〔苏〕Л. Д. 梅夏尔金 著

# 概率论习题集

盛骤 谢式千 潘承毅 译

高等教育出版社

# 概 率 论 习 题 集

[苏] Л.Д. 梅夏尔金 著

盛 骤 谢式千 潘承毅 译

高 等 教 育 出 版 社

## 内 容 提 要

本书译自苏联莫斯科大学出版社 1963 年出版的 Л. Д. Мешалкин 著«Сборник задач по теории вероятностей», 其中精选了概率论的习题五百道, 书末并对奇数号码习题给出了答案. 本书主要供高等院校数学专业师生参考, 也可供其它各专业师生教学概率论课程时参考.

**概率论习题集**

[苏] Л. Д. 梅夏尔金 著

盛 骤 谢式千 潘承毅 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 5.5 字数 111,000

1983 年 5 月第 1 版 1984 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—39,600

书号 13010·0886 定价 0.70 元

# 序 言

«概率论习题集»原先是供大学物理-数学系学生使用的.其目的是,帮助研究概率论的读者深入地掌握基本理论,并能熟悉应用概率论的方法解决实际问题.这本习题集与Б. В.格涅坚科的教本«概率论教程»第三版(物理数学出版社,莫斯科,1961)*大体上相适应.本书计有500道习题,它们是根据专论和杂志论文的材料编纂成的,也有选自现有的习题集和教本的.习题集由9章组成,各章有简短的引言,并再分为小节。I—IV章的习题和V、VIII、IX章的部分习题对应于国立莫斯科大学力学-数学系的半年课程«概率论»,V—VIII章的习题对应于半年课程«概率论续篇».复杂的习题以星号标出并给以提示.本书有若干张附表.只对奇数号码的习题给出答案,这样做是为了培养学生独立地检验题解的正确性,也为了测验时可以利用习题集的材料.教师可以利用下述三本习题集作为本书的补充,它们包含了精选过的关于统计和随机过程理论的材料。

1. Володин Б. Г., Ганин М.П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б., Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей. Судпромгиз, Л. 1962.

2. Takács Lajos. Stochastic Processes. Problems and

---

* 该书第二版有中译本,高等教育出版社,1956——译注.

Solutions (Wiley).

3. David F. N. and Pearson E. S., Elementary Statistical Exercises (Cambridge, Univ. Press, 1961).

Л. Д. 梅夏尔金



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目　　录

# I. 基 本 概 念

本章的习题大体上与 Б. В. 格涅坚科的概率论教程 §1—8 的材料相对应. 为方便计，我们在这里以图解来说明今后用到的事件之间的相互关系。

设在平面上随机地抛掷一点，并设 $A$、$B$ 分别表示这点落在圆 $A$ 内、圆 $B$ 内这一事件. 在图 1.$a$—1.$e$ 中画出了有阴影线的区域，点落入这些区域对应于事件：

$$A+B(A\cup B),\ AB(A\cap B),\ A\circ B,\ A/B,\ \overline{A}$$

这些事件以及与它们对应的集合论的运算称为：在情况($a$)，事件 $A$ 与 $B$ 的和或并；在情况($b$)，事件 $A$ 与 $B$ 的积或交；在情况($c$)，事件 $A$ 与 $B$ 的对称差；在情况($d$)，事件 $A$ 与 $B$ 的差；在情况($e$)，事件 $A$ 的逆事件. 我们要指出，事件 $A\circ B$ 当且仅当事件 $A$、$B$ 中有一个且只有一个出现时才出现. 图 1.$f$ 对应于事件 $B\subseteq A$. 图 1.$g$ 对应于事件 $AB=\emptyset$, 这里 $\emptyset$ 是空集的记号 (空集有时也记作 $\Lambda$ 或 0). 若 $AB=\emptyset$, 则称 $A$ 和 $B$ **为不相容或不相交事件.**

第二节的习题主要是为那些对将理论应用于统计感兴趣的人准备的. 其中使用了下述记号：$N$ 是群中事物的个数，$N\{\ \}$ 是具有花括号内的特性的事物的个数. 这些习题选自《统计理论引论》(英文原著《An introduction to the theory of statistics》, G. U. Yule 及 M. G. Kendall, C. Griffin 公司，伦敦，1937；其俄译本《Теория статистики》, Дж. Эдни.

