李俊德 著

概率论与数理统计

下册· 数理统计

河南大学出版社

概率论与数理统计

下 册

数 理 统 计

李俊德 等编

河南大学出版社

(豫) 新登字09号

概率论与数理统计
数理统计
(下册)
李俊德 等编
责任编辑 朱建伟

河南大学出版社出版
(开封市明伦街85号)
河南省新华书店发行
中科院开封印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：10.5 字数：263千字
1995年8月第1版 1995年8月第1次印刷
印数：1—1300 定价：11.00元

ISBN7-81041-210-8/O·95

前　言

数理统计是一门应用性很强的学科，其应用范围几乎渗透到各门学科的各个部分，它是通过样本来研究客观事物发展的统计规律性的．概括起来，数理统计是研究数据的收集、整理、分析和推断的各种统计方法及其理论背景的一门学科．

数理统计是以概率论为理论依据，其研究对象是总体、个体和样本．就其内容结构来说不外三部分：(1) 各种统计方法介绍；(2) 各种统计方法的理论根据（即数学背景）；(3) 各种统计方法如何应用．学习数理统计，对以上三点不能偏离，应以统计思想和统计背景贯穿学习的始终．因为统计学是人们认识自然的一种“工具”，只有用所学的“工具”切实解决工作中的实际问题，才能抓住统计学的本质．

统计学的发展过程大致可分为三个时期：

(1) 产生、发展时期（1900 年以前）．由于人口统计、农业、工业、军事以及国家管理的需要，统计学中的一些概念、方法相继产生．如样本平均数、样本方差、直方图、回归分析、最小二乘估计、拟合优度检验等．这一时期的统计学基本属于描述性统计学，决定本学科面貌的内容并未形成．

(2) 形成时期(1900—1945 年)．一门学科的形成，是由决定本学科面貌的内容、结构和理论所决定．

1908 年英国统计学家傚塞特(Gosset，1876—1937)，以笔名“学生”在该年的生物统计杂志 (Biometrika) 上发表论文，提出了 t-分布和 t 检验法，创立了小样本检验代替大样本检验理论，开创了统计推断的新纪元．同时数理统计能形成一门独立学科与英国

统计学家费歇(A. Fisher, 1890—1962)的名子也是分不开的. 1912年他发表了"拟合频率曲线的一个绝对准则"的论文，并提出了极大似然估计法. 费歇一生共发表三百多篇论文，六本著作，其中最享盛誉的著作《研究人员实用统计方法》(1925年出版)和《试验设计》(1935年出版)，是统计学的经典著作，奠定了统计学的理论基础，开辟了统计学研究的许多新领域，如显著性检验、方差分析、试验设计、点估计理论等. 国际统计学会主席C. R. 罗称从1922—1962年为统计学的"费歇时代".

在统计学理论形成方面波兰统计学家奈曼(Neyman, 1894—1981年)和S. 皮尔逊以及我国统计学家、北京大学许宝录教授(1910—1970)都作出了突出贡献. 特别是在假设检验理论和置信区间最优性方面，做出了开创性工作.

(3) 现代时期(1945年以后). 在当代，统计学的发展更加深入，应用更加广泛. 特别是随着计算机的发明和使用，使统计学的理论研究和推广应用深入到宏观领域和微观领域.

1945年A. Wald(1902—1950)发表了著名论著《统计决策函数》，开创了统计学研究的新领域. 另外，Bayes学派的兴起也是当代统计学研究的一个新特点. 由于统计学应用的深入以及其他学科的发展，现已形成的一套统计理论(基本上都是基于总体服从正态分布)已不适应时代的需要，开始对基于农业试验而形成的统计学理论提出异议，关于宏观领域和微观领域，以及环保统计等方面的统计理论和统计方法的形成已为期不远.

在我国，统计学还是一门年轻的学科. 在统计理论研究方面，某些分支已达到了世界先进水平，但在统计应用方面与发达国家水平相差还有一段距离. 有些国家把统计方法作为工程技术人员的一种语言，并认为数理统计对国民经济的发展起了十分之一的作用，可见人们对数理统计学的重视程度.

