101) |
| § 5-2 | 弹塑性变形梁的挠度 | (105) |
| § 5-3 | 矩形截面线性强化梁的弯曲 | (109) |
| § 5-4 | 三角形截面梁的弹塑性弯曲 | (112) |
| § 5-5 | 薄壁筒的弯曲和扭转 | (116) |
| § 5-6 | 幂强化材料梁的弯曲和拉伸 | (122) |
| § 5-7 | 曲梁的纯弯曲 | (125) |
| | 第五章习题 | (132) |
| 第六章 | 柱体的扭转 | (134) |
| § 6-1 | 柱体扭转的塑性比拟 | (134) |
| § 6-2 | 圆截面柱的弹塑性扭转 | (139) |
| § 6-3 | 强化材料圆截面柱的扭转 | (142) |
| § 6-4 | 残余应力和残余变形 | (146) |
| § 6-5 | 扭转和拉伸作用下圆柱体 | (148) |
| § 6-6 | 幂强化圆柱承受扭转和拉伸 | (152) |
| § 6-7 | 理想弹塑性变直径柱扭转 | (157) |
| § 6-8 | 球坐标下幂强化圆锥杆扭转解法 | (161) |
| § 6-9 | 幂强化材料非圆柱体扭转 | (165) |
| | 第六章习题 | (169) |
| 第七章 | 轴对称和球对称问题 | (171) |
| § 7-1 | 理想弹塑性厚壁圆筒 | (171) |
| § 7-2 | 幂强化材料厚壁圆筒 | (176) |

| | | |
|-----------------------|------------------------|-------|
| § 7-3 | 理想弹塑性厚壁球壳 | (179) |
| § 7-4 | 幂强化材料厚壁球壳 | (183) |
| § 7-5 | 轴(球)对称问题变形分析 | (186) |
| § 7-6 | 理想弹塑性轴对称受内压及剪力解 | (192) |
| § 7-7 | 幂强化轴对称受内压及剪力解 | (196) |
| § 7-8 | 理想弹塑性旋转圆盘 | (201) |
| § 7-9 | 拉伸颈缩应力分析 | (205) |
| 第七章习题 | | (208) |
| 第八章 环形板的弹塑性弯曲 | | (210) |
| § 8-1 | 平面Mises屈服条件的参数式 | (210) |
| § 8-2 | 环形板纯弯曲的弹塑性参数解 | (215) |
| § 8-3 | 剪-弯作用下环板弹塑性分析 | (221) |
| § 8-4 | 幂强化材料环板的弯曲 | (227) |
| § 8-5 | 线性变厚度环形板弹塑性弯曲 | (232) |
| § 8-6 | 圆柱型正交异性圆环板塑性解 | (239) |
| § 8-7 | 环板的非轴对称弯曲 | (246) |
| 第八章习题 | | (251) |
| 第九章 理想刚塑性平面滑移线 | | (252) |
| § 9-1 | 平面应变的应力分析 | (252) |
| § 9-2 | 滑移线的理论分析 | (257) |
| § 9-3 | 单边受压楔体的极限荷载 | (263) |
| § 9-4 | 圆孔受均匀内压滑移线 | (267) |
| § 9-5 | 切口试件拉伸极限荷载 | (270) |
| § 9-6 | 金属塑性成形滑移线(一) ——冲压问题 | (275) |
| § 9-7 | 金属塑性成形滑移线(二) | |