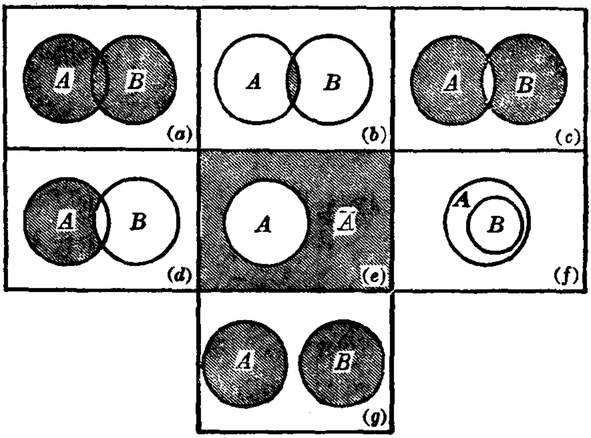

图 1

Юл 及 М. Дж. Кендэл, Госстатиздат, М. 1960)的第一章.

自第 23 题开始,假设已经知道下述概率的性质:

1. 若 $E(U)$ 是必然事件,则

$$P(E)=1 \quad (P(U)=1)$$

2. 若 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, 这里 $A_iA_j=\Lambda(i\neq j)$, 则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

在许多组合问题中,利用**概率的古典定义**是很方便的. 设试验结果中只出现 $n$ 个两两不相容且等可能的基本事件 $E_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 中的一个. 假设事件 $A$ 是由 $m$ 个基本事件 $E_k$ 组成的,则按概率的古典定义,

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

用这种方法解决问题时的根本困难在于基本事件空间的

适当的选择．这时，应特别注意检验所选的基本事件是等可能的，并在计算 $m$ 和 $n$ 时利用同一个基本事件空间．

最简占位问题介绍了组合法在统计物理中的某些应用．所引入的术语“统计”用于物理中所指定的意义．这一节的几乎全部习题都选自费勒的«概率论及其应用»．

应该特别注意§6．几何概率的习题．在求解时要养成利用图形的习惯．其中自然可引进分布函数与密度函数的概念，更复杂的几何概率习题可在第二章的§3．连续分布中找到．

66—70 题稍微超出了教学大纲的范围，它们指出了引入的概念与具有测度的空间及线性有序集的度量化问题之间的联系．这些习题的材料选自 Frank Restl 发表于杂志«Psychometriks»(24, No. 3, pp. 207—220, 1959) 的论文．

## §1．事件域

**1**．从一个概率论讲习班的学生中随机地选择一名．设事件 $A$ 为“选到的是一名男青年”，事件 $B$ 为“他是不吸烟的”，事件 $C$ 为“他是住集体宿舍的”．

1) 叙述事件 $AB\overline{C}$．

2) 在什么条件下恒等式 $ABC=A$ 成立？

3) 何时关系 $\overline{C}\subseteq B$ 正确？

4) 何时有等式 $\overline{A}=B$？如果所有男青年都吸烟，上述等式是否成立？

**2**．一个靶由十个半径为 $r_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10;\ r_1<r_2<\cdots<r_{10})$ 的同心圆所组成．设事件 $A_k$ 为“落在半径为 $r_k$ 的圆



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

内”，问下列事件表示什么？

$$B=\bigcup_{k=1}^{6}A_k,\quad C=\bigcap_{k=1}^{10}A_k,\ D=A_5\circ A_6,\ E=\overline{A}_1A_2$$

**3**．证明：对于任意事件 $A$ 和 $B$，关系式 $A\subset B$，$\overline{A}\supset\overline{B}$，$A+B=B$，$A\overline{B}=\emptyset$ 是等价的。

**4**．证明下列等式：

*a*）$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A+B$；

*b*）$\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$；

*c*）$A+B=AB+A\circ B$；

*d*）$\overline{A\circ B}=AB+\overline{A}\,\overline{B}$；

*e*）$A\circ B=\overline{(A\overline{B})}\circ\overline{(\overline{A}B)}$；

*f*）$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$；

*g*）$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$。

**5**．证明：由 $A\circ B=C\circ D$ 可推出 $A\circ C=B\circ D$。

**6**．证明：当且仅当 $AC=BC$ 时，$\overline{(A+B)}C=\overline{A}C+\overline{B}C$ 成立。

**7**．证明：当且仅当 $ABC=\emptyset$ 时，由 $A\circ B\subseteq C$ 可推出 $A\subseteq B\circ C$。

**8**．工人制造了 $n$ 只零件，设事件 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为“他制造的第 $i$ 只零件是次品”，试写出下列事件：

*a*）没有一只零件是次品；

*b*）至少有一只零件是次品；

*c*）只有一只零件是次品；

*d*）不多于两只零件是次品；

$e$) 至少有两只零件不是次品;

$f$) 恰有两只零件是次品.