该书在编写中对统计方法和统计理论同等重视. 要求读者首

先掌握方法及其应用，然后再探讨其数学背景. 在编写中，我们重视方法的如何应用及其使用范围，所以，将参数估计方法和估计理论、假设检验方法和假设检验理论分章讨论，便于读者结合自己情况，挑选学习内容. 全书内容是按每周4学时讲授，一学期时间安排的，如时间不足4学时，可略去理论部分教材，仅讲统计方法，并不影响内容的系统性.

该书的编写，可以说是我们多年从事该学科教学经验的总结. 在编写中我们采取集体制定编写原则与计划，然后分头执笔，最后统一审定的作法. 参加本书编写的有：李达仁第一、六章，肖庆宪第二、三章，刘文安第四、五章，范秀兰第七、八章，最后，全书由李俊德审定.

本书编写中，我们除了参阅自己使用的讲义以外，还参考了不少中外同类学科著作及兄弟院校的交流讲义. 另外，本书的出版得到河南大学出版社的大力支持，对以上同志和单位，表示衷心感谢. 由于编者水平有限，错误难免，诚请同志们提出宝贵的批评与指教.

编 者

1994. 5

目　　录

第一章　基本概念

数理统计的研究对象是总体、个体和样本，其研究的基本方法是通过样本构造统计量，再通过统计量的研究，对样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所来自的总体进行分析和推断，这是整个统计学研究的核心问题．所以，样本和样本分布，统计量和抽样分布，自然是本章学习的重点，其内容贯串全书各章节．一般说来，我们假设总体都服从正态分布．本章讨论的抽样分布有 t-分布、χ^2-分布、F-分布、样本平均 $\bar{X}$ 的分布和样本方差 S^2 的分布等．

§1　样本和样本分布

数理统计的研究对象，都是现实世界客观事物及其相互关系的一种反映，因此，我们必须抽象出一些基本概念．

一、总体、个体和样本

假设我们要研究某厂生产的一批电视机显象管的平均寿命．由于测试显象管具有破坏性，我们只能从这批产品中随机抽取一部分进行寿命测试，并根据这部分产品的寿命数据对这批产品的寿命作出推断和估计．

在数理统计中，我们把研究对象的全体所构成的集合称为总体或母体，而把组成总体的每个元素称为个体．例如上述的一批显象管的全体就组成一个总体，其中每一只显象管就是一个个体．

一般说来总体都是随机变量 X．为了对总体的分布进行研究，就必须对总体进行抽样观察，而且不止一次进行抽样观测，得到

总体X的一组观测数据$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中x_i为一次观测的结果，n称为样本的容量．就某一次观测结果而论，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是完全确定的一组值，但由于抽样是随机的，因而每次观测结果又不一样，即数理统计的研究对象是受随机因素影响的数据，样本都是随机变量．所以$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是随机向量，其所可能取值的全体（这里可能是n维空间或其中的一个子集）称为样本空间，样本的一个观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$就是样本空间的一个点．样本的这种二重性是样本的重要性．对理论工作者而言，更多注意到样本的随机变量性质．因为他所研究的统计方法应有一定的普遍性，而对应用工作者而言，虽然习惯于把样本看成具体数据，但仍然不能忽视"样本是随机变量"这一重要特性．

为了使得抽取的样本能全面地反映总体的特性，要求抽得的样本必须满足下列两条要求：(1) 代表性：要求样本的每个分量X_i与所考察的总体X具有相同的分布$F(x)$；(2) 独立性：$X_1, X_2, \cdots, X_n$为相互独立的随机变量．满足上述两条性质的样本称为简单随机样本．今后，如不特殊声明，我们所说的样本都指简单随机样本，简称样本．