| | |
|-------------------------------|--------------|
| ——拉拔问题····· | (281) |
| § 9-8 平面应变的速度滑移场····· | (285) |
| § 9-9 滑移线场中的不连续问题····· | (292) |
| § 9-10 平面应力问题滑移线····· | (298) |
| 第九章习题····· | (305) |
| 第十章 金属塑性成形力学分析 ····· | (308) |
| § 10-1 塑性成形变形力的解析方法····· | (308) |
| § 10-2 变形力的主应力解法····· | (312) |
| § 10-3 变形力的功平衡解法····· | (316) |
| § 10-4 横向变形速度对变形力的影响····· | (321) |
| § 10-5 塑性成形的连续化计算方法····· | (324) |
| § 10-6 板料冲压的薄膜理论····· | (331) |
| 第十章习题····· | (335) |
| 第十一章 极限定理与结构极限分析 ····· | (336) |
| § 11-1 极限分析基本概念····· | (336) |
| § 11-2 下限定理和上限定理····· | (340) |
| § 11-3 连续梁的极限荷载····· | (343) |
| § 11-4 超静定刚架极限分析····· | (347) |
| § 11-5 圆板的极限荷载····· | (355) |
| § 11-6 方板的极限荷载····· | (362) |
| § 11-7 结构安定性的概念····· | (366) |
| 第十一章习题····· | (372) |
| 第十二章 拉伸塑性稳定 ····· | (374) |
| § 12-1 简单的拉伸塑性失稳····· | (374) |
| § 12-2 轴对称和球对称薄壁结构失稳····· | (378) |
| § 12-3 幂强化材料失稳应力和应变计算····· | (381) |

| | |
|---------------------------|-------|
| § 12-4 内压和轴向拉力作用下薄壁管····· | (384) |
| § 12-5 金属圆膜的塑性失稳····· | (387) |
| § 12-6 旋转内压组合作用的壳体稳定····· | (393) |
| § 12-7 旋转圆盘的塑性失稳····· | (401) |
| 第十二章习题····· | (407) |
| 第十三章 粘塑性概论 ····· | (409) |
| § 13-1 粘塑性本构方程····· | (409) |
| § 13-2 粘塑性轴对称平面问题····· | (415) |
| § 13-3 粘塑性轴对称平面动力问题····· | (424) |
| § 13-4 粘塑性空间球对称问题····· | (431) |
| § 13-5 两个粘塑性问题的经典解····· | (437) |
| 第十三章习题····· | (444) |
| 参考文献 ····· | (445) |

第一章 绪 论

物体受到外力作用后就产生变形，除去外力后变形可以全部恢复的现象叫作材料的弹性；当外力超过一定限度时，物体产生不可恢复的变形，称为材料的塑性。

由于塑性变形是不可恢复的变形，因而塑性变形不仅与产生这一变形的应力状态有关，而且与加载状态、加载历史等有关，致使塑性状态与弹性状态在应力应变关系上有根本不同，形成和发展了塑性力学这门学科。

塑性变形是弹性变形的后续过程。经典塑性力学中采用和弹性力学相同的材料假设：即认为材料是均匀连续的；忽略温度和变形速度对材料本身的影响；材料在进入塑性变形前表现为各向同性等。弹性力学中从静力学角度描述材料或质点的平衡方程和边界条件，以及从几何角度描述材料或质点的位移与应变方程在塑性力学中都是适用的。弹性力学与塑性力学的主要区别在于从物理学角度描述材料或质点的应力和应变的本构关系。

一般认为：经典的塑性力学是从法国科学家Tresca 1864年提出最大剪应力屈服准则开始。经典塑性力学是对材料的塑性变形阶段进行宏观分析和研究，力求圆满的获得工程结构的应力分布。这就必须对材料的塑性行为提出以下简化和假设：

（一）弹塑性应力应变曲线

图 1.1 中所示是塑性力学中经常应用的五种应力应变关

系曲线，它们分别是

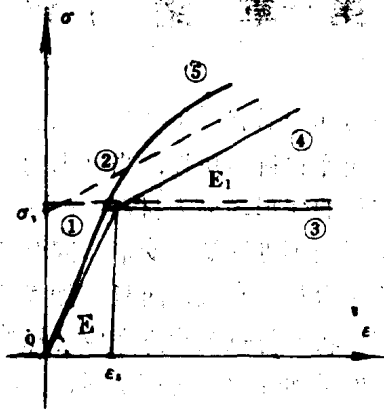


图 1.1

①理想刚塑性曲线，应力应变方程为

$$\sigma = \sigma_s \quad (1.1)$$

②线性强化刚塑性曲线，应力应变方程为

$$\sigma = \sigma_s + E_1 \epsilon \quad (1.2)$$

③理想弹塑性曲线，应力应变方程为

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & (\epsilon \leq \epsilon_s) \\ \sigma_s & (\epsilon > \epsilon_s) \end{cases} \quad (1.3)$$