**9**. 设事件 $A_n$ 为"事件 $A$ 在试验 $\mathfrak{A}$ 的第 $n$ 次重复时出现",事件$B_{n,m}$ 为"在试验 $\mathfrak{A}$ 的前 $n$ 次重复中,事件 $A$ 出现 $m$ 次".

1) 以 $A_i$ 表示 $B_{4,2}$;

2) 解释事件 $B_m=\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{m}B_{n,k}\right)$ 的意义;

3) 关系式 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\overline{B}$ 及 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\subseteq B$ 是否成立,

其中 $B=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}B_m$.

**10**. 自点 $\omega$ 的集合 $E$ 选出 $n$ 个子集 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 对于任意一个点集 $C$, 我们定义集 $C$ 的示性函数:

$$\chi_C(\omega)=\begin{cases}1 & 若\ \omega\in C\\ 0 & 若\ \omega\notin C\end{cases}$$

证明,利用 $A_i$ 可以构造出这样的点集 $B_k(k=1, 2, \cdots, 2^n)$, 使得对于任意有界函数

$$F(\omega)=F(\chi_{A_1}(\omega), \cdots, \chi_{A_n}(\omega))$$

存在常数 $C_k$ 使得

$$F(\omega)=\sum_k C_k\chi_{B_k}(\omega)$$

## §2. 子群基数之间的相互关系

**11**. 证明:

$a$) $N\{AB\}+N\{AC\}+N\{BC\}$

$\geqslant N\{A\}+N\{B\}+N\{C\}-N$;

b) $N\{AB\}+N\{AC\}-N\{BC\}\leqslant N\{A\}$.

**12**. 证明：如果在特征 $B$ 出现时特征 $A$ 出现，较之在 $B$ 不出现时 $A$ 出现更为频繁，则在 $A$ 出现时 $B$ 出现较之在 $A$ 不出现时 $B$ 出现更为频繁. 换言之，给定

$$N\{AB\}/N\{B\}>N\{A\bar{B}\}/N\{\bar{B}\}$$

证明：

$$N\{AB\}/N\{A\}>N\{\bar{A}B\}/N\{\bar{A}\}$$

**13**. 若 $N\{A\}=N\{B\}=\frac{1}{2}N$，证明 $N\{AB\}=N\{\bar{A}\bar{B}\}$.

**14**. 若 $N\{A\}=N\{B\}=N\{C\}=\frac{1}{2}N$ 且 $N\{ABC\}=N\{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\}$，证明 $2N\{ABC\}=N\{AB\}+N\{AC\}+N\{BC\}-\frac{1}{2}N$.

**15**. 证明下列数据是不相容的：

$$N=1000,\ N\{A\}=525,\ N\{B\}=312,\ N\{C\}=470$$
$$N\{AB\}=42,\ N\{AC\}=147,$$
$$N\{BC\}=86,\ N\{ABC\}=25$$

**提示** 估计 $N\{\bar{A}\ \bar{B}\bar{C}\}$.

**16**. 在报表中提供了由实际观察到的下列数据：

$$N=1000,\ N\{A\}=510,\ N\{B\}=490,\ N(C)=427,$$
$$N\{AB\}=189,\ N\{AC\}=140,\ N\{BC\}=85.$$

证明其中必定包含错误或印刷错误，且印刷错误可能是给出的作为 $N\{BC\}$ 的值 85 之前漏印一个 1.

**17**. **笑话问题**(Lewis Carroll,《混杂的故事》,1881). 在残酷的格斗中，不少于 70% 的格斗者失去一只眼睛，不少于 75% 的格斗者失去一只耳朵，不少于 80% 的格斗者失去一

只手，不少于 85% 的格斗者失去一条腿．问同时失去一只眼睛、一只耳朵、一只手、一条腿的人数至少是多少？

**18**．证明：若 $N\{A\}=Nx$, $N\{B\}=2Nx$, $N\{C\}=3Nx$, $N\{AB\}=N\{AC\}=N\{BC\}=Ny$，则 $x$ 和 $y$ 的值不能超过 $\frac{1}{4}$．

**19**．市场调查员报导了以下的数据．在被询问的 1000 名顾客中，有 811 人喜欢巧克力糖、752 人喜欢夹心糖、418 人喜欢冰糖、570 人喜欢巧克力糖和夹心糖、356 人喜欢巧克力糖和冰糖、348 人喜欢夹心糖和冰糖、以及 297 人喜欢全部三种糖果．证明这一消息有错误．