二、样本分布

样本既然是随机变量，就有一定的概率分布，这个概率分布就称为样本分布，它是样本所受随机性影响的最完整的描述．样本分布可以由总体分布完全决定．如总体$X \sim F(x), X_1, X_2, \cdots, X_n$为从总体$X$里抽得的样本，则样本分布为$\prod_{i=1}^{n} F(x_i)$．

例1 一批产品共有N个，其中有废品M个．N已知而M未知．现从中抽出n个加以检验，用以估计M或废品率$p=M/N$．抽样方法是这样的：采用不放回抽样．设抽得废品对应1，抽得合格品对应0．第一次抽得一个时，N个产品中的每一个都有同等机

会(即 $1/N$)被抽出．样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中的每一个都只能取0或1为值．我们来计算概率 $P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n)$．为便于讨论，设 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$．为要 $X_1 = 1$，第一个必须抽得废品．按"每一个有同等机会被抽出"的规定，这个事件的概率为 M/N．到第二次抽得合格品时，其概率（严格讲应为条件概率）为 $(N-M)/(N-1)$，同理推得 $X_3 = 1$ 的概率为 $(M-1)/(N-2)$．这样易验证：

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$
$$= \frac{M}{N}\frac{(M-1)}{(N-1)}\cdots\frac{(M-a+1)}{(N-a+1)}\frac{(N-M)}{(N-a)}\cdots\frac{(N-M-n+a+1)}{(N-n+1)}, \tag{1}$$

当 $x_1, \cdots, x_n$ 都为 0 或1，$\sum_{i=1}^{n} x_i = a$；其他情况为 0．

例2 仍考虑上例，但抽样方法采用有放回抽样，每次抽一个，记录结果后，将其放回去，再抽第二个……，直到抽出 n 个为止，且在每次抽取时，N 个产品中每一个有同等机会被抽出．

仍以 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 记样本．在此，不论前 $(k-1)$ 次抽取的结果如何，到第 k 次抽取时，总有 N 个产品，其中废品 M 个．故 $\{X_i = x_i\}, i = 1, \cdots, n$，这 n 个事件独立，且 $P(X_i = x_i) = M/N$ 或 $(N-M)/N$，视 $x_i = 1$ 或 0 而定．于是得到

$$P\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\} = \left(\frac{M}{N}\right)^a \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-a}. \tag{2}$$

当 $x_1, \cdots, x_n$ 都为 0 或 1，$\sum_{i=1}^{n} x_i = a$；其他情况为 0．

例 2 相当于总体 $X \sim B(1, p)$，$X_1, \cdots, X_n$ 为从 X 里抽得的样本，则样本分布为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}.$$

例3 为估计一物体的重量 μ，用一架天平将它重复秤量 n 次，结果记为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，这就是样本.

样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个独立同分布的随机变量，因此，为确定$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率分布，只须给出其中一个，例如 X_1 的概率分布. 在此就要考虑到秤量误差的本性. 根据中心极限定理知，误差近似地服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$. 这样把 X_1(它等于物体重量 μ 加上称量误差)的概率分布定为正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，于是可得$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的样本分布密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]. \tag{3}$$

§2 顺序统计量

一、统计量

在统计学里，把凡是由样本算出的量称为统计量；或者说，统计量是样本的函数. 在此必须注意，统计量仅依赖于样本，不包含任何未知参数，因为统计量的作用主要在于对未知参数进行估计和推断.

定义1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个独立同分布的随机变量，T是$\mathscr{R}_n\to\mathscr{R}$的 Borel 可测函数，则随机变量 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$称为统计量，倘若它不包含任何未知参数.

两个最常用的统计量定义如下：

定义2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从分布函数为 $F(x)$ 的总体里抽得的样本，则统计量

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{1}$$

称为样本均值(或称样本平均数)；统计量

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right] \tag{2}$$

称为样本方差.

例1 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，σ^2 未知. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从 X 里抽得的样本，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i/\sigma^2$ 不是统计量. 而

$$S^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right] \tag{3}$$

是一个统计量①.