④线性强化弹塑性曲线，应力应变方程为

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & (\epsilon \leq \epsilon_s) \\ \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s) & (\epsilon > \epsilon_s) \end{cases} \quad (1.4)$$

⑤幂强化曲线，应力应变方程为

$$\sigma = A \cdot \epsilon^n \quad (1.5)$$

式中A为常数，n可取0~1.0之间任意值。

(二) Bridgman假设

Bridgman通过大量的静水压力实验证实，一般金属体积应变完全是线性弹性的，静水压力不产生塑性变形。即是均匀压力下的金属材料不会产生塑性屈服，这一实验在塑性力学中被以假设形式加以运用，称为Bridgman假设。

(三) Bauschinger 效应

如图 1.2 所示，通过对拉伸和压缩屈服条件相同的材料，进行拉伸到强化阶段 B 点再卸载之后反向加载的实验，实验得出的压缩屈服点为 B'，即导致压缩屈服极限降低的现象，称之为 Bauschinger 效应。

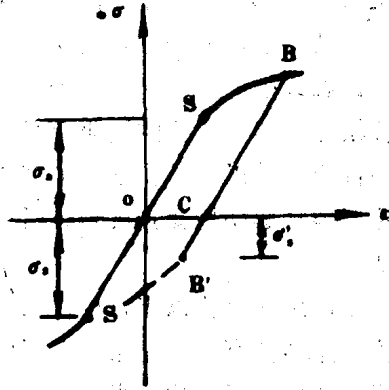


图 1.2

经典塑性力学的研究通常可以划分两个部分，即小弹塑性变形的塑性力学和有限变形塑性力学。小弹塑性变形的塑性研究即是限于塑性变形与弹性变形有同一量级，小弹塑性强化材料的理论方面，苏联学者伊留申等在本世纪40年代对此做出了重要贡献。而塑性有限变形或大变形，必须依赖于另一种应变的概念，即是自然应变或对数应变。如设杆件拉伸时， l_0 表原始长度， l 为瞬时长度，自然应变是

$$d\epsilon = \frac{dl}{l} \quad (1.6)$$

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right) \quad (1.7)$$

它与工程应变 ϵ 的关系为

$$\epsilon = \ln(1 + \epsilon) \quad (1.8)$$

这就带来有限变形塑性问题中应力和变形求解的理论困难，因而有限变形塑性力学是尚待开拓的力学领地。

近些年来，人们在宏观研究材料的塑性状态的同时，开始从微观或细观研究塑性变形的机制。因为金属晶格的滑移和位错等对塑性变形的屈服有很好的解释。因此金属材料微观塑性力学是以金属物理学为基础的，学习微观塑性力学将会更好地理解塑性变形机理，对宏观的塑性变形有更为深刻的认识。

本世纪60年代以来，塑性力学的研究进入了一个崭新的时代，弹塑性有限单元法，无屈服面塑性理论以及计入体积变形对塑性变形影响的岩土材料塑性力学有了突破性进展。塑性力学以及它的理论在力学、机械、土建、航空、化工、水利、造船等工程上日益得到广泛的应用。加强塑性力学的学习和对塑性理论的研究对国民经济越来越重要。

第二章 塑性中的应力和应变

§ 2-1 应力张量及其不变量

三维空间中任意一点的应力状态可由九个应力分量表示出来；考虑到剪应力互等条件，九个应力分量中仅有六个独立的应力分量。这些应力分量满足二阶张量的定义和性质，所以应力张量是二阶张量。即可用矩阵形式表达成