**20**．以下数据是被观察的 10000 名学龄男孩中具有某些缺陷的男孩数，$A$ 是生理发育上有缺陷的，$B$ 是有神经质症状的，$D$ 是智力迟钝的：

$$N=10000,\ N\{A\}=877,\ N\{B\}=1086$$

$$N\{D\}=789,\ N\{AB\}=338,\ N\{BD\}=455$$

证明：某些智力迟钝的男孩并不具有生理发育上的缺陷，并确定他们的最少人数．

**21**．下述数字是关于女孩的类似数据(参见上题)：

$$N=10000,\ N\{A\}=682,\ N\{B\}=850$$

$$N\{D\}=689,\ N\{AB\}=248,\ N\{BD\}=368$$

证明：某些生理发育有缺陷的女孩不是智力迟钝的，并确定她们的最少人数．

**22**．将一枚硬币连抛三下，抛 100 遍，每次抛掷后记下结果：是正面还是反面．在 100 遍中有 69 遍第一下得正面，有

49 遍第二下得正面，有 53 遍第三下得正面，有 33 遍第一下和第二下都得正面，有 21 遍第二下和第三下都得正面. 证明至少有 5 遍三下都得正面，但不能多于 15 遍三下都得反面，虽说一遍这种情况都不是必定会发生的.

## §3. 概率的定义

**23**. 已知 $p=P(A)$, $q=P(B)$, $r=P(A\cup B)$. 求 $P(A\circ B)$, $P(A\overline{B})$, $P(\overline{A}\overline{B})$.

**24**. 已知 $P(AB)=P(A)P(B)$(即事件 $A$ 与事件 $B$ 是相互独立的), $C\supset AB$ 且 $\overline{C}\supset\overline{A}\overline{B}$. 证明 $P(AC)\geqslant P(A)P(C)$.

**25**. 1) 已知事件 $A_1$ 与事件 $A_2$ 同时发生必然导致事件 $A$ 发生. 证明:

$$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$$

2) 证明下列关于三个事件的不等式: 若 $A_1A_2A_3\subset A$, 则

$$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$$

**26**. 在试验 $\mathfrak{A}$ 中有三个两两不相容的可能结果 $A_n$; 而在试验 $\mathfrak{B}$ 中有四个两两不相容的可能结果 $B_m$. 已知同时出现的概率 $p_{nm}=P\{A_nB_m\}$ 为

$$\begin{array}{lll}
p_{11}=0.01, & p_{21}=0.02, & p_{31}=0.07\\
p_{12}=0.02, & p_{22}=0.04, & p_{32}=0.15\\
p_{13}=0.03, & p_{23}=0.08, & p_{33}=0.20\\
p_{14}=0.04, & p_{24}=0.06, & p_{34}=0.28
\end{array}$$

试对于所有的 $m$, $n$ 求 $P(A_n)$ 和 $P(B_m)$. (参见习题 **83**. )

**27**. 抛掷一枚硬币，直到有一面接连出现两次为止. 对于每一个需要抛 $n$ 次的可能结果，我们认为其概率为 $2^{-n}$. 试

写出基本事件空间，并求下列事件的概率：

$a$) 在完成了第 5 次试验时结束；

$b$) 需要抛掷偶数次。

**28**. 抛掷两颗骰子，设事件 $A$ 表示点数之和为奇数，事件 $B$ 表示至少有一颗骰子出现 1 点. 叙述事件 $AB$, $A\cup B$, $\overline{AB}$. 并在全部 36 个基本事件等可能的条件下，求它们的概率.

## §4. 概率的古典定义. 组合分析

**29**. 一小孩玩 10 个字母字块：А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. 他将这些字母随机地排成一行，问得到单词"МАТЕМАТИКА"的概率是多少？

**30**. 有 5 个人在一座 8 层大楼的底层进入电梯. 设他们中的每一个人自第二层开始在每一层离开是等可能的. 求 5 个人在不同层次离开的概率.

**31**. 一正立方体的各个侧面都涂有颜色，把它锯成 1000 个体积相同的小正立方体，将这些小立方体充分地混合. 求随机选取的一个小正立方体有两个侧面涂有颜色的概率.

**32**. 一种零件可以由材料 $A$ 制造，也可以由材料 $B$ 制造. 为了决定哪一种材料可以承受较大的荷重，由每种材料制造 $n$ 个零件，并进行试验. 以 $x_i$ ($y_j$) 表示第 $i$ 个（第 $j$ 个）由材料 $A$($B$)制造的零件的极限荷重. 所获得的全部 $x_i$ 及 $y_j$ 是不相同的. 利用威尔考克松（Wilcoxon）检验法来处理试验结果*. 为此将 $x_i$, $y_j$ 一起排成递增的序列，并且对于每个 $j$ 求

* 参见 B. L. Van der Waerden. Mathematical statistics. New York, Springer-Verlag (1969).



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com