二、顺序统计量及其分布

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机向量，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的取值，那末让我们按 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的上升顺序排列

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)},$$

其中 $x_{(1)}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_{(2)}$ 是第二个最小的，如此等等，$x_{(n)}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 假若 x_i,x_j 相等，它们的顺序任意.

定义3 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的函数 $X_{(k)}$ 取值为 $x_{(k)}$，对于 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的每种可能取值，则称 $X_{(k)}$ 为 k 阶顺序统计量. $\{X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}\}$ 称为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的顺序统计量.

例2 设 X_1,X_2,X_3 是三个离散型随机变量，且设 X_1，X_3 的取值为 $0,1$，X_2 的取值为 $1,2,3$. 则随机向量 (X_1,X_2,X_3) 的取值

① 有些书上，称 S^{*2} 为样本方差. 以后我们将证明 S^{*2} 是总体方差 σ^2 的无偏估计量.

为：(0,1,0),(0,2,0),(0,3,0),(0,1,1),(0,2,1),(0,3,1),(1,1,0),(1,2,0),(1,3,0),(1,1,1),(1,2,1),(1,3,1)；$X_{(1)}$ 取值 0，1；$X_{(2)}$取值 0，1；$X_{(3)}$取值为 1，2，3．

以下我们假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是连续型随机变量，且密度函数为 f，$X_{(1)}$，$X_{(2)}$，$\cdots$，$X_{(n)}$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的顺序统计量．由于 X_i 是连续型随机变量，因此以概率 1 有

$$X_{(1)}<X_{(2)}<\cdots<X_{(n)}.$$

我们现在求$(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)})$的联合密度函数．

定理1 $(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)})$的联合密度函数为：

$$g(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)})=\begin{cases} n!\prod_{i=1}^{n} f(x_{(i)}), & x_{(1)}<x_{(2)}<\cdots<x_{(n)}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{4}$$

证明 从$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$到$(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)})$的变换不是一对一变换．事实上，按 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 递增顺序排列存在 $n!$个，这样就存在 $n!$个逆变换．例如 $n!$个排列之一是

$$x_4<x_1<x_{n-1}<x_3<\cdots<x_n<x_2.$$

则对应的逆变换是

$$x_4=x_{(1)},\ x_1=x_{(2)},\ x_{n-1}=x_{(3)},\ x_3=x_{(4)},$$
$$\cdots,\ x_n=x_{(n-1)},\ x_2=x_{(n)}.$$

这样变换的 Jacobi 行列式 $J=\pm1$，所以

$$g(x_{(2)},x_{(n)},x_{(4)},x_{(1)},\cdots,x_{(3)},x_{(n-1)})|J|=\prod_{i=1}^{n}f(x_{(i)}),$$
$$x_{(1)}<x_{(2)}<\cdots<x_{(n)}.$$

对于 $n!$个变换的每种表示式都相同．对所有 $n!$个逆变换有

$$g(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)})=\sum\prod_{i=1}^{n}f(x_{(i)})$$

$$=\begin{cases} n!f(x_{(1)})f(x_{(2)})\cdots f(x_{(n)}), & x_{(1)}<\cdots<x_{(n)}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n \text{iid} U(0,1)$，则 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ 的联合密度函数为

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{cases} n!, & 0<y_1<y_2<\cdots<y_n<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例4 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是从密度函数为 f 的总体里抽得的样本，则 $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(4)}$ 的联合密度函数是

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{cases} 4!f(y_1)f(y_2)f(y_3)f(y_4), & y_1<y_2<y_3<y_4; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