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

按读者习惯的笛卡尔坐标表达的应力分量，(2.1)式的应力张量又可写成

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (i, j=x, y, z) \quad (2.2)$$

塑性力学中通常引入平均应力和偏斜应力的概念；用 σ_m 表示主应力的平均值，根据应力状态的不变量分析，它又等于正应力的平均值，因而可以用分量表示 σ_m 为

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

如果某微元体或微元体的某确定方向上，不存在剪应力，三

个方向的正应力也都等于 (2.3) 所示的 σ_m 值, 称这时的应力张量为球形应力张量, 能表达成矩阵形式

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.4)$$

通常用 S_{ij} 表示应力偏斜张量的分量, 它可以借助于二阶符号张量 δ_{ij} 方便地由二阶张量和二阶球张量表达, 符号张量 δ_{ij} 为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.5)$$

S_{ij} 与应力张量和应力球张量之间关系为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij} \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

如用矩阵形式表达上式则

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$[S_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.8)$$

自然 (2.8) 式用 $(i, j=1, 2, 3)$ 形式表达也是很容易的, 这里不再赘述。

由 (2.4) 式知, 应力球张量表示三个方向均值应力状

态，即所说的静水压力情况。由经典的 Bridgman 实验验证，在静水压力作用下，固体金属的体积变化基本是弹性的，塑性变形很大时，认为体积不可压缩是合理的。因而经典塑性理论中，通常研究塑性区应力和变形时，都忽略球张量对变形的影响，在特别指出的小弹塑性变形时，甚至略去弹性体积变形，那就完全略去球张量对变形的影响，这就足以表明塑性变形依赖于偏斜应力张量，偏斜应力张量及其不变量等的分析在塑性力学中占有重要地位。

从一点的应力状态中，我们总可以找出互相垂直的三个应力平面，在这些应力平面上仅有正应力没有剪应力。这时的应力状态为主应力状态；它的三个互为垂直的应力平面为主应力平面；主应力平面上的正应力称为主应力。显然，球应力张量的应力状态是主应力状态的特殊情况。也就是如果这三个主应力彼此相等的话，那么这应力状态又是球应力分量给出的球应力张量；或者可以从三个不同的主应力中，按平均应力截出一个三个方向相等主应力状态，也会成为球应力分量给出的球应力张量。如设 σ_n 为主应力，寻找主应力大小的方法是令如下行列式为零

$$|\sigma_{ij} - \sigma_n \delta_{ij}| = 0 \quad (2.9)$$

即是直角坐标下的如下行列式为零

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

从弹性力学知这一行列式为零表达式的力学含义为由直角坐标应力分量给出的 x 、 y 和 z 方向的合力与由主应力分量给出的 x 、 y 和 z 方向的合力是等值的。展开上面行列式并

写成

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad (2.11)$$

上面线性代数方程各系数 I_1 、 I_2 、 I_3 分别为应力状态的第一、第二和第三不变量，在直角坐标应力分量给定的情况下， I_1 、 I_2 和 I_3 分别是

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

因为这三个不变量是不随坐标改变而变化的，通常采用主应力分量表示如下

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

在求主应力分量 σ_n 时，应当采用(2.12)式。应力张量作为二阶张量亦存在三个不变量，分别为 σ_{ii} 、 $\sigma_{ij}\sigma_{ji}$ 、 $\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}$ 。这三个应力张量不变量与上面给出的应力状态不变量(2.13)式之间存在如下关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ii} &= I_1 \\ \sigma_{ij}\sigma_{ji} &= I_1^2 - 2I_2 \\ \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} &= I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

从应力偏量分量表达式(2.8)看出，应力偏量也是二阶张量。也可以类似于(2.11)式列出求其主应力的代数方