让我们计算 $X_{(2)}$ 的边缘密度. 有

$$\begin{aligned} g_2(y_2) &= 4! \iiint f(y_1)f(y_2)f(y_3)f(y_4)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4 \\ &= 4!f(y_2)\int_{-\infty}^{y_2}\int_{y_2}^{\infty}\left[\int_{y_3}^{\infty} f(y_4)\mathrm{d}y_4\right]f(y_3)f(y_1)\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_1 \\ &= 4!f(y_2)\int_{-\infty}^{y_2}\left\{\int_{y_2}^{\infty}[1-F(y_3)]f(y_3)\mathrm{d}y_3\right\}f(y_1)\mathrm{d}y_1 \\ &= 4!f(y_2)\int_{-\infty}^{y_2}\frac{[1-F(y_2)]^2}{2}f(y_1)\mathrm{d}y_1 \\ &= 4!f(y_2)\frac{[1-F(y_2)]^2}{2!}F(y_2), \qquad y_1<y_2<y_3<y_4. \end{aligned}$$

类似，对于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 r 阶顺序统计量 $X_{(r)}$ 的边缘密度函数也可求得.

定理2 $X_{(r)}$ 的边缘密度函数为

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(y_r)]^{r-1}[1-F(y_r)]^{n-r}f(y_r), \tag{5}$$

这里 F 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 共同的分布函数.

证明

$$g_r(y_r)=n!f(y_r)\int_{-\infty}^{y_r}\int_{-\infty}^{y_{r-1}}\cdots\int_{-\infty}^{y_2}\int_{y_r}^{\infty}\int_{y_{r+1}}^{\infty}\cdots\int_{y_{n-1}}^{\infty}$$

$$\prod_{i\neq r}^{n}f(y_i)\mathrm{d}y_n\cdots\mathrm{d}y_{r+1}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{r-1}$$

$$=n!\ f(y_r)\ \frac{[1-F(y_r)]^{n-r}}{(n-r)!}\int_{-\infty}^{y_r}\cdots\int_{-\infty}^{y_2}\prod_{i=1}^{r-1}[f(y_i)\mathrm{d}y_i]$$

$$=n!\ f(y_r)\ \frac{[1-F(y_r)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot\frac{[F(y_r)]^{r-1}}{(r-1)!}$$

推论1 $X_{(1)}$的密度函数为

$$g_1(y_1)=nf(y_1)[1-F(y_1)]^{n-1}. \tag{6}$$

推论2 $X_{(n)}$的密度函数为

$$g_n(y_n)=nf(y_n)[F(y_n)]^{n-1}. \tag{7}$$

现在我们来求 $X_{(j)}$和 $X_{(k)}$的联合密度函数，$1\leqslant j<k\leqslant n$.

定理3* $X_{(j)}$和 $X_{(k)}$的联合密度函数为

$$g_{jk}(y_j,y_k)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(j-1)!(k-j-1)!(n-k)!}F^{j-1}(y_j)[F(y_k)\\ -F(y_j)]^{k-j-1}[1-F(y_k)]^{n-k}f(y_j)f(y_k), & y_i<y_k;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明

$$g_{jk}(y_j,y_k)=\int_{-\infty}^{y_j}\cdots\int_{-\infty}^{y_2}\int_{y_j}^{y_k}\cdots\int_{y_{k-2}}^{y_k}\int_{y_k}^{\infty}\cdots\int_{y_{n-1}}^{\infty}n!f(y_1)\cdots f(y_n)$$

$$\times\mathrm{d}y_n\cdots\mathrm{d}y_{k+1}\mathrm{d}y_{k-1}\cdots\mathrm{d}y_{j+1}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{j-1}$$

$$=n!\int_{-\infty}^{y_j}\cdots\int_{-\infty}^{y_2}\int_{y_j}^{y_k}\cdots\int_{y_{k-2}}^{y_k}\frac{[1-F(y_k)]^{n-k}}{(n-k)!}f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_k)$$

$$\times\mathrm{d}y_{k-1}\cdots\mathrm{d}y_{j+1}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{j-1}$$

$$=n!\frac{[1-F(y_k)]^{n-k}}{(n-k)!}f(y_k)\int_{-\infty}^{y_j}\cdots\int_{-\infty}^{y_2}\frac{[F(y_k)-F(y_j)]^{k-j-1}}{(k-j-1)!}$$